Archiv der Mathematik und Physik

Sci 885.25

Bound

JAN 22 1[illegible]

Harvard College Library

FROM THE BEQUEST OF

HORACE APPLETON HAVEN,

OF PORTSMOUTH, N. H.

(Class of 1842.)

SCIENCE CENTER LIBRARY

Digitized by Google

Digitized by Google

ARCHIV
DER MATHEMATIK UND PHYSIK

MIT BESONDERER RÜCKSICHT
AUF DIE LEHRER AN HÖHEREN UNTERRICHTSANSTALTEN
SOWIE DIE STUDIERENDEN DER MATHEMATIK UND PHYSIK.

GEGRÜNDET 1841 DURCH J. A. GRUNERT.

DRITTE REIHE.

MIT ANHANG:
SITZUNGSBERICHTE DER BERLINER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT.

HERAUSGEGEBEN
VON

E. LAMPE IN BERLIN. **W. FRANZ MEYER** IN KÖNIGSBERG I. PR. **E. JAHNKE** IN BERLIN.

13. BAND.

MIT 19 TEXTFIGUREN.

LEIPZIG UND BERLIN,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1908.

Digitized by Google

5 ω 885.25

ALLE RECHTE, EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

Digitized by Google

Inhalt.

Seite

Bateman, H., in Cambridge. The tangent planes which can be drawn to an algebraic surface from a multiple line . . . . . 48—51

Biermann, Otto, in Brünn. Über zweifache Flächenpunkte . . . . . 23—28

Eberhard, Victor, in Halle a. S. Über die Verteilung der reellen Wurzeln dreier rational abhängigen algebraischen Gleichungen . . 113—126

Eckhardt, Ernst, in Homburg v. d. Höhe. Der Brocardsche Kreis des harmonischen Vierecks als Grenzfall von sechs Siebenpunktkreisen. (Mit 1 Figur.) . . . . . 12—22

Fischer, Ernst, in Brünn. Über den Hadamardschen Determinantensatz 32—40

Godt, Wilhelm, in Lübeck. Über die Entwicklung binärer Formen mit mehreren Variabeln . . . . . 1—12

Godeaux, Lucien, in Liége. Sur un mode de génération de la cubique gauche . . . . . 155—157

Heger, Richard, in Dresden. Zur Geometrie auf der Kugel. 127—133, 209—213

Jung, Heinrich, in Marburg. Über die Lage der Hauptträgheitsachsen von Punktsystemen in der Ebene . . . . . 231—232

Kokott, Paul, in Neiße. Über sternförmige Polygone, welche mit der Teilung der elliptischen Funktionen im Zusammenhange stehen. (Mit 1 Figur.) . . . . . 133—136

Kölmel, Fritz, in Baden-Baden. Über gewisse Transformationen von ebenen Kurven dritter Ordnung . . . . . 226—231

Kürschák, Josef, in Budapest. Über Formen, die vollständige Potenzen sind . . . . . 153—154

Landau, Edmund, in Berlin. Über die Einteilung der positiven, ganzen Zahlen in vier Klassen nach der Mindestzahl der zu ihrer additiven Zusammensetzung erforderlichen Quadrate. (Mit 2 Figuren.) . . . 305—312

Lohnstein, Rudolf, in Berlin. Einige Reihenentwicklungen für π . . 325—331

Majcen, Georg, in Agram. Einige Sätze über die räumliche Hyperbel 144—149

Meyer, Eugen, in Charlottenburg. Die involutorischen Punkttransformationen des Raumes . . . . . 149—152

Petr, Karl, in Prag. Ein Satz über Vielecke . . . . . 29—31

Reißner, H., in Aachen. Über Fachwerke mit zyklischer Symmetrie. (Mit 2 Figuren.) . . . . . 317—325

Safford, Frederick Hollister, in Philadelphia. The potential Equation and $\wp$-function Curves . . . . . 223—226

Vogt, Wolfgang, in Karlsruhe. Systeme korrelativer Bündel, welche eine gegebene F^2 erzeugen. . . . . 137—143, 214—223, 313—317

Wiman, Anders, in Upsala. Über das Minimum des Integrals

$$\int_{x_0}^{x_1} y'' \sqrt{1+y'^2}\, dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 41—48$$

Digitized by Google

Rezensionen.

Seite

Abraham, M. und Föppl, A., Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität I. Von **E. Jahnke** 359
Adler, A., Theorie der geometrischen Konstruktionen. Von **G. Wallenberg** 250
Ahrens, W., Briefwechsel zwischen C. G. J. Jacobi und M. H. Jacobi. Von **J. Herzog** 352
Albrecht, Logarithmisch-trigonometrische Tafeln mit fünf Dezimalstellen. Von **E. Kullrich** 55
Amodeo, Federico, Lezioni di geometria proiettiva. Von **O. Staude** . . 164
Annuaire du Bureau des Longitudes pour l'an 1908. Von **E. Jahnke** . . . 83
Astronomischer Kalender für 1906, 1907, 1908. Von **H. Samter, E. Kullrich A. Baruch** 83. 284
Baire, René, Leçons sur les théories générales de l'analyse. Von **F. Hartogs** 336
Ball, W. Rouse, Récréations mathématiques et problèmes des temps anciens et modernes. Von **W. Ahrens** 275
— Histoire des Mathématiques. Von **J. Tropfke** 355
Bernhard, M., Darstellende Geometrie mit Einschluß der Schattenkonstruktionen und der Perspektive. Von **E. Müller** 71
Besson, Paul, Le Radium et la Radioactivité. Von **E. Aschkinaß** 171
Block, C., Lehr- und Übungsbuch für den planimetrischen Unterricht an höheren Schulen. Von **E. Kullrich** 68
Blythe, W. H., On Models of Cubic Surfaces. Von **H. Wieleitner** 273
Börnstein, R., Leitfaden der Wetterkunde. Von **H. Samter** 81
Böttger, Beiträge zur Geschichte und Methode des chemischen Unterrichts in der Volksschule. Von **H. Samter** 83
Bouty, M., „Cours de Physique de l'École Polytechnique par M. J. Jamin". Troisième Supplément. Von **O. Lummer** 343
Brillouin, Marcel, Leçons sur la viscosité des liquides et des gaz. Von **M. Laue** 342
Broggi, Ugo, Traité des assurances sur la vie avec développements sur le calcul des probabilités. Von **E. Wagner** 344
Brunn, H., Beziehungen des Du Bois-Reymondschen Mittelwertsatzes zur Ovaltheorie. Von **G. Wallenberg** 244
Bruns, H., Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmaßlehre. Von **G. Helm** 338
Bryan, G. H., Thermodynamics. Von **M. Laue** 340
Burkhardt, H., Vorlesungen über die Elemente der Differential- und Integralrechnung und ihre Anwendung zur Beschreibung von Naturerscheinungen. Von **E. Jahnke** 347
Bürklen, Th., Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik. Von **E. Kullrich** 57
Cantor, Moritz, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Erster Band, 3. Aufl. Von **J. Tropfke** 351
Cappilleri, A., Einführung in die Ausgleichungsrechnung (Methode der kleinsten Quadrate). Von **E. Jahnke** 273
Couturat, C., L'Algèbre de la Logique. Von **G. Wallenberg** 243
Christiansen, C. und Müller, Johs. J. C., Elemente der theoretischen Physik. Von **E. Pringsheim** 61
Davison and Richards, Plane Geometry for secondary schools. Von **E. Kullrich** 236
Die Kultur der Gegenwart. 1. Bd.: Die allgemeinen Grundlagen der Kultur der Gegenwart. Von **H. Samter** 183
Die physikalischen Institute der Universität Göttingen. Von **H. Samter** . 182
Doehlemann, Projektive Geometrie. Von **P. Schafheitlin** 72

Digitized by Google

Seite

Duhem, P., Les origines de la statique. Von **G. Hamel** 257
Durège, H., Elemente der Theorie der Funktionen einer komplexen veränderlichen Größe. Von **M. Krause** 267
Edwardson, Woher kam das Leben? Von **H. Samter** 184
Emch, A., An introduction to projective geometry and its applications. Von **Lothar Heffter** 72
Emden, R., Gaskugeln. Von **G. Holzmüller** 345
Encyklopädie der Elementarmathematik. 3. Band. Von **L. Henneberg** . . 332
Fack, Michael, Zur didaktischen Darstellung von Stoffen aus der niederen und höheren Mathematik. Von **J. Schröder** 248
Fenkner, H., Arithmetische Aufgaben. Von **E. Kullrich** 57
Fine, H. B., A College Algebra. Von **E. Netto** 76
Föppl, August, Vorlesungen über technische Mechanik. Von **J. Weingarten** 239
Franz, Der Mond. Von **H. Samter** 82
Fuchs, L., Gesammelte Mathematische Werke I, II. Von **G. Wallenberg** 59, 251
Garbasso, A., Vorlesungen über theoretische Spektroskopie. Von **Cl. Schaefer** 168
Geyger, Erich, Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Von **E. Müller** . 260
Gibbs, J. Willard, Scientific papers. Von **Cl. Schaefer** 254
Glinzer, E., Lehrbuch der Elementargeometrie. Von **E. Kullrich** 56
Grimsehl, E., Die Ziele und Methoden des physikalischen Unterrichts. Von **E. Kullrich** 54
Grünfeld, E., Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen. Von **G. Wallenberg** 73
Häfner, Phil., Stromverteilungssysteme und Berechnung elektrischer Leitungen. Von **J. Herzog** 352
Heiberg, J. L. und Zeuthen, H. G., Eine neue Schrift des Archimedes; Bibl. Math. 7_3, 321, 1907. Von **J. Tropfke** 189
Henkler, Der Lehrplan für den Unterricht in Naturkunde. Von **H. Samter** 185
Hertwig, O., Das Bildungsbedürfnis und seine Befriedigung durch deutsche Universitäten. Von **E. Kullrich** 58
Hesse, O., Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der geraden Linie, des Punktes und des Kreises in der Ebene. Von **P. Zühlke** 350
Hočevar, F., Lehr- und Übungsbuch für Untergymnasien. Von **E. Kullrich** 236
—, Lehr- und Übungsbuch der Arithmetik für die unteren Klassen der Gymnasien und verwandten Lehranstalten. Von **E. Kullrich** 282
Hochheim, A., Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene. Von **P. Zühlke** 52
Holliger, H., Kurze Anleitung zur Berechnung von Flächen und Körpern für Schule und Praxis. Von **E. Kullrich** 78
Holzmüller, G., Die Planimetrie für das Gymnasium im Anschluß an die preußischen Lehrpläne von 1901 methodisch bearbeitet. Von **E. Kullrich** 56
Huntington, Edward V., La Kontinuo. Elementa teorio starigita sur la ideo de ordo kun aldono pri transfinitaj nombroj. Von **G. Hessenberg**. 270
Hyde, E. W., Graßmann's space analysis. Von **E. Jahnke** 54
Jaeger, G., Die Fortschritte der kinetischen Gastheorie. Von **E. Pringsheim** 61
Jordan, W., Handbuch der Vermessungskunde. Von **E. Hammer** 275
Kistner, Geschichte der Physik. Von **H. Samter** 52
Klauser und Labe, Lehrbuch der Vermessungskunde. Von **K. Fuhrmann** 358
Kobold, Der Bau des Fixsternsystems mit besonderer Berücksichtigung der photometrischen Resultate. Von **H. Samter** 80
Koenig, A., Bürgerliche Rechnungsarten. Von **E. Kullrich** 69
Koppe-Dieckmanns Geometrie zum Gebrauche an höheren Unterrichtsanstalten. Von **P. Schafheitlin, E. Kullrich**. 175, 236

Digitized by Google

Seite

Kowalewski, G., Einführung in die Infinitesimalrechnung mit einer historischen Übersicht. Von **E. Jahnke** 349
Krauß, Fritz, Die Thermodynamik der Dampfmaschinen. Von **R. Vater**. 356
Krüger, L., Zur Ausgleichung der Widersprüche in den Winkelbedingungsgleichungen trigonometrischer Netze. Von **L. Krüger** 79
Kuhn, Friedrich, Fragen und Aufgaben aus dem Anfangskapitel der Planimetrie. Von **E. Kullrich** 281
Lackemann-Kreuschmer, Die Elemente der Geometrie Von **E. Kullrich** 68
La Cour, Paul, und Appel, Jakob, Die Physik auf Grund ihrer geschichtlichen Entwicklung für weitere Kreise in Wort und Bild dargestellt. Von **A. Rotth** 177
Lafitte, P. de, Essai sur le carré magique de N à N nombres. Von **E. Kullrich** 79
Laisant, C. A., Initiation mathématique. Von **E. Kullrich** 77
Lamb, Horace, Lehrbuch der Hydrodynamik. Von **M. Laue** 340
Langen, F., Was haben wir von der Gasturbine zu erwarten? Von **R. Vater** 176
Lanner, A., Die wissenschaftliche Grundlage des ersten Rechenunterrichts. Von **E. Kullrich** 58
Leibnizens nachgelassene Schriften physikalischen, mechanischen und technischen Inhalts. Von **P. Johannesson** 188
Lengauer, Jos., Bardeys Aufgabensammlung für bayerische Mittelschulen nach der neuesten Auflage bearbeitet. Von **E. Kullrich** 271
Lesser, Oskar, Die Entwicklung des Funktionsbegriffes und die Pflege des funktionalen Denkens im Mathematikunterricht unsrer höheren Schulen. Von **J. Schröder** 247
Loisel, Guide de l'amateur météorologiste. Von **H. Samter** 185
Lorentz, H. A., Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung nebst einer Einführung in andere Teile der Mathematik. Von **E. Jahnke** 347
Loria, Gino, Vorlesungen über darstellende Geometrie. Von **E. Müller** . 262
Mahler, Ebene Geometrie. Von **P. Schafheitlin** 72
Marx, Erich, Die Geschwindigkeit der Röntgenstrahlen. Von **M. Laue**. . 342
Mauderli, Die Interpolation und ihre Verwendung bei der Benutzung und Herstellung mathematischer Tabellen. Von **H. Samter** 181
Maurer, Methodisch geordnete Sammlung geometrischer Aufgaben in bildlicher Darstellung. Von **P. Schafheitlin** 172
Meißner, O., Die meteorologischen Elemente und ihre Beobachtung. Von **H. Samter**. 185
Mellor, J. W., Höhere Mathematik für Studierende der Chemie und Physik und verwandter Wissensgebiete. Von **E. Jahnke** 53
Metz, G. de, La double réfraction accidentelle dans les liquides. Von **Cl. Schaefer** 169
Močniks logarithmisch-trigonometrische Tafeln. Von **E. Kullrich** 69
Möller, M., Die abgekürzte Dezimalbruchrechnung. Von **E. Kullrich** . . 79
Müller, Felix, Karl Schellbach, Rückblick auf sein wissenschaftliches Leben. Von **H. Samter** 167
Müller, Heinrich, Vierstellige Logarithmen-Tafeln. Von **E. Kullrich** . . 284
Müller, H. und Kutnewsky, M., Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik, Trigonometrie und Stereometrie. Von **E. Kullrich** 271
Müller-Pouillet, Lehrbuch der Physik und Meterologie. I. Band, 2. Hälfte. Von **F. Harms** 181
Myller, A., Gewöhnliche Differentialgleichungen höherer Ordnung in ihrer Beziehung zu den Integralgleichungen. Von **G. Wallenberg** 245
Napravnik, Franz, Vollständig gelöste Maturitätsaufgaben aus der Mathematik. Von **E. Kullrich** 271

Digitized by Google

Seite

Neikes, H., Der goldene Schnitt und die „Geheimnisse der Cheopspyramide". Von **E. Jahnke** 359

Nernst, W. und Schoenflies, A., Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften. Von **E. Jahnke** 347

Oettingen, Arthur v., Die perspektivischen Kreisbilder der Kegelschnitte Von **E. Müller** 262

Oppenheim, S., Das astronomische Weltbild im Wandel der Zeit. Von **H. Samter** 182

Orlich, E., Aufname und Analyse von Wechselstromkurven. Von **J. Herzog** 254

Papius, Karl Frhr. von, Das Radium und die radioaktiven Stoffe. Von **E. Aschkinaß** 170

Paulsen, F., Das deutsche Bildungswesen in seiner geschichtlichen Entwickelung. Von **H. Samter** 184

Peslouan, Ch. Lucas de, N. H. Abel. Sa vie et son œuvre. Von **E. Lampe** 237

Petronievics, Branislav, Die typischen Geometrien und das Unendliche. Von **G. Hessenberg** 269

Pétrovitch, M., La Mécanique des Phénomènes fondée sur les Analogies. Von **M. Laue** 186

Pietzker, F., Lehrgang der Elementar-Mathematik in zwei Stufen. Von **E. Kullrich** 282

Ratschläge und Erläuterungen für die Studierenden der Mathematik und Physik an der Universität Göttingen. Von **E. Jahnke** 360

Remus, Der dynamologische Lehrgang. Von **H. Samter** 82

Reye, Th., Die Geometrie der Lage. Von **H. E. Timerding** 62

Richter, O., Dreistellige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Von **E. Kullrich** 284

Riebesell, P., Über den Kurzschluß der Spulen und die Vorgänge bei der Kommutation des Stromes eines Gleichstromankers. Von **G. Wallenberg** 65

Riollot, J., Les carrés magiques. Von **W. Ahrens** 274

Rohr, M. v., Die optischen Instrumente. Von **H. Samter** 82

Rößler, G., Die Fernleitung von Wechselströmen. Von **Josef Herzog** . . 70

Rudio, F., Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippokrates. Von **J. Tropfke** 355

Rühlmann, Logarithmisch-trigonometrische und andere für Rechner nützliche Tafeln. Von **E. Kullrich** 55

Russel, John Wellesley, An Elementary Treatise on Pure Geometry. Von **M. Peche** 186

Sahulka, Jos., Erklärung der Gravitation, der Molekularkräfte, der Wärme, des Lichtes, der magnetischen und elektrischen Erscheinungen aus gemeinsamer Ursache auf rein mechanischem, atomistischem Wege. Von **H. Samter** 181

Schellhorn, Planimetrische Beweise mit Anhang: Algebraische Regeln. Von **P. Schafheitlin** 173

Schick, J., Barytomik. Von **E. Jahnke** 359

Schlink, Wilhelm, Statik der Raumfachwerke. Von **L. Henneberg** . . . 264

Schmidt, Arnold, Beiträge zum mathematischen Unterricht. Von **E. Kullrich** 56

Schülke, A., Aufgabensammlung aus der Arithmetik nebst Anwendungen auf das bürgerliche Leben, Geometrie und Physik. Von **E. Kullrich** . . 271

—, Differential- und Integralrechnung im Unterricht Von **J. Schröder** . . 249

Schulz-Euler, Leonhard Euler. Von **E. Jahnke** 256

Schuster, M., Geometrische Aufgaben und Lehrbuch der Geometrie, Planimetrie — Stereometrie — Ebene und sphärische Trigonometrie. Von **E. Kullrich** 281

Digitized by Google

Seite

Schwering, K., Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik für höhere Lehranstalten. Von **E. Kullrich** 57
— und Krimphoff, W., Ebene Geometrie. Von **E. Kullrich** 55
Séguier, J. A. de, Théorie des groupes finis. Von **A. Loewy** 278
Sickenberger, A., Übungsbuch zur Algebra. Von **E. Kullrich** 282
Simon, Max, Didaktik und Methodik des Rechnens und der Mathematik. Von **J. Tropfke** 351
Smith, D. E., History of modern Mathematics. Von **Edm. Hoppe** 265
Smithsonian Institution. Von **R. Scheibe** 186
Soyka, H., Präzisions-Winkellineal. Von **E. Jahnke** 358
Staude, O., Analytische Geometrie des Punktes, der geraden Linie und der Ebene. Von **P. Zühlke** 342
Sturm, A., Geschichte der Mathematik. Von **E. Kullrich** 57
Sylvester, James Joseph, The Collected Mathematical Papers. Von **M. Noether** 233
Tapla, Grundzüge der niederen Geodäsie. Von **K. Fuhrmann** 357
Technik und Schule. I. Band, 1. Heft. Von **H. Samter** 184
—. I. Band, 3. Heft. Von **W. Ahrens** 268
Teixeira, F. Gomes, Tratado de las curvas especiales notables. Von **H. Wieleitner** 75
Teubners, B. G., Verlag auf dem Gebiete der Mathematik, Naturwissenschaften und Technik nebst Grenzwissenschaften. Von **E. Jahnke** . . . 360
Thieme, H., Leitfaden der Mathematik für Realanstalten. Von **E. Kullrich** 68
—, Leitfaden der Mathematik für Gymnasien. Von **E. Kullrich** 282
Thomae, J., Grundriß einer analytischen Geometrie der Ebene. Von **O. Staude** 158
Thomson, J. J., Elektrizität und Materie. Von **E. Aschkinaß** 169
Verneri, Joannis, de triangulis sphaericis libri quatuor, de meteoroscopiis libri sex cum prooemio G. J. Rhetici. I. De triangulis sphaericis libri quatuor. Hrsg. von A. A. Björnbo. Von **J. Tropfke** 354
Vogdt, Rudolf, Pumpen, hydraulische und pneumatische Anlagen. Von **R. Vater** 177
Wachtel, Alfred, Anwendung der Graphostatik im Maschinenbau, mit besonderer Berücksichtigung der statisch bestimmten Achsen und Wellen. Von **R. Vater** 176
Walther, Lehr- und Übungsbuch der Geometrie für Unter- und Mittelstufe. Von **E. Kullrich** 236
Wedding, H., Das Eisenhüttenwesen. Von **A. Rotth** 277
Wegner-Dallwitz, Die Explosionsgasturbine als Reaktionsturbine (als einstufiger Schnellläufer) in Theorie und Konstruktion. Von **R. Vater** . . 357
Wehner, H., Über die Kenntnis der magnetischen Nordweisung im frühen Mittelalter. Von **Ad. Schmidt** 187
Weinbaum, O., Die Spiegelung einer unendlichen Ebene in einem zu ihr senkrechten elliptischen Zylinder. Von **G. Wallenberg** 74
Weinstein, B., Die philosophischen Grundlagen der Wissenschaften. Von **P. Johannesson** 252
Weitbrecht, W., Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Von **E. Jahnke** 273
Wieleitner, Heinrich, Theorie der ebenen algebraischen Kurven höherer Ordnung. Von **E. Lampe** 235
Wilda, Hermann, Die Dampfturbinen, ihre Wirkungsweise und Konstruktion. Von **R. Vater** 176
Wiltz, Mathematische Unterrichtsbriefe. Von **H. Samter** 185
Winter, Wilhelm, Stereometrie. Von **E. Kullrich** 281

Digitized by Google

Seite

Young, W. H., and Young, Grace Chisholm, The theory of sets of points. Von **A. Schoenflies** 333
Zahikjanz, Gabriel, Die Theorie, Berechnung und Konstruktion der Dampfturbinen. Von **R. Vater** 175
Zenneck, J., Elektromagnetische Schwingungen und drahtlose Telegraphie. Von **E. Aschkinaß** 171
Zetzsche, Ed., Ebene und räumliche Geometrie. Von **E. Kullrich** 58
Zimmermann, H., Rechentafel nebst Sammlung häufig gebrauchter Zahlenwerte. Von **E Jahnke** 256
Zühlke, P., Ausführung elementargeometrischer Konstruktionen bei ungünstigen Lageverhältnissen. Von **H. Samter** und **E. Kullrich** . . 183. 284

Vermischte Mitteilungen.

1. Aufgaben und Lehrsätze. Lösungen.

A. Aufgaben und Lehrsätze. **191—226.** Von **F. Boegehold, P. Epstein, H. Fillzer, W. Jänichen, G. Kober, E. Köstlin, J. Krug, O. Meißner, W. F. Meyer, F. J. Müller, J. Rose, I. Schur, P. Stäckel, A. Wendler, A. Wieferich, H. Wieleitner** 84, 190, 285, 361

B. Lösungen: Zu **14** (E. N. Barisien) von cand. math. **W. Gaedecke** . . 286
Zu **15** (E. N. Barisien) von cand. math. **W. Gaedecke** . . 85
Zu **17** (C. A. Laisant) von cand. math. **W. Gaedecke** . . . 191
Zu **40** (O. Stolz) von cand. math. **W. Gaedecke** und **E. Lampe** 286
Zu **47** (O. Stolz) von cand. math. **W. Gaedecke** 87
Zu **54** (E. Lampe) von stud. math. **J. Krug** und **E. Lampe** 87
Zu **76** (W. Fr. Meyer) von cand. math. **W. Gaedecke** und **E. Lampe** 88
Zu **156** (O. Meißner) von stud. math. **J. Krug** 89
Zu **173** (G. Kober) von stud. math. **A. Wieferich** 91
Zu **177** (W. Fr. Meyer) von **W. Stegemann** 192
Zu **180** (G. Kober) von **W. Stegemann.** (Mit 1 Figur.) . . 91
Zu **182** (H. Wieleitner) von stud. math. **J. Krug, C. Hoffmann, W. Stegemann, A. Baruch, H. Wieleitner** und **O. Degel** 287
Zu **188** (H. Wieleitner) von **C. Hoffmann, H. Wieleitner, W. Stegemann** und **O. Degel** 367
Zu **184** (G. Kober) von **H. Wieleitner** und **W. Stegemann** 195
Zu **186** (W. Fr. Meyer) von **G. Berkhan** 196
Zu **187** (G. Kober) von **E. Köstlin** und **G. Kober** 291
Zu **189** (P. Stäckel) von **A. Baruch, G. Berkhan,** stud. ing. **G. Bühle, E. Stamm, W. Lorey, E. Köstlin,** stud. math. **J. Braunschweiger** und **W. Groß** 197

2. Anfragen und Antworten. (Vacat.)

3. Kleinere Notizen.

Eine fernere Verallgemeinerung der Aufgaben **145** (P. Epstein) und **165** (F. Schlegel). Von **F. Boegehold** 301
Eine elementare Herleitung für das Keplersche Gesetz von der Gestalt der Bahn. Von **H. Dörrie.** (Mit 3 Figuren.) 104
A propos d'un article de M. H. Bateman. Von **L. Godeaux** 370
Konstruktionen des Krümmungskreises der geraden Strophoide. Von **O. Gutsche.** (Mit 2 Figuren.) 197
Erweiterung des Näherungsverfahrens des Nicolaus v. Cusa zur Streckung und Teilung von Kreisbogen. Von **H. Hergesell.** (Mit 3 Figuren.) . 202

Digitized by Google

Seite

Über die Zahlen der Form $a^{p-1}-1$, wenn p eine Primzahl. Von **H. Hertzer** 107

Das regelmäßige Vierunddreißig-Eck. Von **K. Hunrath.** (Mit 4 Figuren.) 92

Bemerkung zu der Notiz in (3) **13**, 92. Von **K. Hunrath** 206

Der Schwerpunkt des Parabelbogens. Von **G. Kober** und **E. Lampe** . . 110

Der Fundamentalsatz der Algebra. Von **K. Kommerell** 99

Abwicklung eines Rotationsellipsoids auf die Rotationsfläche einer Sinuslinie. Von **M. Lagally** 102

Sur les polynomes ayant pour expression $x^n - \frac{n}{1}\cdot x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot x^{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot x^{n-3} + \cdots$, et sur d'autres polynomes plus généraux auxquels ils se rattachent. Von **E. Malo** 295

Richtigstellung einiger Bemerkungen des Herrn v. Stahl. Von **G. Rost** . 293

Die n-te Ableitung eines Quotienten. Von **E. Salkowski** 371

Über eine für die Dreiecksgeometrie wichtige Gleichung sechsten Grades. Von **J. Schmidt sen.** 108

4. Bei der Redaktion eingegangene Bücher 111. 207. 302. 373

5. Berichtigungen 304

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

Herausgegeben vom Vorstande der Gesellschaft.

57. Sitzung am 18. Dezember 1907 . . . . . 7, 19

58. „ „ 29. Januar 1908 . . . . . „ 19

59. „ „ 26. Februar 1908 . . . . . „ 29

60. „ „ 25. März 1908 . . . . . „ 29

61. „ „ 29. April 1908 . . . . . „ 77

62. „ „ 27. Mai 1908 . . . . . „ 77

63. „ „ 24. Juni 1908 . . . . . „ 89

Einige Aufgaben aus meinen Übungsstunden. Von **E. Lampe** 7, 63

Über einige Ungleichungen. Von **L. Lewent** . . . . . „ 95

Über Differentiation mit komplexem Index und ihre Beziehungen zur hypergeometrischen Funktion. Von **P. Lindner** . . . . . „ 77

Über das Auflösungsproblem im logischen Klassenkalkul. Von **L. Löwenheim** . . . . . „ 89

Schraubenlinien und Loxodromen. Von **E. Salkowski** . . . . . „ 83

Die Nullstellen der hypergeometrischen Funktion. Von **P. Schafheitlin.** „ 19

Bemerkung zu dem Vortrage: Die Nullstellen der hypergeometrischen Funktion. Von **P. Schafheitlin** . . . . . „ 88

Beiträge zur Analysis situs. Von **E. Steinitz** . . . . . „ 29

Beiträge zur Theorie der linearen Differenzengleichungen. Von **G. Wallenberg** . . . . . „ 50

Bemerkung zum vorstehenden Vortrage. Von **G. Wallenberg** . . . . . „ 101

Mitglieder-Verzeichnis . . . . . „ 102

Digitized by Google

ARCHIV
DER MATHEMATIK UND PHYSIK

MIT BESONDERER RÜCKSICHT AUF DIE BEDÜRFNISSE
DER LEHRER AN HÖHEREN UNTERRICHTSANSTALTEN.

GEGRÜNDET 1841 DURCH J. A. GRUNERT.

DRITTE REIHE.

MIT ANHANG:
SITZUNGSBERICHTE DER BERLINER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT.

HERAUSGEGEBEN
VON

E. LAMPE
IN BERLIN

W. FRANZ MEYER
IN KÖNIGSBERG I. PR.

E. JAHNKE
IN BERLIN

13. BAND. 1. HEFT

MIT 9 TEXTFIGUREN

AUSGEGEBEN AM 19. MÄRZ 1908

LEIPZIG UND BERLIN.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1908.

☞ Generalregister zum Archiv der Mathematik und Physik, II. Reihe, Band 1—17, zusammengestellt von E. Jahnke. Mit einem Bildnis und Biographie R. Hoppes. [XXXI u. 514 S.] gr. 8. 1901. geh. n. 36k. 6.—

ARCHIV DER MATHEMATIK UND PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN VON E. LAMPE, W. FRANZ MEYER UND E. JAHNKE.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASSE 3.

☞ Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Rezensionsexemplare u. s. w.) sind an den geschäftsführenden Redakteur:

Prof. Dr. E. Jahnke, Berlin W 15, Pariserstraße 36

zu richten. Sie nehmen aber auch Geheimer Regierungsrat Prof. Dr. E. Lampe in Berlin W 15, Fasanenstraße 64, und Prof. Dr. W. Franz Meyer in Königsberg i. Pr., Marsaunenhof, Hersog Albrecht Allee 27, Sendungen für die Redaktion an.

☞ Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich von größeren Aufsätzen 30 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen, Mitteilungen, Rezensionen u. s. w. 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

☞ Jeder Band des Archivs umfaßt 24 Druckbogen in 4 Heften und kostet 16 Mark, jährlich sollen nicht mehr als 6 Einzel-Hefte ausgegeben werden. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

Die Redaktion ersucht die Herren Autoren, in ihrem eigenen Interesse den Umfang der für das Archiv bestimmten Manuskripte nach Möglichkeit einschränken zu wollen, da nur solche geringen Umfanges Aussicht haben, in nächster Zeit abgedruckt zu werden. Die Redaktion teilt ferner mit, daß sie sich durch den Umfang des vorliegenden Manuskriptenmaterials für die nächste Zeit verhindert sieht, Inauguraldissertationen in extenso ins Archiv aufzunehmen.

INHALT DES VORLIEGENDEN HEFTES.

Seite

Über die Entwickelung binärer Formen mit mehreren Variabeln. Von W. Godt in Lübeck 1

Der Brocardsche Kreis des harmonischen Vierecks als Grenzfall von sechs Siebenpunktkreisen. Von Ernst Eckhardt in Homburg v. d. Höhe. Mit 1 Figur . 12

Über zweifache Flächenpunkte. Von Otto Biermann in Brünn 23

Ein Satz über Vielecke. Von K. Petr in Prag 29

Über den Hadamardschen Determinantensatz. Von Ernst Fischer in Brünn . . 32

Über das Minimum des Integrals $\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx$. Von A. Wiman in Upsala 41

The tangent planes which can be drawn to an algebraic surface from a multiple line. By H. Bateman, Cambridge 48

Rezensionen. Von L. Heffter, J. Herzog, E. Jahnke, L. Krüger, E. Kullrich, E. Müller, E. Netto, E. Pringsheim, H. Samter, P. Schafheitlin, H. E. Timerding, G. Wallenberg, H. Wieleitner, P. Zühlke 52

Kistner, Geschichte der Physik. Von H. Samter. S. 52. — Hochheim, A., Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene. Von P. Zühlke. S. 52. — Mellor, J. W., Höhere Mathematik für Studierende der Chemie und Physik und verwandter Wissensgebiete. Von E. Jahnke. S. 53. — Hyde, E. W., Grassmann's space analysis. Von E. Jahnke. S. 54. — Grimsehl, E., Die Ziele und Methoden des physikalischen Unterrichts. Von E. Kullrich. S. 54. — Rühlmann, Logarithmisch-trigonometrische und andere für Rechner nützliche Tafeln. Albrecht, Logarithmisch-trigonometrische Tafeln mit fünf Dezimalstellen. Von E. Kullrich. S. 55. — Schmidt, Arnold, Beiträge zum mathematischen Unterricht. Von E. Kullrich. S. 56. — Holzmüller, G., Die Planimetrie für das Gymnasium im Anschluß an die preußischen Lehrpläne von 1901 methodisch bearbeitet. Von E. Kullrich. S. 56. — Schwering, K. und Krimphoff, W., Ebene Geometrie. Glinzer, E., Lehrbuch der Elementargeometrie. Von E. Kullrich. S. 56. — Schwering, K., Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik für höhere Lehranstalten. Fenkner, H., Arithmetische Aufgaben. Von E. Kullrich. S. 57. — Sturm, A., Geschichte der Mathematik. Berkley, Th., Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik. Von E. Kullrich. S. 57. — Hartwig, O., Das Berechtigungsbedürfnis und seine Befriedigung durch deutsche Universitäten. Von E. Kullrich. S. 58. — Lanner, A., Die

(Fortsetzung auf der 3. Seite des Umschlags.)

Über die Entwicklung binärer Formen mit mehreren Variabeln.

Von W. Godt in Lübeck.

1. Ist f eine Form, die mehrere Paare binärer Variabeln linear enthält, so ist symbolisch

$$f = a_x b_y c_z d_u \cdots$$

Werden alle Variabelnpaare in f durch $\xi_1 \xi_2$ ersetzt, so entsteht die Form $a_\xi b_\xi c_\xi d_\xi \cdots$ von der n^{ten} Ordnung in ξ. In diese führen wir durch Polarenbildung die Variabeln $x, y, z, u \cdots$ ein und erhalten die Polarform II, wobei also

$$n!\, II = \sum a_{x'} b_{y'} c_{z'} d_{u'} \cdots,$$

wenn unter $x'y'z'u' \cdots$ eine Permutation von $xyzu \cdots$ verstanden und die Summe über sämtliche Permutationen erstreckt wird.

Demnach ist

$$n!\,(f - II) = \sum (a_x b_y c_z d_u \cdots - a_{x'} b_{y'} c_{z'} d_{u'} \cdots).$$

2. Betrachten wir einen Term der Summe und nehmen z. B. an, er laute im besonderen Fall

$$(a_x b_y c_z d_u e_v - a_y b_v c_x d_u e_z).$$

Ein Variabelnpaar, z. B. z, findet sich im ersten Gliede beim Symbol c, im zweiten dagegen bei e. Wir bilden nun eine Form dadurch, daß wir im ersten Gliede die Variabeln bei c und e vertauschen, also die Form $a_x b_y c_v d_u e_z$, und verwandeln den Term in

$$\begin{aligned}(a_x b_y c_z d_u e_v - a_x b_y c_v d_u e_z) + (a_x b_y c_v d_u e_z - a_y b_v c_x d_u e_z)\\ = (zv)(ce) a_x b_y d_u + (a_x b_y c_v d_u e_z - a_y b_v c_x d_u e_z).\end{aligned}$$

Wir haben dadurch den Term in zwei Teile zerlegt, von denen der eine den Klammerfaktor (zv) besitzt, während der andere ein Term von gleicher Art wie der ursprüngliche ist, bei dem aber die beiden Glieder nun in einem symbolischen Faktor mehr übereinstimmen als vorher.

Digitized by Google

153.9
1/1

Behandeln wir diesen in gleicher Weise und fahren so fort, so wird der ursprüngliche Term in ein Aggregat von Gliedern aufgelöst, die sämtlich einen Klammerfaktor haben.

3. Wir können also die Form f derart entwickeln, daß sie in ein Aggregat übergeht, dessen erstes Glied Polare einer einfach binären Form ist und dessen übrige Glieder sämtlich je einen Klammerfaktor besitzen. Die Formen, mit denen diese Klammerfaktoren multipliziert sind, können wir dann wieder derselben Umgestaltung unterziehen und diesen Prozeß bis zum Ende durchführen.

Sind die Variabeln $xyz\cdots$ teilweise oder alle einander gleich, so ändert sich nichts weiter, als daß wir Glieder der Entwicklung mehrfach zusammenziehen können.

So erhalten wir den Satz: Jede binäre Form mit mehreren Reihen Veränderlicher $x, y, z, u\cdots$ kann in eine Summe von Polaren entwickelt werden, multipliziert mit Produkten von (xy), (xz), $(yz)\cdots$[1])

4. Wir wollen nun diese Entwicklung genauer betrachten. Wir ordnen die Glieder nach der Anzahl der Klammerfaktoren und fassen diejenigen, bei denen diese Anzahl gleich ist, z. B. 2 beträgt, zu einer Schicht, der zweiten, zusammen. Wir legen den Variabeln eine beliebig, aber fest gewählte Rangordnung bei, etwa $x, y, z, u\cdots$ und nennen jedes Paar höher als alle vorangehenden.

Wir setzen in jedem Klammerfaktor das niedere Variabelnpaar voran, benutzen also z. B. nicht (uy) sondern (yu). Wir legen den Klammerfaktoren eine Rangordnung bei und nennen den höher, bei dem das zweite Variabelnpaar höher ist, oder, wenn dies gleich wäre, den, bei dem das erste Paar höher ist. Die Rangordnung der Klammerfaktoren ist demnach: (xy), (xz), (yz), (xu), (yu), $(zu)\cdots$

Wir ordnen in jedem Schichtglied die Klammerfaktoren nach der Höhe.

Wir ordnen die Schichtglieder zunächst nach der Höhe des ersten Klammerfaktors, weiter nach der des zweiten und so fort. Dann ist die Schicht in völlig bestimmter Weise geordnet. Glieder mit gleichem Klammerprodukt ziehen wir endlich, wie dies wegen der Natur der Polaren gestattet ist, je in eins zusammen.

5. Wir reduzieren nun die Schichten. Kommt bei einem Schichtglied in der Polare ein Variabelnpaar vor, das niedriger ist, als das vordere Paar eines Klammerfaktors, so ersetzen wir es durch die Differenz zweier Schichtglieder, die in der Rangordnung *vor*angehen. Es

1) Vgl. Gordan, Vorlesungen über Invariantentheorie, herausgegeben von Kerschensteiner, Leipzig 1887, Bd. II, pag. 24—32.

Digitized by Google

komme z. B. neben einem Klammerfaktor (yu) vor der symbolische Faktor a_x, so benutzen wir die Identität

$$(yu)a_x = (xu)a_y - (xy)a_u.$$

Kommt bei einem Schichtglied ein Klammerfaktor vor, dessen vorderes Paar niedriger ist als bei einem ihm vorangehenden Faktor, so ersetzen wir dies durch zwei Schichtglieder, die in der Rangordnung *voran*gehen.

Es komme z. B. neben (yz) vor (xu), so benutzen wir die Identität

$$(yz)(xu) = (xz)(yu) - (xy)(zu).$$

Beide Umformungen wenden wir an, so oft es möglich ist, und reduzieren dadurch eine Schicht auf Glieder, die Hauptglieder genannt werden mögen.

6. Ein Hauptglied besitzt also folgende beiden Eigenschaften:

a) das niedrigste Variabelnpaar, das in der Polare vorkommt, ist ebenso hoch oder höher als das höchste vordere Paar irgend eines Klammerfaktors,

b) das vordere Paar jedes Klammerfaktors ist ebenso hoch oder höher als die vorderen Paare der vorangehenden Faktoren.

Sind daher die hinteren Paare der Faktoren eines Klammerproduktes bekannt, so kann man die vorderen Paare hinzuschreiben, indem man die noch verfügbaren Paare der Rangordnung nach verwendet.

7. Ein Beispiel wird die Nrn. **5** und **6** noch besser verdeutlichen. Es sei zu entwickeln die Form $a_x^2 b_y^2 c_z^2 d_u^2$. Wir stellen die volle Reihe der möglichen Glieder der dritten Schicht auf und geben zugleich die Reduktion auf Hauptglieder an. Dabei dürfen wir die Polaren, deren Form ja aus dem Klammerprodukt folgt, unterdrücken und lassen der Einfachheit wegen auch die Klammern fort.

1) $xy\ xy\ yz$		A
2) $xy\ xy\ yu$		B
3) $xy\ xy\ zu$	$2-1$	$B-A$
4) $xy\ xz\ yz$		C
5) $xy\ xz\ yu$		D
6) $xy\ xz\ zu$	$5-4$	$D-C$
7) $xy\ yz\ yz$	$4-1$	$C-A$
8) $xy\ yz\ xu$	$5-3$	$D-B+A$
9) $xy\ yz\ yu$	$5-2$	$D-B$
10) $xy\ yz\ zu$	$6-3$	$D-C-B+A$

Digitized by Google

11) $xy\,xu\,yu$		E
12) $xy\,xu\,zu$	$11-8$	$E-D+B-A$
13) $xy\,yu\,yu$	$11-2$	$E-B$
14) $xy\,yu\,zu$	$13-9$	$E-D$
15) $xy\,zu\,zu$	$12-6$	$E-2D+C+B-A$
16) $xz\,xz\,yu$		F
17) $xz\,yz\,xu$	$16-6$	$F-D+C$
18) $xz\,yz\,yu$	$16-5$	$F-D$
19) $xz\,xu\,yu$		G
20) $xz\,xu\,zu$	$19-17$	$G-F+D-C$
21) $xz\,yu\,yu$	$19-5$	$G-D$
22) $xz\,yu\,zu$	$20-5$	$G-F$
23) $yz\,yz\,xu$	$17-8$	$F-2D+C+B-A$
24) $yz\,yz\,yu$	$18-9$	$F-2D+B$
25) $yz\,xu\,xu$	$19-12$	$G-E+D-B+A$
26) $yz\,xu\,yu$	$19-11$	$G-E$
27) $yz\,xu\,zu$	$20-12$	$G-F-E+2D-C-B+A$
28) $yz\,yu\,yu$	$21-13$	$G-E-D+B$
29) $yz\,yu\,zu$	$22-14$	$G-F-E+D$

8. Wir suchen die Anzahl der Hauptglieder auf bequeme Weise zu ermitteln.

Ist die Anzahl der Variabelnpaare $x, y, z \cdots$ gleich ν, die Ordnung, in der sie vorkommen, bez. $n_1, n_2, n_3 \cdots n_\nu$, so wollen wir die Anzahl der Hauptglieder in der k^{ten} Schicht bezeichnen mit $N(n_1, n_2 \cdots n_\nu; k)$.

Wir sondern die Gesamtheit der Hauptglieder einer Entwicklung in zwei Teile, P und Q. Zu P rechnen wir alle Hauptglieder, die den Klammerfaktor (xy) haben; zu Q alle übrigen. Nehmen wir von allen Hauptgliedern in P den ersten Klammerfaktor (xy) fort, so bleiben vollständig und geordnet die Hauptglieder der Entwicklung einer Form, die die beiden niedrigsten Variabelnpaare x und y nur noch zu den Ordnungen $n_1 - 1$ und $n_2 - 1$ enthält. Es ist also die Anzahl der Hauptglieder k^{ter} Schicht, die sich in P vorfinden, gleich $N(n_1 - 1, n_2 - 1, n_3 \cdots; k - 1)$. Setzen wir bei allen Hauptgliedern, die wir in Q aufgenommen haben, y statt x ein, so erhalten wir vollständig und geordnet die Hauptglieder der Entwicklung einer Form, die nur die $\nu - 1$ Variabelnpaare $y, z \cdots$ enthält, davon nun aber die niedrigste zu einer höheren, nämlich zur $(n_1 + n_2)^{\text{ten}}$ Ordnung. Es ist

Digitized by Google

also die Anzahl der Hauptglieder k^{ter} Schicht in $Q = N(n_1 + n_2, n_3 \cdots n_r; k)$. Daher haben wir die Rekursionsformel:

$$N(n_1, n_2, n_3 \cdots n_r; k) = N(n_1 - 1, n_2 - 1, n_3 \cdots n_r; k - 1) + N(n_1 + n_2, n_3 \cdots n_r; k).$$

Für das Beispiel in Nr. 7 erhalten wir:

$$N(2, 3, 2, 2; 3) = N(1, 2, 2, 2; 2) + N(5, 2, 2; 3).$$

9. Den Hauptgliedern haftet eine Willkür an, insofern sie von der nach Nr. 4 willkürlich gewählten Rangordnung der Variabeln abhängen. Wird eine andere Rangordnung zugrunde gelegt, so erhalten wir andere Hauptglieder. Nach Nr. 5 können wir dann aber nicht nur diese neuen Hauptglieder durch die alten, sondern auch die alten durch die neuen eindeutig und linear mit ganzzahligen Koeffizienten ausdrücken, demnach ist die Anzahl beide Male dieselbe: die Anzahl der Hauptglieder ist von der gewählten Rangordnung unabhängig, sie ist eine symmetrische Funktion der Ordnungen der Variabeln.

10. Demnach können wir den Inhalt von Nr. 8 auch so formulieren. Um die Anzahl und Schichtverteilung der Hauptglieder einer Entwicklung zu erhalten, können wir erstens diejenige aufsuchen für eine Form, in der zwei verschiedene Variabeln durch eine ersetzt sind, zweitens diejenige für eine Form, in der die beiden Variabeln noch verschieden, aber je um eine Ordnung erniedrigt sind, und dann zu der ersten Verteilung die zweite, nachdem sie um eine Schicht vorgerückt ist, addieren.

Beispiel. Gesucht die Verteilung für die Form $a_x^4 b_y^3 c_z^2 d_u$. Die Verteilungen für $b_y^1 c_z^2 d_u$ und $a_x^3 b_y^2 c_z^1 d_u$

sind:	1,	2,	2,	1,	0,	0
und		1,	3,	5,	5,	2,
die gesuchte ist:	1,	3,	5,	6,	5,	2.

Anders angeordnet: die Verteilungen für $a_x^4 c_z^2 d_u$ und $a_x^4 b_y^2 c_z d_u$

sind:	1,	2,	2,	2,	2,	1
und		1,	3,	4,	3,	1,
die gesuchte ist:	1,	3,	5,	6,	5,	2.

Eine vollständige Tafel der Verteilungen für alle Formen ist hiernach leicht aufzustellen; verdrießlich ist es aber, diese Methode auf eine einzelne Form anzuwenden.

Digitized by Google

11. Bezeichnen wir mit $C(n_1, n_2 \cdots n_\nu)$ die Gesamtanzahl aller Koeffizienten, die vermöge der Polarenfaktoren in allen Gliedern einer Entwickelung nach Hauptgliedern zusammen enthalten sind, so gilt nach Nr. 8 die Relation:

$$C(n_1, n_2, n_3 \cdots n_\nu) = C(n_1 + n_2, n_3 \cdots n_\nu) + C(n_1 - 1, n_2 - 1, n_3 \cdots n_\nu).$$

Angenommen nun, wir erhielten die rechtsstehenden C nach der Regel, daß sie gleich dem Produkte aller um 1 vermehrten Ordnungszahlen wären, so hätten wir

$$\begin{aligned} C(n_1, n_2, n_3 \cdots n_\nu) &= (n_1 + n_2 + 1)(n_3 + 1) \cdots (n_\nu + 1) \\ &\quad + n_1 \cdot n_2 \cdot (n_3 + 1) \cdots (n_\nu + 1) \\ &= (n_1 + 1)(n_2 + 1)(n_3 + 1) \cdots (n_\nu + 1), \end{aligned}$$

also gehorchte $C(n_1, n_2 \cdots n_\nu)$ der gleichen Regel.

Nun können wir aber durch wiederholte Anwendung der Relation absteigen bis zu Symbolen $C(n)$, die nur ein Argument enthalten. Für $C(n)$ gilt aber die Regel als $C(n) = n + 1$ evident, also ist sie allgemeingültig.

Wußten wir also bisher, daß wir eine Polarenentwicklung auf nicht mehr als die Hauptglieder reduzieren können, so sehen wir nun, daß die Reduktion damit auch abgeschlossen ist, und daß die noch in den Polarfaktoren enthaltenen Koeffizienten der Anzahl nach mit der Anzahl der Koeffizienten der ursprünglichen Form übereinstimmen, d. h. daß sie völlig unabhängig voneinander sind.

12. Wir wollen annehmen, es seien auf irgendwelchem Wege für dieselbe Form zwei Entwicklungen nach Hauptgliedern gefunden, und es sei beide Male dieselbe Rangordnung der Variabeln zugrunde gelegt. Wir wollen prüfen, wieweit sie voneinander verschieden sein können.

Wir zerlegen beide Entwicklungen nach 8 in zwei Teile. Wir setzen nun $x = y$. Dann verschwinden die ersten Teile, also müssen die zweiten Teile in ihrer jetzigen Form insgesamt identisch sein. Nehmen wir an, es sei bewiesen, daß dies nur stattfinden könne, wenn sie Glied für Glied völlig übereinstimmen, so folgt aus der Natur der Polaren, daß sie auch schon identisch waren, ehe $x = y$ gesetzt wurde. Es müssen also auch die ersten Teile im ganzen genommen übereinstimmen. Wir trennen hier bei beiden den gemeinsamen Faktor (xy) ab und nehmen an, für die übrig bleibenden Entwicklungen sei auch nachgewiesen, daß sie insgesamt nicht übereinstimmen können, ohne Glied für Glied identisch zu sein. Wir sehen also, daß die beiden angenommenen Entwicklungen identisch sein müssen, wenn dasselbe von

Digitized by Google

den einfacheren, auf die wir bei der Zerlegung kamen, gilt. Nun können wir aber durch wiederholte Zerlegung absteigen bis zu Formen mit nur einem Paare von Variabeln; für diese gilt der Satz aber evident und ist mithin allgemeingültig. Wir haben also die wichtige Erkenntnis gewonnen: die Entwicklung einer Form nach Hauptgliedern ist, wenn die Rangordnung der Variabeln einmal festgesetzt ist, eindeutig in dem Sinne, daß zwei Entwicklungen, die dieselbe Form darstellen, Glied für Glied identisch sind, oder: ist eine Form identisch null, so sind in ihrer Entwicklung nach Hauptgliedern die sämtlichen Polarfaktoren jeder einzeln identisch null.

13. Es sei eine Form mit den Variabeln x, y, z nach Hauptgliedern entwickelt. Die Koeffizienten seien nun Formen mit u, wir wollen darauf Rücksicht nehmen und die Entwicklung auch auf die Variabeln u ausdehnen. Ein einzelnes Glied der schon geleisteten Entwicklung hat neben den Klammerfaktoren eine Form, die rücksichtlich x, y, z Polare ist, aber nicht rücksichtlich u. Setzen wir in demselben statt x, y und z die Variabeln ξ ein, so erhalten wir die Form $a_\xi^p b_u^q$. Entwickeln wir diese nach ξ und u und führen nachträglich durch Polarenbildung die Variabeln x, y, z wieder ein, so haben wir die Polarenentwicklung des fraglichen Faktors nach x, y, z und u. Die Glieder der Entwicklung nach ξ und u haben die Form $(\xi u)^n c_\xi^{p-n} c_u^{q-n}$. Führen wir hier durch die Polarenbildung nach ξ die Variabeln x, y und z wieder ein, so entsteht ein Aggregat von Gliedern, deren jedes ein Produkt ist aus n Klammerfaktoren und einer reinen Polare in x, y, z und u. Multiplizieren wir diese mit dem Klammerprodukt, das in der anfänglichen Entwicklung davor stand, so haben wir alle Glieder, die das Glied der schon geleisteten Entwicklung nach x, y und z zu der Polarenentwicklung, die auch u mit einbezieht, beiträgt, aber diese sind im allgemeinen keine Hauptglieder. Ist nun ein solches Glied wirklich kein Hauptglied, so kann dies nur daran liegen, daß in einem oder mehreren Klammerfaktoren vor u eine höhere Variable steht als bei einem symbolischen Faktor, also daß z. B. (zu) vorkommt neben a_y. In einem solchen Fall formen wir um nach

$$(zu)\,a_y = (yu)\,a_z - (yz)\,a_u$$

und setzen dies fort, bis nur Hauptglieder übrig bleiben. Ebenso verfahren wir mit allen anderen Gliedern, die in der Entwicklung nach x, y, z vorhanden sind, und erhalten dadurch die Entwicklung nach Hauptgliedern für x, y, z und u, da ja zwei verschiedene Hauptglieder der niederen Entwicklung nach x, y, z sicherlich verschiedene Haupt-

Digitized by Google

glieder in der Entwicklung nach x, y, z und u liefern müssen wegen der Verschiedenheit der Klammerprodukte, die dort schon vorhanden waren.

14. Hiernach gestaltet sich die vollständige Bildung der für die Hauptglieder maßgebenden Klammerprodukte für das Beispiel in Nr. **10**, wie folgt:

Entwicklung nach x und y

$$1 \quad xy \quad xyxy \quad xyxyxy;$$

für die Entwicklung auch nach z kommen hinzu

$$xz \quad xyxz \quad xyxyxz \quad xyxyxyxz$$
$$xzxz \quad xyxzxz \quad xyxyxzxz,$$

für die Entwicklung auch nach u kommen hinzu

$$xz \quad xyxu \quad xyxyxu \quad xyxyxyxu \quad xyxyxyxzxu$$
$$xzxu \quad xyxzxu \quad xyxyxzxu \quad xyxyxzxzyu$$
$$xzxzxu \quad xyxzxzxu.$$

Fügen wir noch zu jedem Klammerprodukt den betreffenden Polarenfaktor hinzu, so haben wir die vollständige Entwicklung nach Hauptgliedern.

Wie wir Anzahl und Verteilung der Hauptglieder rasch finden, zeige das leicht verständliche Schema für $a_x^8\, b_y^4\, c_z^5\, d_u^3$

1	1	1	1	1	—	—				
	1	1	1	1	1	—				
		1	1	1	1	1	—			
			1	1	1	1	1			
				1	1	1	1	1		
					1	1	1	1		
1	2	3	4	5	5	4	3	2		
	1	2	3	4	5	5	4	3	2	
		1	2	3	4	5	5	4	3	
			1	2	3	4	5	5	4	3
1	3	6	10	14	17	18	17	14	9	3

In der Tat bestätigt eine Stichprobe, daß die Anzahl der Koeffizienten in der angedeuteten Entwicklung 1080 beträgt, wie es auch sein muß.

Digitized by Google

Für die Rangordnung $u\ z\ y\ x$ würde das Schema folgen:

1	1	1	1	—						
	1	1	1	1						
		1	1	1	1					
			1	1	1					
				1	1	1				
1	2	3	4	4	3	1				
	1	2	3	4	4	3				
		1	2	3	4	4	3			
			1	2	3	4	4			
				1	2	3	4	4		
					1	2	3	4		
						1	2	3	4	
							1	2	3	
								1	2	3
1	3	6	10	14	17	18	17	14	9	3

15. Wir wollen eine Form f mit mehreren Variabelnpaaren betrachten, die die Eigenschaft besitzt, ungeändert zu bleiben, wenn auf die Variabeln die Substitutionen einer Gruppe G ausgeübt werden. Wir entwickeln die Form nach Hauptgliedern und erhalten

$$f = H_0 + H_1 + H_2 + \cdots$$

Wir üben auf sämtliche Glieder die Substitutionen von G aus, ihre Anzahl sei n, und bezeichnen die Summe der aus H_i entspringenden Glieder mit $\Sigma_G H_i$; dann wird

$$n \cdot f = \Sigma_G H_0 + \Sigma_G H_1 + \Sigma_G H_2 + \cdots$$

Die Summen rechts bestehen nun nicht mehr aus Hauptgliedern; wir reduzieren aber jede einzelne für sich auf Hauptglieder und erhalten sie so ausgedrückt durch Aggregate von Hauptgliedern mit ganzzahligen Koeffizienten, wobei die Polarfaktoren in jeder Summe Polaren derselben Urform sind.

Nach Nr. **12** können wir nun an dieser Form der Summe mit Leichtigkeit entscheiden, ob in derselben Schicht zwischen ihnen Identitäten bestehen, und eine kleinste Zahl auswählen, durch die sich alle übrigen linear mit rationalen Koeffizienten ausdrücken lassen.

16. Beispiel. Die Form sei $f = a_x^4 b_y^4 c_z^4$ und besitze die Eigenschaft, bei zyklischer Vertauschung der Variabeln ungeändert zu bleiben. Die Gruppe G enthält also drei Substitutionen (die identische natürlich mitgezählt). In der 0ten Schicht erhalten wir nur eine Summe, die

Digitized by Google

Polare von $\varphi_{12} = a_\xi^4 b_\xi^4 c_\xi^4$. In der 1ten Schicht erhalten wir nur eine Summe, die identisch verschwindet. In der 2ten Schicht erhalten wir zwei Summen, die reduzierbar sind auf eine, deren führendes Hauptglied das Klammerprodukt $(xy)^2$ hat. In der 3ten Schicht erhalten wir vier Summen, die auf zwei reduzierbar sind. Wir können dazu z. B. wählen die Summen mit den führenden Hauptgliedern, deren Klammerprodukte sind $(xy)^2(xz)$ und $(xy)(xz)^2$. In der 4ten Schicht erhalten wir fünf Summen, davon sind vier reduzierbar auf die, deren führendes Hauptglied $(xy)^4$ ist; die 5te ist identisch Null. In der 5ten und 6ten Schicht ist je nur eine Summe nötig resp. vorhanden. Wir finden demnach:

Ist eine binäre Form $a_x^4 b_y^4 c_z^4$ so beschaffen, daß sie bei zyklischer Vertauschung der Variabeln ungeändert bleibt, so läßt sie sich *eindeutig* entwickeln in der Form:

$$\Pi\varphi_{12} + \sum(xy)^2\,\Pi\varphi_8 + \sum(xy)^2(xz)\,\Pi\varphi_6 + \sum(xy)(xz)^2\,\Pi\varphi_6' + \sum(xy)^4\,\Pi\varphi_4 + \sum(xy)^2(xz)(yz)\,\Pi\varphi_2 + (xy)^2(yz)^2(xz)^2\varphi_0.$$

Hierin bedeuten φ_{12}, φ_8, φ_6, φ_6', φ_4, φ_2, φ_0 binäre Formen von den Ordnungen 12, 8, 6, ..., das Zeichen Π bedeutet, daß in diese Formen die Variabeln x, y, z durch Polarenbildung zu geeigneten Ordnungen einzuführen sind. Die Summen sind zu erstrecken über alle Glieder, die durch zyklische Vertauschung der Variabeln entstehen, sind also hier dreigliedrig.

Umgekehrt: Verstehen wir unter $\varphi_{12}, \varphi_8 \ldots$. usw. *beliebige* Formen von der 12ten, 8ten usw. Ordnung, so stellt obiger Ausdruck jedesmal eine Form mit obiger Eigenschaft dar. Dies Letzte ist ja evident.

17. Besonders wichtig ist der Fall, wo die in Nr. 15 mit G bezeichnete Gruppe alle Substitutionen der Variabeln umfaßt, oder wo die zu entwickelnde Form in den Variabeln symmetrisch ist. Wir finden dann, daß jede symmetrische Form mehrerer Variabelnpaare sich eindeutig entwickeln läßt in ein Aggregat der gedachten Art, bei dem die Urformen der Polaren völlig unabhängig von einander sind.

18. Beispiel. Ist die Form $a_x^4 b_y^4 c_z^4$ symmetrisch in x, y und z, so läßt sie sich eindeutig entwickeln in der Gestalt:

$$\Pi\varphi_{12} + \sum(xy)^2\,\Pi\varphi_8 + \sum(xy)^3\,\Pi\varphi_6 + \sum(xy)^4\,\Pi\varphi_4 + (xy)^2(yz)^2(xz)^2\varphi_0.$$

Hierin bedeuten φ_{12}, φ_8, φ_6, φ_4, φ_0 binäre Formen von den Ordnungen 12, 8, 6, 4, 0; das Zeichen Π bedeutet, daß in diese Formen durch Polarenbildung die Variabeln x, y und z zu geeigneten Ordnungen einzuführen sind; die Summen sind zu erstrecken über sämtliche Glieder,

Digitized by Google

die durch Permutation der Variabeln entstehen, sind also hier sechsgliedrig.

In der dritten Schicht hätten wir statt $\Sigma(xy)^3 \Pi\varphi_6$ auch wählen können $\Sigma(xy)^2(xz)\,\Pi\psi_6$.

19. Ein wichtiger Unterfall von Nr. **17** ist der, daß die $x, y, z \ldots$ Wurzeln einer binären Form sind und die zu entwickelnde Funktion eine Kovariante dieser Grundform darstellt. Dann lehrt uns Nr. **15** direkt auf einem bestimmten endlichen Wege für jede Gradordnung eine azygetische Gruppe von Formen auszusondern. Wollen wir endlich wissen, ob diese Formen selber durch niedere Formen nach dem Grade in den Koeffizienten der Grundform ausdrückbar sind, so brauchen wir nur alle möglichen Produkte aus niederen Formen zu bilden, um nach der angegebenen Methode die Entscheidung herbeizuführen.

20. Beispiel. Wir untersuchen die Kovarianten 6ten Grades und 6ter Ordnung einer kubischen Grundform. Sie enthalten natürlich nur Glieder 6ter Schicht. Hier gibt es 7 Hauptglieder. Die maßgebenden Klammerprodukte sind:

$$(xy)^6,\ (xy)^5(xz),\ (xy)^4(xz)^2,\ (xy)^3(xz)^3,\ (xy)^2(xz)^4,\ (xy)(xz)^5,\ (xz)^6.$$

Sind diese noch mit geeigneten Polaren multipliziert, die hier Produkte sind, so mögen die Hauptglieder $A, B \ldots G$ entstehen; es ist also z. B.

$$C = (xy)^4(xz)^2(\xi y)^2(\xi z)^4,$$

wenn die Variabeln der Kovariante mit ξ_1, ξ_2 bezeichnet werden.

Wir erhalten dann zunächst 7 Summen nach Nr. **15**. Reduzieren wir diese auf Hauptglieder, so erhalten wir die Koeffizienten der folgenden kleinen Tafel:

	G	F	E	D	C	B	A
1)	2	− 6	+ 15	− 20	+ 15	− 6	+ 2
2)	2	− 6	+ 15	− 20	+ 15	− 6	+ 2
3)	2	− 6	+ 9	− 8	+ 9	− 6	+ 2
4)			− 3	+ 6	− 3		
5)	1	− 3	+ 3	− 1	+ 3	− 3	+ 1
6)			− 3	+ 6	− 3		
7)			+ 1	− 2	+ 1		

Demnach sind nur zwei azygetische Formen vorhanden, als die wir 5) und 7) wählen können, d. h. jede Kovariante 6ten Grades und 6ter Ordnung einer kubischen Grundform ist eine lineare Verbindung aus:

$$(xy)^2(xz)^2(yz)^2(\xi x)^2(\xi y)^2(\xi z)^2, \quad \text{d. i. 7)}$$

Digitized by Google

und:

$$(xy)^3(xz)^3(\xi y)^3(\xi z)^3, \quad \text{d. i. } 5).$$

Ersichtlich ist die erstere Form in der üblichen Bezeichnung von Clebsch und Gordan Rf^2, die andere Δ^3 (abgesehen von Zahlenkoeffizienten). Da auch Q^2 vom 6ten Grad und 6ter Ordnung ist, so muß zwischen Rf^2, Δ^3 und Q^2 eine Syzygie bestehen, wie dies denn ja bekanntlich auch der Fall ist.

21. Im Vorstehenden ist in möglicher Kürze ein Verfahren entwickelt, dessen Anwendbarkeit sich ziemlich weit erstreckt. Man wird geneigt sein, demselben außerordentliche Weitläufigkeit bei der Anwendung vorzuwerfen. Einerseits ist es damit indessen nicht so schlimm, wie es zunächst aussieht; andrerseits liefert das Verfahren für seine immerhin nicht wegzuleugnende Weitläufigkeit tiefere Einsichten in die Theorie der Kovarianten, in die Theorie der symmetrischen Funktionen überhaupt, in die algebraische Auflösung der Gleichungen und in das Wesen des Gordanschen Faltungsprozesses; denn jedes Erzeugnis der Faltung stellt irgend eine Stufe in der Entwicklung einer Funktion nach Polaren dar, und endlich ist ein wesentlicher Teil unserer Überlegungen ohne weiteres auch auf die gewöhnliche symbolische Darstellung der Kovarianten nach Gordan anwendbar.

Lübeck, im November 1904.

Der Brocardsche Kreis des harmonischen Vierecks als Grenzfall von sechs Siebenpunktkreisen.

Von ERNST ECKHARDT in Homburg v. d. Höhe.

1. *Historisches.* — Im Jahre 1885 überreichte Tucker der mathematischen Gesellschaft in London eine Abhandlung[1]), in der er auf einige wichtige Eigenschaften der Kreisvierecke hinwies, bei denen die Rechtecke aus den gegenüberliegenden Seiten gleich sind.

Die Herren Mac Cay, J. Neuberg und A. Gob fügten eine Reihe neuer Eigenschaften und Sätze hinzu. Als Hauptresultat wurde ge-

1) Tucker: Some Properties of a Quadrilateral in a Circle, the Rectangles under whose Opposite Sides are equal. Erschien 1886 (Reprints from the Educational Times **44**, 125—135). — J. Neuberg: Sur le quadrilatère harmonique. Mathesis. 1885. — A. Gob: Cercles remarquables dans le quadrangle harmonique. Congrès de Marseille. 1891.

Digitized by Google

funden, daß in diesen sogenannten harmonischen Vierecken stets zwei Punkte O_1 und O_2 existieren, die in ähnlicher Weise wie die Brocardschen Punkte des Dreiecks erhalten werden, wenn man über den Seiten a, b, c, d ähnliche gleichschenklige Dreiecke konstruiert, deren Basiswinkel der Bedingung

$$\operatorname{ctg}^2\omega = 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\beta$$

genügt, wo α und β die Winkel A und B des Kreisvierecks sind.

Bezeichnet man die Spitzen der gleichschenkligen Dreiecke mit A_1, B_1, C_1, D_1, den Minimumpunkt des Vierecks mit G, den Mittelpunkt mit M, so wurde ferner ermittelt, daß die Punkte

$$O_1,\ O_2,\ G,\ M,\ A_1,\ B_1,\ C_1,\ D_1$$

nebst den Mittelpunkten der Diagonalen auf einem Kreise liegen, der Brocardscher Kreis genannt wird.

Diese beiden Resultate sind nun besondere Fälle einer Aufgabe über das *beliebige* Kreisviereck. Für das erste Resultat ist der Beweis schon in der unten angeführten Arbeit[1]) erbracht.

Aus derselben Abhandlung fließt auch der Beweis für das zweite Ergebnis.

2. *Zuordnung eines Paares ähnlicher Kreisvierecke zu dem gegebenen Kreisviereck.* — In der zuletzt genannten Arbeit wurde für ein beliebiges Kreisviereck zunächst folgende Eigenschaft festgestellt:

„Wenn man in den Ecken eines Kreisvierecks an den Seiten denselben Winkel ε in gleichem Sinne nach innen abträgt, so entstehen zwei dem ursprünglichen Viereck ähnliche Vierecke, sofern ε der Bedingung

$$\operatorname{ctg}\varepsilon = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4F}$$

genügt." Hierin sind a, b, c, d die Seiten CD, DA, AB, BC und F der Flächeninhalt des Vierecks.

Die zwei ähnlichen Kreisvierecke haben die aus der Figur zu ersehende Lage $PQRS$ und $P_1Q_1R_1S_1$. Ihre Bezeichnung ist in bezug auf das Viereck $ABCD$ so erfolgt, daß homologe Ecken an gleicher Stelle stehen.

Für die Seiten des Vierecks $PQRS$ wurde gefunden, je nachdem $ac \lessgtr bd$:

$$RS = a_1 = \frac{ac - bd}{+\sqrt{(ab + cd)^2 + (ac - bd)^2 + (ad + bd)^2}} \cdot a = \frac{\pm(ac - bd)\sin\varepsilon}{2F} \cdot a,$$

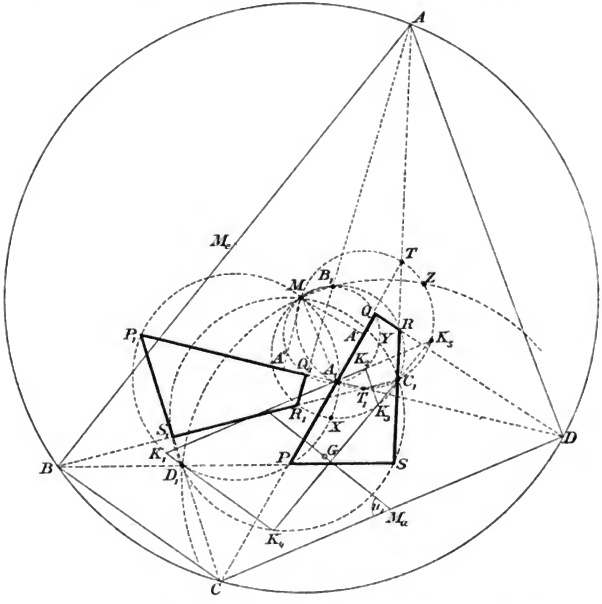
1) E. Eckhardt: Der Crelle-Brocardsche Winkel als besonderer Fall einer Aufgabe über das Kreisviereck. Zeitschrift für math. u. nat. Unterricht, **36**, 1905.

Digitized by Google

sodaß $RS = \lambda_1 \cdot a$, $SP = \lambda_1 \cdot b$, $PQ = \lambda_1 \cdot c$, $QR = \lambda_1 \cdot d$. Das Ähnlichkeitsverhältnis der Vierecke $PQRS$ und $ABCD$ ist also

$$\lambda_1 = \pm \frac{ac - bd}{2F} \cdot \sin \varepsilon.$$

Durch Umklappen des Vierecks $ABCD$ um die Diagonale AC tritt $P_1 Q_1 R_1 S_1$ an die Stelle von $PQRS$, a an die Stelle von d, b an



die von c, und es gilt das obere oder untere Zeichen der Wurzel, je nachdem $bd \gtrless ac$. Hieraus entnimmt man, daß die Seiten von $PQRS$ und $P_1 Q_1 R_1 S_1$ einander gleich und also die letztgenannten Vierecke kongruent sind.

3. *Zuordnung eines dritten ähnlichen Kreisvierecks zum gegebenen Kreisviereck.* — Durch das Abtragen der acht Winkel ε entstehen vier gleichschenklige Dreiecke $A_1 CD$, $B_1 DA$, $C_1 AB$, $D_1 BC$. Zieht man

Digitized by Google

nun durch die Spitzen A_1, B_1, C_1, D_1 dieser Dreiecke Parallelen zu den zugehörigen Seiten a, b, c, d, so erhält man ein neues Kreisviereck, das dem ursprünglichen ähnlich ist. Schneiden sich nämlich die Parallelen durch D_1 und A_1, A_1 und B_1, B_1 und C_1, C_1 und D_1 in K_1, K_2, K_3, K_4, so stimmt $K_1K_2K_3K_4$ mit $ABCD$ zunächst in den Winkeln überein. Ferner ergibt sich, wenn man K_1K_2 bis zu den Seiten BC und DA verlängert,

$$K_1K_2 = a + \frac{a}{2}\cdot\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\varepsilon} - \frac{a}{2}\cdot\frac{\operatorname{ctg}\delta}{\operatorname{ctg}\varepsilon} - \frac{b}{2}\cdot\frac{1}{\operatorname{ctg}\varepsilon\sin\delta} - \frac{d}{2}\cdot\frac{1}{\operatorname{ctg}\varepsilon\sin\alpha}$$

$$= \frac{1}{\operatorname{ctg}\varepsilon}\left[a\operatorname{ctg}\varepsilon + \frac{a(-a^2+c^2)}{4F} - \frac{b(ab+cd)}{4F} - \frac{d(ad+bc)}{4F}\right]$$

und hieraus mit Rücksicht auf $\operatorname{ctg}\varepsilon = \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4F}$:

$$K_1K_2 = \frac{ac-bd}{2F\operatorname{ctg}\varepsilon}\cdot c = \frac{2(ac-bd)}{a^2+b^2+c^2+d^2}\cdot c.$$

Daraus schließt man, daß

$$K_1K_2 = \lambda_2 c, \quad K_2K_3 = \lambda_2 d, \quad K_3K_4 = \lambda_2 a, \quad K_4K_1 = \lambda_2 b,$$

wo $\lambda_2 = \frac{ac-bd}{2F\operatorname{ctg}\varepsilon}$. Bei dieser Ableitung ist vorausgesetzt, daß $ac > bd$. Ist $ac < bd$, so tritt $bd - ac$ an die Stelle von $ac - bd$.

Die Vierecke $K_1K_2K_3K_4$ und $ABCD$ stimmen mithin in den Winkeln und dem Verhältnis homologer Seiten überein. $K_1K_2K_3K_4$ ist also sowohl dem Viereck $ABCD$ als auch den Vierecken $PQRS$ und $P_1Q_1R_1S_1$ ähnlich. Das Ähnlichkeitsverhältnis von $PQRS$ und $K_1K_2K_3K_4$ ist $\cos\varepsilon$.

Wird $ac = bd$, so werden die Seiten von $K_1K_2K_3K_4$ gleich Null, die Parallelen zu den entsprechenden Seiten gehen also durch *einen* Punkt, und dies ist der *Minimumpunkt des entsprechenden Vierecks.*[1])

Bildet man

$$a - K_1K_2 = \frac{a(a^2+b^2+c^2+d^2) - 2c(ac-bd)}{a^2+b^2+c^2+d^2}$$

und ebenso die analogen Ausdrücke $b + K_2K_3$, $c - K_3K_4$, $d + K_4K_1$, so erkennt man, daß für die Seitenabstände p_a, p_b, p_c, p_d des Minimumpunktes des beliebigen Kreisvierecks die Proportion besteht:

$$p_a : p_b : p_c : p_d = a - K_1K_2 : b + K_2K_3 : c - K_3K_4 : d + K_4K_1.$$

4. *Die sechs Siebenpunktkreise.* — Bezeichnet man die Schnittpunkte der gegenüberliegenden Seiten PQ, SR; P_1Q_1, S_1R_1; K_1K_2, K_4K_3 mit

1) E. Eckhardt: Der Gauß-Lemoinesche Punkt im Kreisviereck. Archiv der Math. u. Phys. (3) **9**, 332.

Digitized by Google

T, T_1, K_5 und die der anderen Gegenseiten mit T', T_1', K_6, so hat man sechs Gruppen von je drei homologen Ecken: P, P_1, K_1; Q, Q_1, K_2 usw.

Diese sechs Gruppen liegen mit dem Mittelpunkte M des Umkreises von $ABCD$ und je zweien der Punkte A_1, B_1, C_1, D_1 auf je einem Kreise. Diese sechs Kreise gehen der Reihe nach zunächst durch folgende sechs Punkte:

$$P,\ P_1,\ K_1,\ M,\ D_1,\ A_1;$$
$$Q,\ Q_1,\ K_2,\ M,\ A_1,\ B_1;$$
$$R,\ R_1,\ K_3,\ M,\ B_1,\ C_1;$$
$$S,\ S_1,\ K_4,\ M,\ C_1,\ D_1;$$
$$T,\ T_1,\ K_5,\ M,\ A_1,\ C_1;$$
$$T',\ T_1',\ K_6,\ M,\ B_1,\ D_1.$$

Es genügt, den Beweis für die erste Gruppe zu führen.

Infolge der Konstruktion der drei ähnlichen Kreisvierecke ist zunächst $\sphericalangle PA_1P_1 = 2\varepsilon$ als Außenwinkel des Dreiecks A_1CD und $\sphericalangle PD_1P_1 = 180^0 - 2\varepsilon$ als Scheitelwinkel von $\sphericalangle BD_1C$. $PA_1P_1D_1$ ist also ein Kreisviereck. Da nun MA_1 und MD_1 Lote auf a und d sind, so ist $\sphericalangle A_1MD_1 = \alpha$, und da auch $\sphericalangle Q_1PS_1$ nach Konstruktion gleich α ist, so hat man $\sphericalangle A_1MD_1 = A_1PD_1$. M liegt also gleichfalls auf dem Kreise um $PA_1P_1D_1$. Dasselbe gilt von K_1, da nach Konstruktion $\sphericalangle A_1K_1D_1 = \alpha$.

Die Durchmesser dieser sechs Kreise sind MK_1, MK_2, MK_3, MK_4, MK_5, MK_6.

Für den ersten Kreis ergibt sich dies aus der Bemerkung, daß $MA_1 \perp A_1K_1$. Analog für die anderen Kreise.

Aus $\sphericalangle PA_1K_1 = K_1A_1P_1 = \varepsilon$ folgt weiter $PP_1 \parallel MK_1$ und ebenso $QQ_1 \perp MK_2$, $RR_1 \perp MK_3$, $SS_1 \parallel MK_4$, $TT_1 \perp MK_5$, $T'T_1' \parallel MK_6$.

Da sich die sechs Kreise in 30 reellen Punkten schneiden und von diesen $\frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$ nach M und je $\frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 3$ nach A_1, B_1, C_1, D_1 fallen, so bleiben noch drei Punkte zur Untersuchung übrig. Diese drei Punkte sind die *Einzelschnitte* der sechs Kreise. Bezeichnet man den Schnitt der

Kreise 1 und 3 mit X,
„ 2 „ 4 „ Y,
„ 5 „ 6 „ Z,

so sind X, Y, Z *die Schnitte der homologen Diagonalen:*

$$PR,\ P_1R_1\ K_1K_3;\quad QS,\ Q_1S_1,\ K_2K_4;\quad TT'\ T_1T_1',\ K_5K_6.$$

Digitized by Google

Der Beweis soll für die zweite Gruppe erbracht werden: Da $\sphericalangle MYQ = MA_1Q = 90^0 - \varepsilon$ und $\sphericalangle MYS = 180^0 - SD_1M = 180^0 - (90^0 - \varepsilon) = 90^0 + \varepsilon$, so liegen Q, Y, S auf einer Geraden.

Ebenso folgt aus $\sphericalangle MY_1Q_1 = 90^0 - \varepsilon = MA_1Q_1$ und $\sphericalangle MYS_1 = MC_1S_1 = 90^0 - \varepsilon$, daß Y auf der Verlängerung von Q_1S_1 liegt.

Wegen $MYK_2 = MYK_4 = 90^0$ muß endlich auch K_2K_4 durch Y gehen.

Auf jedem der *sechs* Kreise liegen also jetzt *sieben ausgezeichnete Punkte*, und zwar tritt zu den bereits angeführten sechs Punkten des ersten und dritten Kreises der Punkt X, des zweiten und vierten Kreises der Punkt Y, des fünften und sechsten Kreises der Punkt Z.

5. *Die Durchmesser der sechs Siebenpunktkreise.* — Bezeichnet man die Durchmesser der sechs Kreise der Reihe nach mit $2r_1, 2r_2, \cdots 2r_6$, und greift man zur Berechnung der Durchmesser $2r = MK_3$ des Kreises durch R, R_1, M, K_3, B_1, C_1, X heraus, so hat man wegen $\sphericalangle B_1R_1C_1 = B_1MC_1 = \alpha$ zunächst $B_1C_1 = 2r_3 \sin\alpha$. Da nun im $\triangle AB_1C_1$ die Seiten $AB_1 = b : 2\cos\varepsilon$, $C_1A = c : 2\cos\varepsilon$ und $\sphericalangle C_1AB_1 = 2\varepsilon - \alpha$, so gilt:

$$(2r_3\sin\alpha)^2 = [b^2 + c^2 - 2bc\cos(2\varepsilon - \alpha)] : 4\cos^2\varepsilon,$$

und wenn man $b^2 + c^2$ durch die Diagonale $BD = e$ ausdrückt in der Form $e^2 + 2bc\cos\alpha$:

$$(2r_3\sin\alpha)^2 = [e^2 - 4bc\sin\varepsilon\sin(\alpha - \varepsilon)] : 4\cos^2\varepsilon.$$

Dividiert man beide Seiten durch $\sin^2\alpha$ und ersetzt $e^2 : 4\sin^2\alpha$ durch das Quadrat des Umkreisradius r von $ABCD$ und $1 : \cos^2\varepsilon$ durch $1 + \operatorname{tg}^2\varepsilon$, so erhält man

$$(2r_3)^2 = \left[r^2 - bc \cdot \frac{\sin^2\varepsilon}{\sin\alpha}(\operatorname{ctg}\varepsilon - \operatorname{ctg}\alpha)\right] : \cos^2\varepsilon$$

$$= r^2(1 - \operatorname{tg}^2\varepsilon) - \operatorname{tg}^2\varepsilon\left[\frac{bc(a^2+d^2)}{2F\sin\alpha} - 2r^2\right].$$

Ist nun $AC = f$, so hat man $r = \frac{e}{2\sin\alpha}$ und auch $r = \frac{f}{2\sin\delta}$, also $2r^2 = e \cdot f : 2\sin\alpha\sin\delta$ und mithin wegen $F = \frac{1}{2}(ab + cd)\sin\delta$:

$$\frac{bc(a^2+d^2)}{2F\sin\alpha} - 2r^2 = [2bc(a^2+d^2) - (ab+cd)(ac+bd)] : 4F\sin\alpha.$$

Demnach wird

$$(2r_3)^2 = r^2(1 - \operatorname{tg}^2\varepsilon) - \frac{\operatorname{tg}^2\varepsilon}{4F\sin\alpha}(ab - cd)(ac - bd),$$

woraus schließlich

$$(2r_3)^2 = r^2(1 - \operatorname{tg}^2\varepsilon) - \frac{2(ab-cd)(ac-bd)(ad+bc)}{(a^2+b^2+c^2+d^2)^2}$$

Digitized by Google

folgt. Hieraus entnimmt man leicht die Werte für die Durchmesser $2r_1$, $2r_2$, $2r_4$ und gelangt so zu der folgenden Gruppe:

$$(2r_{1,3})^2 = r^2(1 - \operatorname{tg}^2\varepsilon) \pm \frac{2(ab - cd)(ac - bd)(ad + bc)}{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2},$$

$$(2r_{2,4})^2 = r^2(1 - \operatorname{tg}^2\varepsilon) \pm \frac{2(ab + cd)(ac - bd)(ad - bc)}{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2}.$$

Für $2r_5 = MK_5$ gilt:

$$(2r_5)^2 = \overline{MA_1}^2 + A_1K_5^2 = \overline{MK_2}^2 - A_1K_2^2 + (A_1K_2 + K_2K_5)^2$$
$$= 2(r_2)^2 + K_2K_5(K_2K_5 + 2A_1K_2).$$

Nun ist, wie weiter unten gezeigt wird, wenn M_a die Mitte von a,

$$\tfrac{1}{2}K_1K_2 - A_1K_2 = M_aA_1 \cdot (\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\delta) = M_aA_1 \cdot \frac{b^2 - d^2}{2F},$$

so daß

$$(2r_5)^2 = (2r_2)^2 + K_2K_5\left(K_1K_5 - \frac{a(b^2 - d^2)}{2F\operatorname{ctg}\varepsilon}\right).$$

Drückt man nun K_2K_5 und K_1K_5 durch K_2K_3 und K_4K_1 und die Winkel α und δ aus, so erhält man mit Rücksicht auf die Werte von

$$(2r_2)^2, \quad K_2K_3, \quad K_4K_1, \quad \frac{\sin(\alpha + \delta)}{\sin\alpha\sin\delta} = \frac{b^2 - d^2}{2F},$$

$$(2r_5)^2 = r^2(1 - \operatorname{tg}^2\varepsilon) + \frac{2(ab + cd)(ac - bd)(ad + bc)}{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2} \cdot \frac{2abcd - b^4 - d^4}{(b^2 - d^2)^2},$$

und also durch Vertauschung von b und d mit c und a:

$$(2r_6)^2 = r^2(1 - \operatorname{tg}^2\varepsilon) - \frac{2(ab + cd)(ac - bd)(ad + bc)}{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2} \cdot \frac{2abcd - a^4 - c^4}{(a^2 - c^2)^2}.$$

6. *Übergang zum harmonischen Kreisviereck.* — Da in einem harmonischen Viereck $ac = bd$ ist, so reduzieren sich die Vierecke $PQRS$, $P_1Q_1R_1S_1$, $K_1K_2K_3K_4$ auf die Punkte P, P_1, K_1. P und P_1 sind dann nach Tucker die Brocardschen Punkte, während K_1 nach der angegebenen Arbeit im Archiv der Gauß-Lemoinesche Minimumpunkt ist. Die *sechs* Kreise gehen in *einen einzigen* Kreis über, den sogenannten Brocardschen Kreis, dessen Durchmesser

$$(2r_1)^2 = r^2(1 - \operatorname{tg}^2\varepsilon)$$

oder auch

$$(2r_1)^2 = \frac{a^4 + b^4 + c^4 + d^4 - 2abcd}{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2}.$$

Auf diesem Kreise liegen zunächst die Punkte

$$A_1,\ B_1,\ C_1,\ D_1,\ M,\ P,\ P_1,\ K_1.$$

Digitized by Google

Da nun in einem harmonischen Kreisviereck K_1 mit dem Schnitt der Diagonalen e und f zusammenfällt, und MK_1 der Durchmesser des Brocardschen Kreises ist, so treten zu den obigen acht Punkten die Mitten M_e und M_f von e und f hinzu.

Infolge der allgemeinen Betrachtungen ist $PP_1 \perp MK_1$. Für die Entfernung der Punkte P, P_1 ergibt sich leicht

$$PP_1 = 2r_1 \sin 2\varepsilon = 2r \sin\varepsilon \sqrt{\cos 2\varepsilon}.$$

Ist ϱ der Radius des Inkreises von MP_1K_1P, so findet man

$$\varrho_1 = \frac{r_1 \sin 2\varepsilon}{\sin\varepsilon + \cos\varepsilon} \quad \text{und also} \quad PP_1 = 2\varrho_1(\sin\varepsilon + \cos\varepsilon).$$

7. *Übergang zum Dreieck.* — Läßt man den Punkt C sich dem Punkte B unbegrenzt nähern, so kommen auch die Punkte R, R_1, K_3 den Punkten Q, Q_1 K_2 unendlich nahe. BC, QR, Q_1R_1, K_2K_3 werden also Tangenten an die Umkreise der Dreiecke ABD, PQS, $P_1Q_1S_1$, $K_1K_2K_4$. Die drei Punktgruppen Q, R, T; Q_1, R_1, T_1; K_2, K_3, K_5 fallen in je einen Punkt Q, Q_1, K_2 zusammen, von denen Q, Q_1 die Brocardschen Punkte und K_2 der Grebe-Lemoinesche Minimumpunkt des Dreiecks sind. T', T_1', K_6 sind die Schnittpunkte der homologen Seiten PS, P_1S_1, K_1K_4 mit den Tangenten in Q, Q_1, K_2. X, Y, Z sind die Schnittpunkte der homologen Seiten PQ, P_1Q_1, K_1K_2, QS, Q_1S_1, K_2K_4 und der Tangenten in Q, Q_1, K_2. D_1 fällt nach B und also K_1K_4 in die Tangente in B an den Umkreis von ABD.

Von den sechs Kreisen werden der zweite, dritte und fünfte identisch mit dem Brocardschen Kreise des Dreiecks; denn auf ihm liegen die Punkte Q, Q_1, K_2, M, A_1, B_1, C_1, und es ist

$$(2r_2)^2 = (2r_3)^2 = (2r_5)^2 = r^2(1 - \operatorname{tg}^2\varepsilon) - \frac{2a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2} = r^2(1 - 3\operatorname{tg}^2\varepsilon).$$

Der erste Kreis geht durch B, P, K_1, P_1, M, A_1, X. Sein Radius wird $r_1 = \frac{r}{2\cos\varepsilon} = \frac{r}{2\cos\omega}$, also so groß wie der Radius des *zweiten* Lemoine*schen Kreises*. Sein Durchmesser ist MK_1.

Der Radius des vierten Kreises hat dieselbe Größe. Dieser Kreis ist symmetrisch zu dem ersten in bezug auf MB und enthält die Punkte B, S, S_1, K_4, M, C_1, Y. Sein Durchmesser ist MK_4, wo K_4 auf der Tangente in B an den Umkreis von ABD liegt.

Der sechste Kreis ist der Träger der Punkte B_1, M, B, T', T_1', K_6, Z. Sein Durchmesser MK_6, wo K_6 wieder auf der Tangente in B liegt, ist

$$(2r_6)^2 = r^2(1 - \operatorname{tg}^2\varepsilon) + 2r^2 \cdot \operatorname{tg}^2\varepsilon \cdot \frac{a^4 + c^4}{(a^2 - c^2)^2}.$$

Digitized by Google

8. *Die* Gauß-Lemoine*schen Minimumpunkte G und G_1 der Vierecke $ABCD$ und $K_1K_2K_3K_4$ sind identisch.* — Zum Beweise bestimme man zunächst

$$A_1K_1 = \frac{a}{2} + A_1M_a \cdot \operatorname{ctg}\alpha - \frac{D_1M_a}{\sin\alpha}, \quad A_1K_2 = \frac{a}{2} - A_1M_a \cdot \operatorname{ctg}\delta - \frac{B_1M_b}{\sin\delta}.$$

Sind nun $M_{k_{1,2}}$, $M_{k_{2,3}}$, $M_{k_{3,4}}$, $M_{k_{4,1}}$ die Mitten der Seiten K_1K_2, K_2K_3, K_3K_4, K_4K_1, und ist $\sphericalangle A_1M_{k_{4,2}}M_a = u_1$, so ist

$$\operatorname{ctg}u_1 = \frac{K_1A_1 - A_1K_2}{2A_1M_a} = \frac{1}{2}(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\delta) + \frac{1}{2a}\left(\frac{b}{\sin\delta} - \frac{d}{\sin\alpha}\right)$$
$$= \frac{1}{2}(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\delta) + \frac{b^2 - d^2}{4F} = \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\delta.$$

Da nun nach der schon erwähnten Arbeit des Verfassers im Archiv auch

$$\operatorname{ctg}GM_aC = \operatorname{ctg}G_1M_{k_{1,2}}K_2 = \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\delta$$

ist, so müssen G und G_1 auf der Verbindungsgeraden $M_aM_{k_{1,2}}$ liegen. Genau ebenso läßt sich zeigen, daß G und G_1 auf $M_cM_{k_{3,4}}$ liegen. Demnach muß $G \equiv G_1$ sein, und die vier Geraden $M_aM_{k_{1,2}}$, $M_bM_{k_{2,3}}$, $M_cM_{k_{3,4}}$, $M_dM_{k_{4,1}}$ schneiden sich also in einem Punkte.

Hieraus ergibt sich eine neue elegante Konstruktion des Lemoine*schen Punktes G mit Hilfe des Ähnlichkeitswinkels ε und des Vierecks $K_1K_2K_3K_4$.*

Noch eine andere Folgerung läßt sich aus dem Vorhergehenden ziehen:

Konstruiert man über den Seiten von $K_1K_2K_3K_4$ als Basen noch einmal gleichschenklige Dreiecke nach innen mit dem Basiswinkel ε und zieht durch die Spitzen Parallelen zu den zugehörigen Basen, so erhält man wieder ein dem ursprünglichen Viereck ähnliches Viereck $K_1'K_2'K_3'K_4'$, welches aber jetzt *dieselbe* Lage hat wie $ABCD$, und dessen Minimumpunkt wieder mit G oder G_1 zusammenfällt. *Die Verbindungsgeraden AK_1', BK_2', CK_3', DK_4' schneiden sich also in G.*

9. *Die* Lemoineschen *Punkte G, G', G'' der Vierecke $KK_1K_2K_3$, $PQRS$, $P_1Q_1R_1S_1$ liegen mit dem Umkreismittelpunkt M auf einem Kreise, dessen Durchmesser MG ist.* Der Beweis soll ganz allgemein für je drei homologe Punkte der genannten drei Vierecke und den Punkt M erbracht werden: Fällt man von M auf PQ und P_1Q_1 die Lote MA', MA'', so kann zunächst gezeigt werden, daß A_1, A', A'' homologe Punkte der drei Vierecke sind. Da nämlich $A_1K_2MQ_1$ ein Kreisviereck, so ist $\sphericalangle A''Q_1M = A_1K_2M$, also $\Delta A''Q_1M \sim A_1K_2M$ und folglich

$$\frac{A''Q_1}{A_1K_2} = \frac{MQ_1}{MK_2} = \cos\varepsilon,$$

Digitized by Google

da $\sphericalangle K_2MQ_1 = K_1A_1Q_1 = \varepsilon$. Nun ist aber cos ε das Ähnlichkeitsverhältnis der Vierecke $P_1Q_1R_1S_1$ und $K_1K_2K_3K_4$; mithin sind A_1 und A'' homologe Punkte und ebenso A_1 und A'. Da nun A_1, A', A'' auf einem Kreise mit dem Durchmesser A_1M liegen, so gilt dies auch von drei beliebigen homologen Punkten E_1, E', E''. Der zugehörige Kreis hat den Durchmesser ME_1, wenn E_1 dem Viereck $K_1K_2K_3K_4$ entspricht.

Außerdem ist stets $E'E'' \perp ME_1$, also auch $G'G'' \perp MG$.

10. *Die drei* Lemoineschen *Geraden der Vierecke* $K_1K_2K_3K_4$, $PQRS$, $P_1Q_1R_1S_1$, *d. h. die Polaren der* Lemoineschen *Punkte* G, G', G'' *in bezug auf die Umkreise der genannten Vierecke, schneiden sich in einem Punkte.* — Auch hier läßt sich der Beweis für drei beliebige homologe Geraden der genannten Vierecke führen. Schneiden sich zwei homologe Geraden von $PQRS$ und $P_1Q_1R_1S_1$ in U_1, und sind P', P'' ihre Schnittpunkte mit PQ, P_1Q_1, so ist $\sphericalangle U_1P_1'A'' = U_1P'A_1'$, und die *gleichen* Lote MU', MU'' auf $P'U_1$, $P_1'U_1$ schließen mithin denselben Winkel 2ε ein, wie MA' und MA''. Demnach ist $\frac{MU''}{MU} = \cos\varepsilon$, also gleich dem Ähnlichkeitsverhältnis der Vierecke $P_1Q_1R_1S_1$ und $K_1K_2K_3K_4$. Die Senkrechte in U_1 auf MU_1 muß also *homologe* Gerade für das Viereck $K_1K_2K_3K_4$ sein und ist demnach Tangente an den Kreis um $MU''U_1U'$.

11. *Entfernung des* Lemoineschen *Punktes* G *vom Umkreismittelpunkt* M. — Zum Schluß soll noch der Durchmesser des durch M, G, G', G'' gehenden Kreises, also *die Entfernung* GM berechnet werden.

Beachtet man, daß $\sphericalangle GM_aC = GM_cB = u_1$, $\sphericalangle GM_bD = GM_dC = v_1$ und $\operatorname{ctg} u_1 = \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\delta$, $\operatorname{ctg} v_1 = \operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\delta$, so erhält man aus den Dreiecken GM_aM, GM_bM, GM_cM, GM_dM

$$\begin{aligned} GM^2 &= q_a^2 + p_a^2(1 + \operatorname{ctg}^2 u_1) - 2p_aq_a = q_b^2 + p_b^2(1 + \operatorname{ctg}^2 v_1) - 2p_bq_b \\ &= q_c^2 + p_c^2(1 + \operatorname{ctg}^2 u_1) - 2p_cq_c = q_d^2 + p_d^2(1 + \operatorname{ctg}^2 v_1) - 2p_dq_d \end{aligned}$$

wo die Größen p_r und q_r die Lote von G und M auf die Seiten a, b, c, d des Vierecks $ABCD$ bedeuten. Aus dem letzten System von Gleichungen folgt:

$$\begin{aligned} 4GM^2 = (1 + \operatorname{ctg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\delta)\sum p_r^2 + \sum q_r^2 - 2\sum p_rq_r \\ + 2\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\delta\,(p_a^2 - p_b^2 + p_c^2 - p_d^2). \end{aligned}$$

Nun ist mit Rücksicht auf die Werte von $\operatorname{ctg}\alpha$ und $\operatorname{ctg}\delta$:

$$\begin{aligned} 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\delta &= \frac{1}{16F^2}(16F^2 + 2a^4 + 2b^4 + 2c^4 + 2d^4 - 4a^2c^2 - 4b^2d^2) \\ &= \frac{1}{16F^2}\left((a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 - 4(ac - bd)^2\right) = \frac{1}{16F^2}(s^4 - 4t^4), \end{aligned}$$

Digitized by Google

wo $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = s^2$, $ac - bd = t^2$. Da $\sum p_\nu^2 = \frac{4F^2}{s^4 - 4t^4} \cdot s^2$, so erhält man die elegante Beziehung

$$(1 + \operatorname{ctg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\delta) \cdot \sum p_\nu^2 = \tfrac{1}{4} s^2.$$

Bildet man noch aus den Werten p_ν auf S. 331 des neunten Bandes dieses Archivs $\sum p_\nu q_\nu$, so wird

$$\sum p_\nu q_\nu = \lambda\,[s^2\, 2F - 2(ac - bd)(aq_c - bq_d + cq_a - dq_b)].$$

Der Faktor von $ac - bd$ ist aber Null, denn sind die über a, b, c, d stehenden Peripheriewinkel x, u, v, y, so ist

$$aq_c - bq_d + cq_a - dq_d = 2r^2(\sin x \cos v - \sin u \cos y + \sin v \cos x - \sin y \cos u)$$
$$= 2r^2(\sin(x + v) - \sin(u + y)) = 2r^2(\sin\varphi - \sin\varphi) = 0,$$

wo φ der b gegenüberliegende Schnittwinkel der Diagonalen AC und BD ist. Demnach ist nach S. 332 a. a. O.

$$\sum p_\nu q_\nu = \lambda \cdot 2F \cdot s^2 = \frac{4F^2}{s^4 - 4t^4} \cdot s^2,$$

woraus die nicht minder interessante Beziehung

$$\sum p_\nu^2 = \sum p_\nu q_\nu$$

folgt. Durch die gefundenen Resultate vereinfacht sich jetzt $4\,\overline{GM}^2$ zu

$$4\,\overline{GM}^2 = \tfrac{1}{4} s^2 + \sum q_\nu^2 - 2\sum p_\nu^2 + 2\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\delta\,(p_a^2 - p_b^2 + p_c^2 - p_d^2),$$

oder, da $\frac{1}{4}a^2 + q_a^2 = r^2$ usw.,

$$4\,\overline{GM}^2 = 4r^2 - 2\sum p_\nu^2 + 2\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\delta\,(p_a^2 - p_b^2 + p_c^2 - p_d^2).$$

Bedenkt man, daß $2r \sin\alpha = BD = e$ und $2r \sin\delta = f = AC$, so läßt sich die letzte Gleichung auch schreiben:

$$4\,\overline{GM}^2 = \frac{1}{\sin\alpha \sin\delta} \cdot \Big[(ac + bd)^2 + 2(p_a^2 + p_c^2)\cos(\alpha + \delta) - 2(p_b^2 + p_d^2)\cos(\alpha - \delta)\Big].$$

Aus der Darstellung von $\sum p_\nu^2$ durch s^2 ergibt sich auch für den Ähnlichkeitswinkel ε eine neue Form

$$\operatorname{ctg}\varepsilon = \frac{(1 + \operatorname{ctg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\delta)\sum p_\nu^2}{F},$$

die für das *harmonische* Kreisviereck wegen

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\delta = \operatorname{ctg}^2\varepsilon$$

die Gestalt

$$\operatorname{ctg}\varepsilon = \frac{F}{\sum p_\nu^2}$$

annimmt.

Homburg v. d. Höhe, den 20. Dezember 1905.

Digitized by Google

Über zweifache Flächenpunkte.

Von Otto Biermann in Brünn.

Im folgenden sollen analytische Kennzeichen der verschiedenen zweifachen singulären Punkte von Flächen unterschieden werden, wenn die Flächen Parameterdarstellungen erfahren haben, wobei allerdings die biplanaren und gewisse isolierte Punkte nicht als singuläre Punkte in Erscheinung treten werden, sowie bei ebenen Kurven, deren zwei Punktkoordinaten mit Hilfe eines Parameters dargestellt sind, der gewöhnliche Doppelpunkt und der isolierte Punkt nicht als singuläre Kurvenpunkte auftreten.[1])

Hat eine in gewöhnlichen rechtwinkligen Punktkoordinaten x, y, z durch eine Gleichung $f(x, y, z) = 0$ dargestellte Fläche in dem (reellen) Punkte (x, y, z) eine bestimmte Tangentenebene mit der Gleichung

$$f_x(\xi - x) + f_y(\eta - y) + f_z(\zeta - z) = 0,$$

wo f_x, f_y, f_z die partiellen Ableitungen von f nach x, y, z bedeuten, die bestehen sollen, so heißt er ein *regulärer* Punkt; doch wenn an der Stelle (x, y, z) die partiellen Ableitungen verschwinden, also alle Koeffizienten in der Gleichung der Tangentenebene null sind, und wenn die Stellung der Tangentenebene, die man dann, wenn z als die abhängige Variable eingeführt wird, bekanntlich mit Hilfe der Gleichungen

$$f_x + f_z \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad f_y + f_z \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

ermittelt, dort unbestimmt ist, so heißt der Punkt ein *singulärer* Punkt, und ein *zweifacher singulärer* Punkt heißt er dann, wenn wohl die drei ersten, aber nicht alle zweiten Ableitungen von f in ihm verschwinden.

Wenn man die Fläche mit Hilfe zweier Parameter in der Form darstellt:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v),$$

wo etwa φ und χ als willkürlich gewählte (reelle) Funktionen, aber ψ als die durch die Gleichung $f = 0$ als bestimmt zu denkende Funktion für z betrachtet werde, so kann verschiedenen Wertepaaren für die

1) Scheffers, „Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie". Bd. I, p. 79.

Digitized by Google

Parameter, z. B. den zwei Wertepaaren (u_1, v_1) und (u_2, v_2) derselbe Flächenpunkt (x^0, y^0, z^0) zugehören, das heißt

$$\varphi(u_1, v_1) = \varphi(u_2, v_2) = x^0,$$
$$\chi(u_1, v_1) = \chi(u_2, v_2) = y^0,$$
$$\psi(u_1, v_1) = \psi(u_2, v_2) = z^0$$

sein. Dann gehen durch denselben Flächenpunkt (x^0, y^0, z^0) mehrere, in unserem Falle zwei Zweige hindurch, die aus den den Umgebungen von (u_1, v_1), bezw. (u_2, v_2) zugehörigen Flächenpunkten (x, y, z) bestehen, und jedem Zweige kommt in (x^0, y^0, z^0) eine besondere Tangentenebene zu:

$$A_i(\xi - x^0) + B_i(\eta - y^0) + C_i(\zeta - z^0) = 0 \qquad (i = 1, 2).$$

Diesem Vorkommnis entspricht der sogenannte *biplanare* oder aber ein *isolierter* Punkt, je nachdem die den genannten Umgebungen von (u_1, v_1) und (u_2, v_2) zukommenden Stellen reell oder komplex sind.

Die Gleichung der Tangentenebene in dem dem Wertepaare u, v zugehörenden regulären Punkte (x, y, z) lautet bei Gebrauch der Parameterdarstellung

$$\begin{vmatrix} \xi - x & \eta - y & \zeta - z \\ \varphi_u & \chi_u & \psi_u \\ \varphi_v & \chi_v & \psi_v \end{vmatrix} = 0,$$

wo die Elemente der zweiten und dritten Zeile dieser Determinante die Ableitungen von φ, χ, ψ nach u, bezw. v bezeichnen.

Diese Gleichung der Tangentenebene wird nur dann unbestimmt, wenn gleichzeitig die Unterdeterminanten der Elemente der ersten Zeile verschwinden, wenn also

$$(\alpha) \qquad \frac{\varphi_u}{\varphi_v} = \frac{\chi_u}{\chi_v} = \frac{\psi_u}{\psi_v}$$

ist. Doch wenn umgekehrt diese Gleichungen bestehen, so muß die Tangentenebene durchaus noch nicht unbestimmt sein.

So hat man es z. B. in den Polen der durch folgende Gleichungen

$$x = a \cos u \sin v, \quad y = a \sin u \sin v, \quad z = a \cos v$$

dargestellten Kugelfläche mit zwei „uneigentlichen" singulären Punkten zu tun, wo bestimmte Tangentenebenen existieren.

Der zweifache singuläre Flächenpunkt ist somit durch das Bestehen zweier der Gleichungen (α) und durch die Unbestimmtheit der Tangentenebene charakterisiert. Doch wenn zweien Wertepaaren (u_i, v_i) $(i = 1, 2)$, die

Digitized by Google

den Gleichungen (α) genügen, derselbe Punkt (x^0, y^0, z^0) entspricht, so ist er ein derartiger singulärer Punkt, in dem die an ihn herantretenden oder durch ihn hindurchgehenden Flächenzweige eine gemeinsame Tangentenebene besitzen, denn es ist nicht nur

$$A_1 : B_1 : C_1 = A_2 : B_2 : C_2,$$

sondern, wegen der Werte für diese Koeffizienten, sogar

$$A_i = 0, \quad B_i = 0, \quad C_i = 0, \qquad (i = 1,2).$$

Die Fläche erfährt darnach in (x^0, y^0, z^0) eine *Rückkehr* oder eine *Selbstberührung*.

Beachtet man nun, daß durch die Darstellungen von x, y, z als Funktionen von u und v die Funktion f als eine auf der Fläche identisch verschwindende Funktion anzusehen ist und daher das totale Differential

$$df = f_u du + f_v dv,$$

wie auch die Ableitungen f_u und f_v daselbst verschwinden, so ergibt sich darum, weil

$$\lim \frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} = f_x = \frac{f_u}{\varphi_u} + \frac{f_v}{\varphi_v},$$

$$\lim \frac{df}{dy} = \frac{\partial f}{dy} = f_y = \frac{f_u}{\chi_u} + \frac{f_v}{\chi_v}$$

ist und die Funktionen f_x, f_y nebst f_z nur in den singulären Flächenpunkten null sind, daß in diesen auch φ_u und φ_v sowie χ_u und χ_v gleichzeitig verschwinden müssen; jedoch von ψ_u und ψ_v kann man nicht mehr aussagen, als daß das Verhältnis dieser Größen an einer singulären Stelle dieselben Werte annehmen müsse, wie das Verhältnis der dort verschwindenden Funktionen φ_u und φ_v oder χ_u und χ_v.

Dieselbe Eigenschaft ist offenbar auch von den Ableitungen irgend zweier der drei Funktionen φ, χ und ψ auszusprechen, d. h. *es sind in einem singulären Punkte gewiß zwei der drei Größenpaare* (φ_u, φ_v), (χ_u, χ_v) und (ψ_u, ψ_v) *null*.

Will man die früheren Aussagen über die Unbestimmtheit von $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ in den singulären Punkten auf Gleichungen in u und v übertragen, so hat man zu beachten, daß

$$f_z = -\left\{ f_x \frac{1}{\frac{\partial z}{\partial x}} + f_y \frac{1}{\frac{\partial z}{\partial y}} \right\}$$

ist, und daß daher statt der Gleichungen

$$f_x + f_z \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad f_y + f_z \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Digitized by Google

jetzt die folgenden zu behandeln sind:

$$\frac{f_u}{\varphi_u} + \frac{f_v}{\varphi_v} - \left[\frac{f_u}{\varphi_u} + \frac{f_v}{\varphi_v} + \frac{\dfrac{\partial z}{\partial x}}{\dfrac{\partial z}{\partial y}} \left(\frac{f_u}{\chi_u} + \frac{f_v}{\chi_v} \right) \right] = 0,$$

$$\frac{f_u}{\chi_u} + \frac{f_v}{\chi_v} - \left[\left(\frac{f_u}{\varphi_u} + \frac{f_v}{\varphi_v} \right) \frac{\dfrac{\partial z}{\partial x}}{\dfrac{\partial z}{\partial y}} + \frac{f_u}{\chi_u} + \frac{f_v}{\chi_v} \right] = 0,$$

wobei aber die Ableitungen von z nach x und y zu setzen sind:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\psi_u \chi_v - \psi_v \chi_u}{\varphi_u \chi_v - \varphi_v \chi_u}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\varphi_u \psi_v - \varphi_v \psi_u}{\varphi_u \chi_v - \chi_u \varphi_v}.$$

Man nimmt nun wahr, daß das Verhältnis dieser Ableitungen in einem singulären Punkte, sowie auch das reziproke Verhältnis in der Form $\frac{0}{0}$ erscheint, so daß die Zähler und zufolge deren Beschaffenheit auch der gemeinsame Nenner verschwinden müssen.

Wir gelangen also neuerdings zu den früheren Kennzeichen der singulären Punkte; *es müssen daselbst die drei Beziehungen gelten:*

$$\varphi_u \chi_v - \varphi_v \chi_u = 0, \quad \chi_u \psi_v - \chi_v \psi_u = 0, \quad \psi_u \varphi_v - \psi_v \varphi_u = 0,$$

von denen jede eine Folge der beiden anderen ist.

Die zweifachen singulären Punkte sind außer den bisherigen nochmals der *isolierte Punkt*, der *konische Knotenpunkt*, das *Dornende* und das *gemeinsame Ende des Doppeldornes*.[1])

Auf die letzten drei Gattungen zweifacher singulärer Punkte gehen wir nun ein.

Zweifache Knotenpunkte sind dadurch charakterisiert, daß in ihnen *die ersten Ableitungen der drei Funktionen* φ, χ und ψ *nach* u *und* v *gleichzeitig verschwinden.*

In der Tat, wenn in einem zweifachen singulären Punkte ∞^1 Tangenten an die Fläche zu legen sind, und diese, wie es jetzt sein muß, einen Tangentialkegel zweiter Ordnung konstituieren, dessen Spitze in den singulären Punkt fällt, und dessen Erzeugende die Flächentangenten bilden, so heißt die Gleichung des Tangentialkegels folgendermaßen[2]):

$$4 \begin{vmatrix} \xi - x, & \varphi_{uu}, & \varphi_{uv} \\ \eta - y, & \chi_{uu}, & \chi_{uv} \\ \zeta - z, & \psi_{uu}, & \psi_{uv} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi - x, & \varphi_{uv}, & \varphi_{vv} \\ \eta - y, & \chi_{uv}, & \chi_{vv} \\ \zeta - z, & \psi_{uv}, & \psi_{vv} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi - x, & \varphi_{uu}, & \varphi_{uv} \\ \eta - y, & \chi_{uu}, & \chi_{uv} \\ \zeta - z, & \psi_{uu}, & \psi_{uv} \end{vmatrix}^2 \begin{vmatrix} \xi - x, & \varphi_{uv}, & \varphi_{vv} \\ \eta - y, & \chi_{uv}, & \chi_{vv} \\ \zeta - z, & \psi_{uv}, & \psi_{vv} \end{vmatrix} = 0,$$

in der naturgemäß u und v vertauscht werden können.

1) Biermann, „Über die zweifachen Flächenpunkte", Archiv für Math., dritte Reihe V, p. 252.

2) Scheffers, l. c. Bd. II, p. 22.

Digitized by Google

Wenn aber umgekehrt ein solcher Tangentialkegel vorliegt, so muß die einzelne Tangente durch die Gleichungen definiert sein:

$$\xi - x = \frac{1}{2!}\left[\varphi_{uu} + 2\varphi_{uv}\frac{dv}{du} + \varphi_{vv}\left(\frac{dv}{du}\right)^2\right]t,$$

$$\eta - y = \frac{1}{2!}\left[\chi_{uu} + 2\chi_{uv}\frac{dv}{du} + \chi_{vv}\left(\frac{dv}{du}\right)^2\right]t,$$

$$\zeta - z = \frac{1}{2!}\left[\psi_{uu} + 2\psi_{uv}\frac{dv}{du} + \psi_{vv}\left(\frac{dv}{du}\right)^2\right]t,$$

oder durch

$$\xi - x = \frac{1}{2!}[\varphi_{vv} + 2\varphi_{uv}\varkappa + \varphi_{uu}\varkappa^2]\tau,$$

$$\eta - y = \frac{1}{2!}[\chi_{vv} + 2\chi_{uv}\varkappa + \chi_{uu}\varkappa^2]\tau,$$

$$\zeta - z = \frac{1}{2!}[\psi_{vv} + 2\psi_{uv}\varkappa + \psi_{uu}\varkappa^2]\tau,$$

wo der Parameter τ mit t durch die Relation zusammenhängt $t\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = \tau$ und wo $\varkappa = \frac{dv}{du}$ ist.

Das aber ist bei den Zuwächsen du, dv von gleicher Ordnung und bei Vernachlässigung von Gliedern von höherer als der zweiten Dimension nur mit den Veränderungen vereinbar:

$$dx = \frac{1}{2!}[\varphi_{uu}du^2 + 2\varphi_{uv}dudv + \varphi_{vv}dv^2],$$

$$dy = \frac{1}{2!}[\chi_{uu}du^2 + 2\chi_{uv}dudv + \chi_{vv}dv^2],$$

$$dz = \frac{1}{2!}[\psi_{uu}du^2 + 2\psi_{uv}dudv + \psi_{vv}dv^2].$$

Hiermit ist ersichtlich, daß in einem zweifachen konischen Knotenpunkte, wo es einen Tangentialkegel zweiter Ordnung gibt, die ersten Ableitungen der Funktionen φ, χ, ψ nach u und v wirklich verschwinden.

Nun sollen auch das Dornende und das gemeinsame Ende eines Doppeldornes, d. h. diejenigen Flächenpunkte analytisch gekennzeichnet werden, durch die erstens ∞^1 Ebenen so zu legen sind, daß die Schnittkurven mit der gegebenen Fläche in ihm einen isolierten Punkt besitzen, und zweitens auch ∞^1 Ebenen, deren Schnittkurven in dem singulären Flächenpunkte einen Rückkehr-, bezw. einen Selbstberührungspunkt haben.

Wir beachten, daß also in diesen Punkten eine einzige, durch den Wert von $\frac{dv}{u}$ oder $\varkappa$ bestimmte Fortschreitungsrichtung existiert. Die

Digitized by Google

Tangente und ihre Projektionen werden somit von $\frac{dv}{du}$ oder von $\varkappa$ unabhängig sein. Die Gleichungen der Tangente in dem Dornende oder in dem gemeinsamen Ende des Doppeldornes werden also folgendermaßen lauten:

$$\xi - x = \tfrac{1}{2}\varphi_{uu}t \quad \text{oder} \quad \xi - x = \tfrac{1}{2}\varphi_{vv}\tau,$$
$$\eta - y = \tfrac{1}{2}\chi_{uu}t \quad \text{„} \quad \eta - y = \tfrac{1}{2}\chi_{vv}\tau,$$
$$\zeta - z = \tfrac{1}{2}\psi_{uu}t \quad \text{„} \quad \zeta - z = \tfrac{1}{2}\psi_{vv}\tau.$$

Das Dornende und das gemeinsame Ende des Doppeldornes ist somit neben den Bedingungen

$$\varphi_u = \chi_u = \psi_u = 0, \qquad \varphi_v = \chi_v = \psi_v = 0$$

durch die folgenden ausgezeichnet:

$$\varphi_{uv} = \varphi_{vv} = 0 \quad \text{oder} \quad \varphi_{uu} = \varphi_{uv} = 0,$$
$$\chi_{uv} = \chi_{vv} = 0 \quad \text{„} \quad \chi_{uu} = \chi_{uv} = 0,$$
$$\psi_{uv} = \psi_{vv} = 0 \quad \text{„} \quad \psi_{uu} = \psi_{uv} = 0.$$

In jedem anderen Falle eines zweifachen singulären Punktes, als den bisher behandelten, ist der Punkt ein isolierter, der aber nicht, wie früher, der Beachtung sich entziehen kann, was nach Früherem verständlich ist.

Zur Charakterisierung des zweifachen singulären Punktes sei noch bemerkt, daß zufolge der Darstellungen der drei zweiten Ableitungen von z nach x und y durch die von φ, χ und ψ nach u und v der dreifache singuläre Punkt gewiß durch drei Relationen zwischen Ableitungen zweiter Ordnung zu charakterisieren ist, und endlich sei auch hervorgehoben, daß die getroffene Einteilung der zweifachen singulären Punkte aufhören kann, sachgemäß zu sein, wenn die Glieder höherer als der zweiten Dimension gegenüber diesen in der Umgebung der singulären Stelle von hervorragendem Werte sind, was bei besonderer Lage der Fläche gegenüber den Koordinatenebenen der Fall sein kann.

Brünn, September 1906.

Digitized by Google

Ein Satz über Vielecke.[1])

Von K. Petr in Prag.

Es seien $A_1, A_2, \dots A_n$ n Punkte einer Ebene ($n > 1$). Verbindet man geradlinig A_1 mit A_2, A_2 mit $A_3, \dots A_n$ mit A_1, so entsteht eine gebrochene geschlossene Linie, welche wir ein Vieleck nennen wollen. Dabei können jene n Punkte ganz beliebig gewählt werden, nur sollen alle n Punkte nicht in einen zusammenfallen.

Es seien ferner $a_1, a_2, \dots a_{n-1}$ verschiedene Winkel, welche ohne Rücksicht auf die Reihenfolge den Winkeln

$$\frac{1 \cdot 2\pi}{n}, \quad \frac{2 \cdot 2\pi}{n}, \dots \frac{(n-1) \cdot 2\pi}{n}$$

gleich sind. Man konstruiere auf den Seiten eines Vieleckes $A_1 A_2 \dots A_n$ als Grundlinien gleichschenklige Dreiecke $A_1 A_1^1 A_2$, $A_2 A_2^1 A_3, \dots A_n A_n^1 A_1$, so daß

$$(1) \qquad \overline{A_1 A_1^1} = \overline{A_1^1 A_2}, \ \overline{A_2 A_2^1} = \overline{A_2^1 A_3}, \dots \overline{A_n A_n^1} = \overline{A_n^1 A_1},$$

und daß außerdem

$$(2) \qquad \sphericalangle A_1 A_1^1 A_2 = \sphericalangle A_2 A_2^1 A_3 = \dots = \sphericalangle A_n A_n^1 A_1 = a_1.^2)$$

Dann bestimmen die Punkte $A_1^1, A_2^1, \dots A_n^1$ ein neues Vieleck $A_1^1 A_2^1 \dots A_n^1$. Auf den Seiten dieses Vieleckes konstruiere man genau so wie vorher wieder gleichschenkelige Dreiecke, indem man nur statt des Winkels a_1 den Winkel a_2 benutzt und die Bezeichnung entsprechend wählt; dann erhält man ein drittes Vieleck $A_1^2 A_2^2 \dots A_n^2$. Indem man so fortfährt und zu Konstruktionen alle Winkel $a_1, a_2, \dots a_{n-1}$ nacheinander benutzt, entstehen im ganzen $n-1$ neue Vielecke.

Es gilt dann folgender Satz: *Das letzte von diesen Vielecken* $A_1^{n-1} A_2^{n-1} \dots A_n^{n-1}$ *reduziert sich auf einen Punkt, das vorletzte* $A_1^{n-2} A_2^{n-2} \dots A_n^{n-2}$ *ist ein reguläres Vieleck oder (im speziellen Falle) auch ein Punkt.*

Dabei ist es notwendig, den Begriff eines regulären Vielecks ein wenig zu erweitern. Unter einem regulären Sechsecke z. B. wollen wir nicht nur ein gewöhnliches reguläres Sechseck (oder eventuell ein reguläres Sternpolygon) verstehen, sondern auch die geschlossenen gebrochenen Linien $A_1 A_2 A_3 A_1 A_2 A_3 A_1$, $B_1 B_2 B_1 B_2 B_1 B_2 B_1$, wo A_1, A_2, A_3 die Endpunkte eines regulären Dreiecks und B_1, B_2 zwei beliebige Punkte (Eckpunkte eines regulären Zweiecks) sind.

1) Aus Časopis **34**, 166—172, 1905 mitgeteilt.

2) Die Winkel $A_1 A_1^1 A_2$ etc. immer in positiver Richtung gemessen.

Digitized by Google

Der angeführte Satz läßt sich einfach auf Grund der geometrischen Darstellungen komplexer Zahlen beweisen. Ich benütze dabei die bekannte Bezeichnung:

$$[AA'] = (x' + iy') - (x + iy) = a(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

wo die Zahlen $x' + iy'$, $x + iy$ den Punkten A', A entsprechen und wo a die Länge der geraden Verbindungslinie dieser Punkte bezeichnet und φ den Winkel, welchen AA' mit der X-Achse einschließt. Es ist identisch

$$(3)\quad [AB] = [AC] + [CB],\ [AB] + [BC] + [CD] + \cdots + [LA] = 0.$$

Die oben erwähnten Dreiecke $A_1A_1^1A_2$, $A_2A_2^1A_3$, ... sind ähnlich, und es gilt den Gleichungen (1), (2) zufolge zuerst

$$(4)\quad \frac{[A_1^1A_2]}{[A_1^1A_1]} = \frac{[A_2^1A_3]}{[A_2^1A_2]} = \cdots = \frac{[A_n^1A_1]}{[A_n^1A_n]} = \cos a_1 + i\sin a_1 = \varepsilon_1$$

und

$$(5)\quad \frac{[A_1A]}{[A_1A_2]} = \frac{[A_2A_2^1]}{[A_2A_3]} = \cdots = \frac{[A_nA_n^1]}{[A_nA_1]} = \lambda,$$

$$(5')\quad \frac{[A\,A_2]}{[A_1A_2]} = \frac{[A_2^1A_3]}{[A_2A_3]} = \cdots = \frac{[A_n^1A_1]}{[A_nA_1]} = \mu.$$

Daraus ergibt sich durch Addition, resp. Division für die Zahlen λ, μ:

$$\lambda + \mu = 1,\ \frac{\mu}{\lambda} = -\varepsilon_1;\quad \lambda = -\frac{1}{\varepsilon_1 - 1},\ \mu = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 - 1}.$$

Aus (3), (5) und (5') schließt man weiter:

$$[A_1^1A_2^1] = [A_1^1A_2] + [A_2A_2^1] = \mu[A_1A_2] + \lambda[A_2A_3] = \frac{\varepsilon_1[A_1A_2] - [A_2A_3]}{\varepsilon_1 - 1},$$

und ebenso $[A_2^1A_3^1] = \frac{\varepsilon_1[A_2A_3] - [A_3A_4]}{\varepsilon_1 - 1}$, usw.

Genau so gewinnt man die Ausdrücke für $[A_1^2A_2^2]$, $[A_2^2A_3^2]$, ... Für $[A_1^2A_2^2]$ erhält man z. B.

$$[A_1^2A_2^2] = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2[A_1A_2] - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)[A_2A_3] + [A_3A_4]}{(\varepsilon_1 - 1)(\varepsilon_2 - 1)},\quad \varepsilon_2 = \cos a_2 + i\sin a_2.$$

Durch vollständige Induktion folgt endlich:

$$[A_1^kA_2^k] = \frac{p_{1k}[A_1A_2] + p_{2k}[A_2A_3] + \cdots + p_{k+1,k}[A_{k+1}A_{k+2}]}{(\varepsilon_1 - 1)(\varepsilon_2 - 1)\cdots(\varepsilon_k - 1)},$$

wo die Zahlen p_{1k}, p_{2k}, ... durch folgende für jedes x geltende Beziehungen bestimmt sind:

$$(\varepsilon_1 - x)(\varepsilon_2 - x)\cdots(\varepsilon_k - x) = p_{1k} + p_{2k}x + p_{3k}x^2 + \cdots$$

Setzt man $k = n - 1$, so ist

$$(\varepsilon_1 - x)(\varepsilon_2 - x)\cdots(\varepsilon_{n-1} - x) = (-1)^{n-1}[1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}];$$

Digitized by Google

denn $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_{n-1}$ sind alle Wurzeln der Gleichung

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 = 0.$$

Es ist also $p_{1\,n-1} = p_{2\,n-1} = \cdots = p_{n,\,n-1} = (-1)^{n-1}$ und

$$[A_1^{n-1} A_2^{n-1}] = \frac{1}{n}\{[A_1 A_2] + [A_2 A_3] + \cdots + [A_n A_1]\} = 0,$$

$$[A_2^{n-1} A_3^{n-1}] = 0, \quad [A_3^{n-1} A_4^{n-1}] = 0, \text{ usw.}$$

Dadurch ist bewiesen, daß alle n Punkte $A_1^{n-1}, A_2^{n-1}, \ldots A_n^{n-1}$ in einen zusammenfallen. Daß das vorletzte Vieleck $A_1^{n-2} A_2^{n-2} \ldots A_n^{n-2}$ ein reguläres ist, wird sogleich klar, wenn man bedenkt, auf welche Weise jedes folgende Vieleck aus dem vorhergehenden entstanden ist. Der betreffende analytische Ausdruck

$$n \cdot [A_1^{n-2} A_2^{n-2}] = -\varepsilon_{n-1}[A_1 A_2] - \varepsilon_{n-1}^2 [A_2 A_3] - \cdots - \varepsilon_{n-1}^n [A_n A_1]$$

führt sogleich zu demselben Schlusse.

Der bewiesene Satz erlaubt uns die Vielecke in bezug auf ihre gewissen speziellen Eigenschaften in Klassen einzuteilen. Bezeichnen wir zu diesem Zwecke die konstruktive Operation, durch welche man vom Vielecke $A_1 A_2 \ldots A_n$ zu dem Vielecke $A_1^1 A_2^1 \ldots A_n^1$ gelangt, mit Ω_1, und die folgenden analogen Operationen der Reihe nach mit $\Omega_2, \ldots \Omega_{n-1}$. Dann ist sofort klar, daß die Operationen $\Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_{n-1}$ vertauschbar sind, daß also $\Omega_1 \Omega_2 = \Omega_2 \Omega_1$. Man findet dann leicht folgende Klassen der n-Ecke:

a) $n - 1$ Klassen der n-Ecke, welche dadurch charakterisiert sind daß nur eine bestimmte Operation Ω notwendig ist, um zu einem Punkt zu gelangen. (Alle diese n-Ecke sind regulär).

b) $\frac{1}{2} n(n-1)$ Klassen der n-Ecke, bei denen zwei verschiedene Operationen Ω nacheinander notwendig sind, um zu einem Punkte zu gelangen.

Die letzte Klasse umfaßt dann alle n-Ecke, bei welchen man alle $n - 1$ Operationen in beliebiger Reihenfolge durchführen muß, um zu einem Punkte zu gelangen.

Im ganzen gibt es also $2^{n-1} - 1$ verschiedene Klassen von n-Ecken.

Der Punkt, von welchem im Vorhergehenden die Rede ist, ist der Schwerpunkt der Eckpunkte des betreffenden n-Eckes.

Dieser Punkt S besitzt außerdem noch folgende interessante Eigenschaft. Fügt man die Vektoren $SA_1, SA_2, \ldots SA_n$ der Reihe nach aneinander, so erhält man ein neues Vieleck $B_1 B_2 B_3 \ldots B_n$, welches mit dem Vieleck $A_1 A_2 \ldots A_n$ zu derselben Klasse gehört.

Die Beweise dieser Sätze mit Hilfe der oben benutzten Methode sind leicht.

Prag, 10. Oktober 1905.

Digitized by Google

Über den Hadamardschen Determinantensatz.

Von ERNST FISCHER in Brünn.

Behufs Bestimmung des Maximalwertes, welchen der absolute Betrag einer Determinante $n$ten Grades erreichen kann, wenn ihre n^2 Elemente u_{is} so variieren, daß ihre absoluten Beträge nie die Einheit übersteigen, hat Hadamard[1]) einen Determinantensatz aufgestellt, der so ausgesprochen werden kann:

I. Wenn eine quadratische Matrix (a_{ik}) sich durch zeilenweise Komposition einer quadratischen oder rechteckigen Matrix (u_{is}) mit der konjugiert komplexen $(\bar{u}_{ks})$ erzeugen läßt, d. h. wenn

$$a_{ik} = \sum_{s=1}^{s=N} u_{is}\, \bar{u}_{ks} \tag{1}$$

$(i, k = 1, 2, \ldots n)$ ist und $\bar{u}_{ks}$ die zu u_{ks} konjugiert komplexe Größe bedeutet, dann besteht die Determinantenungleichung:

$$\sum \pm a_{11}\, a_{22} \cdots a_{nn} \leqq a_{11}\, a_{22} \cdots a_{nn};$$

und zwar gilt das Zeichen = nur dann, wenn entweder alle a_{ik} für $i \neq k$ verschwinden oder eines der a_{ii} verschwindet (d. h. $u_{i1} = u_{i2} = \cdots = u_{iN} = 0$).

Um diesen Satz zu beweisen, entwickelt Hadamard den folgenden schärferen Satz, aus welchem der erste sofort folgt:

II. Unter derselben Voraussetzung besteht die Ungleichung:

$$\sum \pm a_{11}\, a_{22} \cdots a_{nn} \leqq \left(\sum \pm a_{11}\, a_{22} \cdots a_{n-1\,n-1}\right) \cdot a_{nn};$$

und zwar gilt das Zeichen = nur, wenn entweder $a_{1n} = a_{2n} = \cdots = a_{n-1\,n} = 0$ oder wenn eine der Größen $\sum \pm a_{11}\, a_{22} \cdots a_{n-1\,n-1}$ und a_{nn} verschwindet.

Wirtinger[2]) hat den Hadamardschen Satz kürzlich mit Differentialrechnung bewiesen. Ich möchte nun zunächst zeigen, daß auch der algebraische Beweis an Durchsichtigkeit nichts zu wünschen übrig läßt, sobald man nur erst gewahr wird, daß der entscheidende Be-

1) Hadamard, Bull. sc. math. 1893 (wiedergegeben in Pascals Determinantenbuch § 53).

2) Wirtinger, Monatsh. f. Math. u. Phys. 1907.

Digitized by Google

weisgrund unmittelbar der elementaren Theorie der positiv definiten Hermiteschen Formen entnommen werden kann. Sodann möchte ich eine Verallgemeinerung des Satzes mitteilen (Satz III) und schließlich ein Beispiel aus der Integralrechnung anführen.

1. Sind a_{ik} komplexe Konstanten, x_i komplexe Variable und $\bar{x}_i$ der konjugiert komplexe Wert zu x_i, so will ich $\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i \bar{x}_k$ (in Anlehnung an Hilbert) eine Hermitesche Form nennen und, da die Werte der $\bar{x}_i$ durch die der x_i schon mitbestimmt sind, mit $f(x_1, \cdots x_n) = f(x) = f_n(x)$ bezeichnen.

Damit $f(x)$ bei beliebig variierenden $x_1, \cdots x_n$ stets reell bleibe, ist notwendig und hinreichend, daß allgemein a_{ik} und a_{ki} zu einander konjugiert komplex sind, insbesondere die a_{ii} reell. Die Determinante $\sum \pm a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} = A = A_n$ einer solchen „reellen Hermiteschen Form" ist stets reell.

Unter diesen Formen heben wir die „nichtnegativen" hervor, d. s. diejenigen, deren Werte bei beliebig variierenden $x_1, \cdots x_n$ stets $\geqq 0$ bleiben. Ihre Determinanten A sind $\geqq 0$. Man unterscheidet sie in positiv definite und semidefinite, je nachdem $f = 0$ nur für $x_1 = \cdots = x_n = 0$ oder auch noch für andere Wertsysteme statthat; im ersten Falle ist $A > 0$, im zweiten $A = 0$. Damit eine reelle Hermitesche Form $f_n(x)$ positiv definit sei, ist notwendig und hinreichend, daß $A_1 > 0$, $A_2 > 0, \cdots A_n > 0$.

Reelle Hermitesche Formen mit reellen Koeffizienten sind durch $a_{ik} = a_{ki}$ charakterisiert; damit sie nichtnegativ, bzw. positiv definit, bzw. nichtnegativ semidefinit seien, ist notwendig und hinreichend, daß die quadratischen Formen $\sum_{1}^{n} a_{ik} x_i x_k$ reeller $x_1, \cdots x_n$ das entsprechende Verhalten zeigen.

Die Form $\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial A_n}{\partial a_{ik}} x_i \bar{x}_k = F_n(x) = F(x)$ heißt die zu $f_n(x) = f(x)$ adjungierte Hermitesche Form, und man hat:

$$F(x) = F_n(x) = -\begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} & x_1 \\ \cdots & \\ a_{n1} \cdots a_{nn} & x_n \\ \bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n & 0 \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Vermöge der Transformation:

$$\begin{cases} a_{11} \bar{x}_1 + \cdots + a_{1n} \bar{x}_n = y_1 \\ \cdots \\ a_{n1} \bar{x}_1 + \cdots + a_{nn} \bar{x}_n = y_n \end{cases} \tag{3}$$

Digitized by Google

wird:

$$A f(x) = F(y). \tag{4}$$

Wenn daher $f(x)$ positiv definit ist, so ist $F(x)$ ebenfalls positiv definit.

2. Der Hadamard sche Satz handelt von denjenigen quadratischen Matrices (a_{ik}), welche sich durch den Ansatz (1) erzeugen lassen. Die Gesamtheit dieser Matrices läßt sich aber in einfacher Weise charakterisieren. Da nämlich

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i \bar{x}_k = \sum_{\varrho=1}^{N} (u_{1\varrho} x_1 + \cdots + u_{n\varrho} x_n)(\bar{u}_{1\varrho} \bar{x}_1 + \cdots + \bar{u}_{n\varrho} \bar{x}_n), \tag{5}$$

so ist $f(x) = \sum_{1}^{n} a_{ik} x_i \bar{x}_k$ eine nichtnegative Hermitesche Form. Umgekehrt läßt sich jede nichtnegative Hermitesche Form in die Gestalt (5) bringen (sogar mit $N \leq n$), ihre Matrix (a_{ik}) läßt also die Erzeugung (1) zu.

Da überdies der Fall einer semidefiniten Form sofort zu übersehen ist, sind die Sätze I, II ihrem wesentlichen Inhalte nach identisch mit den folgenden:

Ia. Für jede positiv definite Hermitesche Form $f(x) = \sum_{1}^{n} a_{ik} x_i \bar{x}_k$ ist $\sum \pm a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} \leq a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$, und das Zeichen $=$ gilt nur, wenn alle a_{ik} für $i \neq k$ verschwinden.

IIa. Für jede positiv definite Hermitesche Form $f(x) = \sum_{1}^{n} a_{ik} x_i \bar{x}_k$ ist $\sum \pm a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} \leq \left(\sum \pm a_{11} a_{22} \cdots a_{n-1\,n-1}\right) \cdot a_{nn}$, und das Zeichen $=$ gilt nur, wenn $a_{1n} = a_{2n} = \cdots = a_{n-1\,n} = 0$.

3. Erster Beweis für IIa. — Es ist zu zeigen, daß für eine positiv definite $f_n(x)$ stets $A_{n-1} a_{nn} - A_n \geq 0$ ist und das Zeichen $=$ nur für $a_{1n} = a_{2n} = \cdots = a_{n-1\,n} = 0$ gilt. Da aber nach (2)

$$A_{n-1} a_{nn} - A_n = F_{n-1}(a_{1n}, a_{2n}, \cdots a_{n-1\,n}) \tag{6}$$

ist, so fragt es sich lediglich, ob $F_{n-1}(x)$ positiv definit ist. Dies ist aber in der Tat der Fall, da $f_{n-1}(x)$ positiv definit ist.

4. Zweiter Beweis für IIa. — Statt nur nachzuweisen, daß $\frac{A_n}{A_{n-1}} \leq a_{nn}$, kann man ein Übriges tun und $\frac{A_n}{A_{n-1}}$ selbst eine Bedeutung beilegen. Da nämlich $f_{n-1}(x)$ positiv definit ist, zeigt die „Mittelpunktstransformation"

$$f_n(x) = f_{n-1}(x - \alpha x_n) + \frac{A_n}{A_{n-1}} x_n \bar{x}_n, \tag{7}$$

Digitized by Google

worin $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_{n-1}$ aus $a_{1k}\alpha_1 + \cdots + a_{n-1k}\alpha_{n-1} + a_{nk} = 0$ $(k = 1, 2, \cdots n-1)$ zu berechnen sind, daß $f_n(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, 1)$ ein Minimum erreicht für $x_1 = \alpha_1, \cdots x_{n-1} = \alpha_{n-1}$ und nur für dieses Wertsystem, und daß dieses Minimum $f_n(\alpha_1, \cdots \alpha_{n-1}, 1) = \frac{A_n}{A_{n-1}}$ ist. Aus dieser Bedeutung von $\frac{A_n}{A_{n-1}}$ erhellt nun insbesondere, daß $\frac{A_n}{A_{n-1}} \leq f_n(0, 0, \cdots 0, 1) = a_{nn}$, und daß für die Gültigkeit des Gleichheitszeichens $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{n-1} = 0$ erforderlich ist; d. h. aber $a_{1n} = \cdots = a_{n-1n} = 0$, wie aus der Berechnung der α oder direkt aus der Identität (7) ersichtlich ist.

5. Bemerkungen. — a) **Wirtinger** hat bemerkt, daß Satz I für reelle u_{ik} die geometrische Bedeutung hat, daß im N-dimensionalen Raum das Volumen Vol. $(1, 2, \cdots n)$ des Parallelotops, welches n Vektoren $u_1, \cdots u_n$ zu Kanten hat, im allgemeinen kleiner ist als das Produkt der Kantenlängen, und nur dann diesem gleich, wenn je zwei der Kanten aufeinander senkrecht stehen, oder aber eine Kante die Länge 0 hat. In dieser geometrischen Deutung kommt unser zweiter Beweis für IIa,

$$\frac{A_n}{A_{n-1}} = \text{Min. } f_n(x_1, \cdots 1) \leq a_{nn},$$

hinaus auf $\frac{\text{Volumen}}{\text{Grundfläche}} = \text{Höhe} \leq \text{entspr. Kante}$.

Denn $f_n(x_1, \ldots 1)$ ist das Quadrat des Abstandes zwischen dem Punkte mit den Koordinaten u_{ns} und dem Punkte mit den Koordinaten $-x_1 u_{1s} - \cdots - x_{n-1} u_{n-1s}$.

b) Unsere beiden Beweise für IIa hängen in der Weise zusammen, daß für $x_1 = \cdots = x_{n-1} = 0$, $x_n = 1$ aus (7) wird:

$$a_{nn} = f_{n-1}(\alpha) + \frac{A_n}{A_{n-1}},$$

was von (6) nicht verschieden ist. Durch die Transformation (3) wird nämlich $f_{n-1}(x - \alpha x_n) = \frac{F_{n-1}(y)}{A_{n-1}}$, und für $x_1 = \cdots = x_{n-1} = 0$, $x_n = 1$ wird $y_1 = a_{1n}, \ldots y_n = a_{nn}$.

c) **Hadamards** Beweis für II kommt in der Sprache der Formentheorie auf Folgendes hinaus. Wird A_n von 0 verschieden angenommen, so zeigt das Multiplikationstheorem für rechteckige Matrices (u_{is}), $(\bar{u}_{is})$ unmittelbar, daß $A_1 > 0$, $A_2 > 0$, $\ldots A_{n-1} > 0$. Aus diesen Relationen allein folgt ja aber schon der positiv definite Charakter von $F_{n-1}(x)$. Diesen Schluß führt **Hadamard** aus durch sukzessive Anwendung der Rekursionsformel:

$$\frac{F_n(y)}{A_n} = \frac{F_{n-1}(y)}{A_{n-1}} + \frac{Y_n Y_n}{A_{n-1} A_n},$$

Digitized by Google

wo

$$Y_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-1} & y_1 \\ \cdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & y_n \end{vmatrix}$$

gesetzt ist und $\overline{Y}_n$ die zu Y_n konjugiert komplexe Größe bezeichnet; diese Formel ist nichts anderes als die durch (3) transformierte „Mittelpunktstransformation" (7). Mit anderen Worten, Hadamard bedient sich der Jacobischen Transformation:

$$\frac{F_{n-1}(y)}{A_{n-1}} = \frac{Y_1 \overline{Y}_1}{A_1} + \frac{Y_2 \overline{Y}_2}{A_1 A_2} + \cdots + \frac{Y_{n-1} \overline{Y}_{n-1}}{A_{n-2} A_{n-1}},$$

um den positiv definiten Charakter von $F_{n-1}(x)$ darzutun.

6. Der Satz IIa gestattet folgende Verallgemeinerung:

III. *Für jede positiv definite Hermitesche Form* $f(x) = \sum_1^n a_{ik} x_i \bar{x}_k$ *gilt:*

$$(8) \quad \sum \pm a_{11} \cdots a_{nn} \leqq \left(\sum \pm a_{11} \cdots a_{\varrho\varrho}\right) \cdot \left(\sum \pm a_{\varrho+1\,\varrho+1} \cdots a_{nn}\right)$$

$(\varrho = 1, 2, \ldots n-1)$, *und zwar gilt das Gleichheitszeichen nur dann, wenn alle* a_{ik} *für* $i = 1, \ldots \varrho$; $k = \varrho + 1, \ldots n$ *verschwinden.*

Beweis. Aus den Zahlen $1, 2, \ldots n$ lassen sich

$$\nu = \frac{n(n-1)\ldots(n-\varrho+1)}{1 \cdot 2 \ldots \varrho} = \binom{n}{\varrho}$$

Kombinationen zu je ϱ verschiedenen bilden; diese ν Kombinationen mögen irgendwie numeriert werden, nachdem in jeder die Reihenfolge der ϱ Zahlen irgendwie fixiert ist. Wenn $\alpha\beta\ldots\varepsilon$ die i^{te} und $\alpha'\beta'\ldots\varepsilon'$ die i'^{te} Kombination ist, so werde

$$B_{ii'} = \sum \pm a_{\alpha\alpha'} a_{\beta\beta'} \cdots a_{\varepsilon\varepsilon'}$$

gesetzt, und die zu dieser Determinante ϱ^{ter} Ordnung komplementäre Determinante $(n-\varrho)^{\text{ter}}$ Ordnung, d. i. diejenige, welche in der Entwicklung der Determinante A (auch dem Vorzeichen nach) mit $B_{ii'}$ multipliziert erscheint, mit $C_{ii'}$ bezeichnet.

Ich behaupte nun zunächst, daß die Hermitesche Form von ν Variablen $G(x) = \sum_1^\nu B_{ii'} x_i \bar{x}_{i'}$ positiv definit ist. Da nämlich $f(x)$ als positiv definit vorausgesetzt wird, kann man ihre Matrix (a_{ik}) durch den Ansatz (1) erzeugen und dabei $N = n$ nehmen. Setzt man nun

Digitized by Google

$V_{ir} = \sum \pm u_{\alpha\alpha} u_{\beta\beta} \dots u_{\varepsilon\varepsilon}$ und bezeichnet mit $\overline{V}_{ir}$ die zu V_{ir} konjugiert komplexe Größe, so wird

$$B_{ik} = \sum_{1}^{r} V_{is} \overline{V}_{ks},$$

d. h. die Matrix (B_{ik}) läßt die zu (1) analoge Erzeugung zu, und $G(x)$ ist daher eine nichtnegative Form. Und zwar ist sie, worauf es augenblicklich aber nicht ankommt, positiv definit, weil ihre Determinante als Potenz von A nicht verschwindet.

Wendet man nunmehr auf $G(x)$ den Satz IIa an, so entsteht:

$$\sum \pm B_{11} B_{22} \dots B_{rr} \leqq \left(\sum \pm B_{11} B_{22} \dots B_{r-1\,r-1}\right) \cdot B_{rr}$$

oder wegen

$$\sum \pm B_{11} B_{22} \dots B_{rr} = A^{\binom{n-1}{\varrho-1}},$$

$$\sum \pm B_{11} B_{22} \dots B_{r-1\,r-1} = C_{rr} \cdot A^{\binom{n-1}{\varrho-1}-1},$$

da A positiv ist,

$$A \leqq B_{rr} C_{rr}.$$

Ist nun die Numerierung der Kombinationen so gewählt, daß die ν^{te} lautet $1\ 2 \dots \varrho$, so ist dies die zu beweisende Ungleichung (8). Die Gültigkeit des Gleichheitszeichens erfordert nach IIa, daß $B_{1r} = \dots = B_{r-1\,r} = 0$, d. i. $\sum \pm a_{\alpha 1} a_{\beta 2} \dots a_{\varepsilon\varrho} = 0$ für alle Kombinationen $\alpha\beta \dots \varepsilon$ außer der einen $1\ 2 \dots \varrho$. Dann muß aber identisch in $x_1, x_2, \dots x_\varrho$ sein

$$\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1\varrho} & x_1 \\ \dots & \\ a_{\varrho 1} \dots a_{\varrho\varrho} & x_\varrho \\ a_{i1} \dots a_{i\varrho} & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{für} \quad i = \varrho + 1,\ \varrho + 2, \dots n.$$

Mithin hat man $F_\varrho(a_{1i}, \dots a_{\varrho i}) = 0$; also $a_{1i} = 0, \dots a_{\varrho i} = 0$, wenn man von dem Umstande Gebrauch macht, daß $F_\varrho(x)$ positiv definit. Will man dies vermeiden, so setze man $x_1 = a_{11}, \dots x_\varrho = a_{\varrho 1}$ und subtrahiere die letzte Spalte von der ersten; dies gibt $a_{i1} = 0$, also $a_{1i} = 0$, und ähnlich ergibt sich $a_{2i} = 0, \dots a_{\varrho i} = 0$.

7. Die Ungleichung (8) gilt ersichtlich auch für semidefinite Formen. In die u_{is} zurückübersetzt, lautet sie:

$$|(u_{is})(\overline{u}_{is})| < |(u_{ps})(\overline{u}_{ps})| \cdot |(u_{qs})(\overline{u}_{qs})|$$

mit $i = 1, 2, \dots n$; $p = 1, 2, \dots \varrho$; $q = \varrho + 1, \varrho + 2, \dots n$; $s = 1, 2, \dots N$, wobei die Matrices zeilenweise zu komponieren sind. Die Bedingung

Digitized by Google

für das Eintreten des Gleichheitszeichens ist vermöge III leicht anzugeben. *Die geometrische Bedeutung für den Fall reeller u_{ik} lautet:*

$$\text{Vol.}\,(1, 2, \dots n) \leq \text{Vol.}\,(1, 2, \dots \varrho) \cdot \text{Vol.}\,(\varrho + 1, \varrho + 2, \dots n),$$

worin das Gleichheitszeichen nur dann gilt, wenn jeder der Vektoren $u_1, \dots u_\varrho$ auf jedem der Vektoren $u_{\varrho+1}, \dots u_n$ senkrecht steht, oder aber entweder die Vektoren $u_1, \dots u_\varrho$ unter sich oder die Vektoren $u_{\varrho+1}, \dots u_n$ unter sich linear abhängig sind.

8. *Anwendung.* Sind $u_1(s), \dots u_n(s)$ reelle oder komplexe, im endlichen Intervalle $a \leq s \leq b$ stetige Funktionen einer stetigen reellen Variablen s, und bezeichnet $\bar{u}_i(s)$ die konjugiert komplexe Größe zu $u_i(s)$, so ist, wenn

$$a_{ik} = \int_a^b u_i(s)\bar{u}_k(s)\,ds$$

gesetzt wird, die Hermitesche Form $f(x) = \sum_1^n a_{ik}\, x_i\, \bar{x}_k$ nichtnegativ, weil man hat:

$$f(x) = \int_a^b (u_1(s)x_1 + \dots + u_n(s)x_n)(\bar{u}_1(s)\bar{x}_1 + \dots + \bar{u}_n(s)\bar{x}_n)\,ds.$$

Folglich ist nach Satz Ia

$$\begin{vmatrix} \int_a^b u_1\bar{u}_1\,ds, & \dots & \int_a^b u_1\bar{u}_n\,ds \\ \dots & & \\ \int_a^b u_n\bar{u}_1\,ds, & \dots & \int_a^b u_n\bar{u}_n\,ds \end{vmatrix} \leq \int_a^b u_1\bar{u}_1\,ds \dots \int_a^b u_n\bar{u}_n\,ds,$$

und zwar gilt das Zeichen = nur dann, wenn entweder alle

$$\int_a^b u_i(s)\bar{u}_k(s)\,ds = 0$$

für $i \neq k$, oder wenigstens eine der Funktionen $u_i(s)$ identisch verschwindet. Und entsprechende schärfere Ungleichungen resultieren aus IIa und III.

Die Analogie mit Satz I habe ich durch die Wahl der Buchstaben ersichtlich zu machen gesucht. Man könnte aber auch die Fourierschen Konstanten der $u_i(s)$ einführen und sie mit u_{ik} bezeichnen; dann würde man unmittelbar Satz I für $N = \infty$ erhalten; hierin liegt auch ein Beweis des gegenwärtigen Resultats.

Digitized by Google

Statt stetiger Funktionen könnte man allgemeiner solche nehmen, deren reelle und imaginäre Teile samt ihren Quadraten im Lebesgueschen Sinne integrabel sind. Nur lautet dann die Bedingung für das Gleichheitszeichen etwas anders, da $\int_a^b u_i(s)\,\bar{u}_i(s)\,ds = 0$ jetzt nur bedeutet, daß $u_i(s) = 0$ für alle s mit eventueller Ausnahme einer Menge vom Lebesgueschen Inhalt 0.

9. *Anhang.* Es sei mir gestattet bei dieser Gelegenheit auch den Umstand, daß die Determinante einer nichtnegativen Hermiteschen Form $\geqq 0$ ist, auf die Form $f(x)$ des vorigen Artikels anzuwenden. Man hat also stets:

$$\begin{vmatrix} \int_a^b u_1\bar{u}_1\,ds, & \dots & \int_a^b u_1\bar{u}_n\,ds \\ \dots & & \\ \int_a^b u_n\bar{u}_1\,ds, & \dots & \int_a^b u_n\bar{u}_n\,ds \end{vmatrix} \geqq 0. \tag{9}$$

Dies erhellt übrigens auch aus der Umformung dieser Determinante in

$$\frac{1}{1\cdot 2\dots n}\int_a^b\dots\int_a^b \begin{vmatrix} u_1(s_1) & \dots & u_1(s_n) \\ \dots & & \\ u_n(s_1) & \dots & u_n(s_n) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \bar{u}_1(s_1) & \dots & \bar{u}_1(s_n) \\ \dots & & \\ \bar{u}_n(s_1) & \dots & \bar{u}_n(s_n) \end{vmatrix} ds_1 \dots ds_n,$$

welche dem Multiplikationstheorem für rechteckige Matrices analog ist, und gibt für $n = 2$ im Falle reeller Funktionen die Schwarzsche Ungleichung

$$\left(\int_a^b u_1(s)u_2(s)\,ds\right)^2 \leqq \int_a^b (u_1(s))^2\,ds \cdot \int_a^b (u_2(s))^2\,ds.$$

Ferner aber gilt das Gleichheitszeichen in (9) nur dann, wenn $f(x)$ semidefinit ist, wenn es also Werte $x_1, x_2, \dots x_n$ gibt, die nicht sämtlich verschwinden, und für welche

$$\int_a^b (x_1u_1(s) + \dots + x_nu_n(s))(\bar{x}_1\bar{u}_1(s) + \dots + \bar{x}_n\bar{u}_n(s))\,ds = 0,$$

d. h.

$$x_1u_1(s) + x_2u_2(s) + \dots + x_nu_n(s) = 0$$

ist, und zwar im Falle stetiger Funktionen identisch in s, in dem

Digitized by Google

anderen Falle wenigstens mit Ausnahme einer Wertmenge vom Lebesgueschen Inhalt 0. Insbesondere hat man also den Satz:

Damit die reellen stetigen Funktionen $u_1(s), u_2(s), \ldots u_n(s)$ im Intervalle $a \leqq s \leqq b$ linearunabhängig sind, ist notwendig und hinreichend, daß die Determinante

$$\begin{vmatrix} \int_a^b u_1^2 ds, & \int_a^b u_1 u_2 ds, & \ldots \int_a^b u_1 u_n ds \\ \int_a^b u_2 u_1 ds, & \int_a^b u_2^2 \; ds, & \ldots \int_a^b u_2 u_n ds \\ \ldots & & \\ \int_a^b u_n u_1 ds, & \int_a^b u_n u_2 ds, & \ldots \int_a^b u_n^2 \; ds \end{vmatrix}$$

nicht verschwindet.

Wir haben hier also ein Kriterium für Linearunabhängigkeit stetiger Funktionen, welches nicht die Existenz von Derivierten voraussetzt.

Brünn, im Juni 1907.

In dem mir erst nachträglich bekannt gewordenen Art. 49 von H. Minkowskis „Geometrie der Zahlen“ (Leipzig 1896) findet man die Ungleichung

$$\sum \pm a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} \leqq a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

zwischen den Koeffizienten einer positiven quadratischen Form, und an einer späteren Stelle desselben Artikels die Bemerkung, daß durch zeilenweise Komposition einer reellen quadratischen Matrix von nichtverschwindender Determinante mit sich selbst die Matrix einer positiven Form entsteht. Damit ist, wenn auch der Hadamardsche Satz nicht ausdrücklich formuliert wird, doch sein wesentlicher Inhalt *und sein Ursprung aus der Theorie der positiven Formen* gegeben, wenigstens für reelle Größen. Die Begründung jener Ungleichung entspricht etwa meinem zweiten Beweise, während der einfachere erste Beweis sowie der schärfere Satz III, soviel ich sehe, auch für reelle Größen bisher unbemerkt geblieben sind.

Brünn, im Jänner 1908.

Digitized by Google

Über das Minimum des Integrals $\int_{x_0}^{x_1} y^n \sqrt{1+y'^2}\, dx$.

Von A. Wiman in Upsala.

1. Das allgemeine Problem, welches wir hier behandeln wollen, enthält als interessante und sehr bekannte Spezialfälle für bzw. $n = 1$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ die Probleme der kleinsten Rotationsfläche, der Brachistochrone und des Prinzips der kleinsten Aktion (vgl. Euler, Methodus inveniendi Cap. II, Nr. 35). Für diese Fälle ist die Aufgabe schon längst behandelt worden, und wir glauben, daß es nicht ohne Interesse sein wird zu erfahren, daß die Sache sich im allgemeinen Falle, je nachdem $n<0$ bez. >0, ganz analog gestaltet wie in den speziellen Fällen der Brachistochrone und der kleinsten Rotationsfläche.

Es handelt sich um das Integral

$$J = \int_{x_0}^{x_1} y^n \sqrt{1+y'^2}\, dx, \tag{1}$$

wo die Endpunkte (x_0, y_0), (x_1, y_1) fest sein sollen. Setzt man

$$F = y^n \sqrt{1+y'^2}, \qquad F_y = \frac{\partial F}{\partial y}, \qquad F_{y'} = \frac{\partial F}{\partial y'}, \tag{2}$$

so bekommt die Euler-Lagrangesche Differentialgleichung die Gestalt

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0, \tag{3}$$

und als zugehöriges erstes Integral erhalten wir

$$F - y' F_{y'} - \frac{y^n}{\sqrt{1+y'^2}} = c. \tag{4}$$

Hieraus ergibt sich als Gleichung der Extremalen

$$x = x_0 + \int_{y_0}^{y} \frac{c\, dy}{\sqrt{y^{2n} - c^2}}. \tag{5}$$

In einzelnen Fällen läßt sich das Integrationsresultat in expliziter Form herstellen. So bekommt man für $n = 1$ bekanntlich eine Kettenlinie, für $n = \frac{1}{2}$ eine Parabel, für $n = -\frac{1}{2}$ eine Zykloide und für $n = -1$ einen Kreis mit dem Mittelpunkte auf der X-Achse.

Wenn wir vom Falle $n = 0$ absehen, so ersieht man leicht, daß man sich auf Kurvenzüge beschränken kann, für welche durch-

Digitized by Google

weg $y \geqq 0$ ist. Nehmen wir $c > 0$, was offenbar immer erlaubt ist, so bekommen wir $y \geqq c^{\frac{1}{n}}$ für $n > 0$. Man ersieht auch leicht, daß für $n < 1$ die Variable x für die ganze durch (5) definierte Kurve endlich bleibt.

Ist $n < 0$, so bekommen wir dagegen $y < c^{\frac{1}{n}}$. Nun hat (5) nur dann eine Bedeutung für $y < 0$, wenn n eine ganze Zahl ist. In diesem Falle bekommt man aber einen unendlichen Wert für das Integral (1), falls man die X-Achse durchbrechen will. Unter Benutzung von (5) erhält man nämlich

$$J = \int_{y_0}^{y} \frac{y^{2n}\, dy}{\sqrt{y^{2n} - c^2}}, \tag{6}$$

wenn wir die obere Grenze längs der Extremalen fortlaufend denken. Für $n = -\nu$ fängt dann die Entwicklung in der Nähe von $y = 0$ mit dem Gliede $-\log y$, bez. $\frac{1}{\nu - 1}\, y^{-\nu+1}$ an, je nachdem $\nu = 1$ oder > 1; die Wurzel wird dabei mit dem negativen Zeichen genommen, da ja das Integral positiv sein soll.

2. Unter den allgemeinen Eigenschaften der Extremalen sind insbesondere zwei hervorzuheben.

a) *Die zu einem beliebigen Werte n gehörigen Extremalen sind gleichförmig und gleich gelegen in bezug auf die X-Achse.*

Man ersieht dies daraus, daß durch die Ähnlichkeitstransformation $x = c^{\frac{1}{n}}\, \xi, \quad y = c^{\frac{1}{n}}\, \eta$ die Relation (5) in

$$\xi = \xi_0 + \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{d\eta}{\sqrt{\eta^{2n} - 1}} \tag{5'}$$

übergeführt wird.

b) *Für $n > 0$ sind die Extremalen durchweg konvex in bezug auf die X-Achse; für $n < 0$ dagegen konkav.*

Man hat ja

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y^{2n} - c^2}}{c} \tag{7}$$

und bekommt daraus durch Derivation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{n\, y^{2n-1}}{c\sqrt{y^{2n} - c^2}} \frac{dy}{dx} = \frac{n}{c^2} y^{2n-1}. \tag{8}$$

Da $y > 0$, ist hiermit der Satz bestätigt.

Digitized by Google

3. Betrachten wir jetzt zunächst den Fall $n < 0$. Aus (7) und (8) ersieht man, daß die Extremale aus einem zwischen zwei Punkten auf der X-Achse verlaufenden Zuge besteht, dessen Tangenten stetig variieren und in den beiden Endpunkten senkrecht auf die X-Achse stoßen. Eben diese Merkmale sind es ja, welche die Gestalt einer Zykloide oder eines Halbkreises charakterisieren. Auch erkennt man leicht, daß mit steigendem $-n$ die Kurve immer steiler in bezug auf die X-Achse wird.

Im Falle der Zykloide, also für $n = -\frac{1}{2}$, ist es wohlbekannt, daß man stets eine und nur eine Zykloide zwischen zwei gegebenen Punkten der oberen Halbebene mit der X-Achse als Basislinie legen kann. Da das Problem ein sogenanntes reguläres ist, so folgert man daraus unmittelbar, daß diese Zykloide auch wirklich das erheischte Minimum liefert.

In ganz entsprechender Weise verhält sich aber die Sache im allgemeinen Falle. In der Tat gilt die fragliche Tatsache für jedes System von gleichförmigen Kurven, welche durchaus konkav in bezug auf die X-Achse sind, und in bezug auf Lage und Tangenten die im Anfang dieser Nummer hervorgehobenen Eigenschaften besitzen.

Seien nämlich C eine beliebige solche Kurve, P_0 und P_1 die Punkte (x_0, y_0), (x_1, y_1) und N der Fußpunkt der von P_0 auf die X-Achse gefällten Normale. Es handelt sich dann zunächst darum, zwei Punkte P_0', P_1' auf C und einen Punkt N' auf der X-Achse zu bestimmen, so daß $P_0'N'$ senkrecht auf der letzteren Linie wird, und die Dreiecke P_0NP_1 und $P_0'N'P_1'$ ähnlich werden. Ist dies gelungen, so findet man die gesuchte Kurve, indem man über P_0P_1 eine Kurve konstruiert, welche in bezug auf P_0P_1 die ähnliche Lage besitzt wie C in bezug auf $P_0'P_1'$. Daß nun das Punktpaar (P_0', P_1') sich in einer und nur einer Weise bestimmen läßt, erschließt man folgendermaßen. Wir betrachten das System von Geraden, welche mit P_0P_1 parallel sind und mit C zwei Schnittpunkte gemein haben. Bezeichnen wir diese Punkte mit Q_0 und Q_1, und zwar mögen die Bezeichnungen in solcher Weise getroffen sein, daß sowohl $y_{P_0} \leq y_{P_1}$ als auch $y_{Q_0} \leq y_{Q_1}$. Von Q_0 fällen wir die Senkrechte auf die X-Achse, welche dieselbe im Punkte M schneiden möge. Für die Gerade Q_0Q_1 gibt es dann zwei extreme Lagen: in einer fällt Q_0 mit M, in der anderen mit Q_1 zusammen; im ersteren Falle ist Q_0 ein Endpunkt der Kurve C, im letzteren Falle wird diese Kurve von der Geraden Q_0Q_1 berührt. Nun folgt offenbar unser Satz direkt daraus, daß beim Übergange von der Anfangslage zu der Endlage das Verhältnis zwischen den Strecken Q_0Q_1 und Q_0M stetig abnimmt von $+\infty$ zu 0. Also wird es einmal und nur einmal

Digitized by Google

eintreffen, daß dieses Verhältnis mit demjenigen von P_0P_1 zu P_0M zusammenfällt. Es sind die zugehörigen Punkte Q_0 und Q_1, welche mit P_0' und P_1' zu identifizieren sind.[1])

4. Nehmen wir jetzt $n>0$, so werden wir die bekannten interessanten Verhältnisse bei dem Probleme der kleinsten Rotationsfläche wiederfinden. Zunächst handelt es sich um die Anzahl der durch zwei Punkte P_0 und P_1 hindurchgehenden Extremalen. Sei auch jetzt C eine beliebige Extremale. Betrachten wir den Inbegriff der mit der Geraden P_0P_1 parallelen Sekanten der Kurve C. Es gibt dann immer eine und nur eine solche Sekante, so daß die Tangenten in den zugehörigen beiden Schnittpunkten auf der Achse zusammenstoßen. Mit Q_0 und Q_1 bezeichnen wir die in Rede stehenden Punkte der Kurve C und mit M den Schnittpunkt der Tangenten. Die Richtigkeit der fraglichen Behauptung läßt sich in der folgenden Weise darlegen. Betrachten wir den Inbegriff der Geraden, welche die Berührungspunkte je zweier auf der Achse sich schneidenden Tangenten verbinden, so ist klar, daß jede Richtung einmal und nur einmal auftritt. Die Kurve C besteht ja aus zwei Zügen, welche von dem Punkte mit dem niedrigsten y-Werte ins Unendliche streben. Bei den beiden Grenzlagen ist für einen Berührungspunkt $y=\infty$, also der Richtungskoeffizient $=-\infty$ bzw. $+\infty$. Geht man nun von der ersten Grenzlage zur letzteren über, so werden die Richtungen stetig verändert, indem der Berührungspunkt auf dem ersteren Zuge nach unten, derjenige auf dem letzteren Zuge nach oben rückt.

Vom Punkte P_0 ziehen wir jetzt eine mit Q_0M parallele Gerade, welche die Achse im Punkte M schneiden möge. Jetzt sind drei Fälle möglich:

a) *Ist der Winkel P_0NP_1 größer als der Winkel Q_0MQ_1, so läßt sich keine Extremale durch die Punkte P_0 und P_1 legen.*

b) *Sind diese Winkel von gleicher Größe, so bekommt man eine Extremale durch P_0 und P_1.*

c) *Ist letztens der Winkel Q_0MQ_1 der größere, so kann man zwei verschiedene Extremalen durch die Punkte P_0 und P_1 hindurchlegen.*

Die gesuchte Anzahl der Extremalen ist offenbar gleich der Anzahl der mit Q_0Q_1 parallelen Sekanten R_0R_1 von solcher Art, daß, falls R_0L parallel mit P_0M bis zum Schnittpunkte mit der Achse gezogen wird, die Winkel R_0LR_1 und P_0NP_1 von gleicher Größe sind.

---

1) Die Anwendung dieser Beweismethode bei dem speziellen Falle der Brachistochronaufgabe ist wohl als allgemein bekannt anzusehen.

Digitized by Google

Nun ersieht man äußerst leicht, daß der Winkel $R_0 L R_1$ immer kleiner wird, je mehr die Gerade $R_0 R_1$ sich von $Q_0 Q_1$ nach oben- oder nach untenhin entfernt. Im ersteren Falle erschließt man ja dies unmittelbar daraus, daß, wie aus der Gestalt der Kurve C ersichtlich ist, falls Δy und Δl die bezüglichen Zunahmen der Ordinate des Punktes R_0 und der Sekante $R_0 R_1$ von der Länge l bezeichnen, man offenbar stets $\frac{\Delta y}{y} > \frac{\Delta l}{l}$ erhält. In gleicher Weise hat man, wenn man sich nach untenhin bewegt, $\frac{\Delta y}{y} < \frac{\Delta l}{l}$, wo hier Δy und Δl die entsprechenden Abnahmen bedeuten. Nähert man sich nun den Grenzlagen der Sekante $R_0 R_1$, für welche sie entweder unendlich entfernt wird oder die Kurve C berührt, so nähert sich offenbar die Größe des Winkels $R_0 L R_1$ dem Werte Null. Also wird es im Falle c) einmal nach oben und einmal nach unten eintreten, daß der Winkel $R_0 L R_1$ die gleiche Größe wie der Winkel $P_0 N P_1$ erhält. Die zugehörigen Sekanten bezeichnen wir mit $R_0'' R_1''$, bezw. $R_0' R_1'$. *Aus den beiden durch P_0 und P_1 hindurchgehenden Extremalen werden dann durch die Sehne $P_0 P_1$ Stücke ausgeschnitten, welche bezw. mit den Bögen $R_0'' R_1''$, $R_0' R_1'$ gleichförmig sind. Nur der letztere Fall liefert ein Minimum.* Im ersteren Falle enthält nämlich das Extremalenstück den zu P_0 konjugierten Punkt, im letzteren aber nicht. Dies ist eine unmittelbare Folgerung daraus, daß, wie wir jetzt nachweisen wollen, *die zu einem Paare konjugierter Punkte zugehörigen Tangenten auf der Achse zusammenstoßen müssen.*

5. Sei (X, Y) der Schnittpunkt der in den Punkten (x_0, y_0), (x_2, y_2) berührenden Tangenten. Der Punkt (x_0, y_0) möge auf der linken Hälfte der Extremalen und (x_2, y_2) auf der rechten Hälfte belegen sein. Wir bekommen dann:

$$Y - y_0 = -\sqrt{\frac{y_0^{2n}}{c^2} - 1}\,(X - x_0), \tag{9}$$

$$Y - y_2 = \sqrt{\frac{y_2^{2n}}{c^2} - 1}\,(X - x_2), \tag{10}$$

wo dem Wurzelzeichen der positive Wert beigelegt werden soll. Ist nun $Y = 0$, so ergibt sich durch Elimination

$$x_2 - x_0 = \frac{y_2}{\sqrt{\frac{y_2^{2n}}{c^2} - 1}} + \frac{y_0}{\sqrt{\frac{y_0^{2n}}{c^2} - 1}} \tag{11}$$

als *Bedingung für das Zusammentreffen der Tangenten auf der Achse.*

Suchen wir jetzt den in bezug auf (x_0, y_0) konjugierten Punkt (x_3, y_3).

Digitized by Google

Wir setzen $c = \alpha^{-n}$. Für $y = \frac{1}{\alpha}$ sei $x = \beta$. Nehmen wir die Wurzel mit dem positiven Zeichen, so bekommen wir alsdann aus (5):

$$(12) \qquad x_0 = \beta - \int_{\frac{1}{\alpha}}^{y_0} \frac{dy}{\sqrt{(\alpha y)^{2n} - 1}} = \beta - \int_1^{\alpha y_0} \frac{\alpha^{-1} d\eta}{\sqrt{\eta^{2n} - 1}} = f(y_0, \alpha, \beta);$$

$$(13) \qquad x_3 = \beta + \int_{\frac{1}{\alpha}}^{y_3} \frac{dy}{\sqrt{(\alpha y)^{2n} - 1}} = \beta + \int_1^{\alpha y_3} \frac{\alpha^{-1} d\eta}{\sqrt{\eta^{2n} - 1}} = f(y_3, \alpha, \beta).$$

Die bekannte Jacobische Bedingung für konjugierte Punkte gibt jetzt

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} f(y_0, \alpha, \beta) \frac{\partial}{\partial \beta} f(y_3, \alpha, \beta) = \frac{\partial}{\partial \alpha} f(y_3, \alpha, \beta) \frac{\partial}{\partial \beta} f(y_0, \alpha, \beta)$$

oder

$$(14) \qquad \frac{\partial}{\partial \alpha} f(y_0, \alpha, \beta) = \frac{\partial}{\partial \alpha} f(y_3, \alpha, \beta).$$

Es ist aber

$$(15) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \alpha} f(y_0, \alpha, \beta) = -\dfrac{\alpha^{-1} y_0}{\sqrt{(\alpha y_0)^{2n} - 1}} + \alpha^{-1} \displaystyle\int_1^{\alpha y_0} \frac{\alpha^{-1} d\eta}{\sqrt{\eta^{2n} - 1}} \\ \qquad\qquad = -\dfrac{\alpha^{-1} y_0}{\sqrt{(\alpha y_0)^{2n} - 1}} - \alpha^{-1}(x_0 - \beta). \end{cases}$$

Ebenso findet man

$$(16) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \alpha} f(y_3, \alpha, \beta) = \dfrac{\alpha^{-1} y_3}{\sqrt{(\alpha y_3)^{2n} - 1}} - \alpha^{-1} \displaystyle\int_1^{\alpha y_3} \frac{\alpha^{-1} d\eta}{\sqrt{\eta^{2n} - 1}} \\ \qquad\qquad = \dfrac{\alpha^{-1} y_3}{\sqrt{(\alpha y_3)^{2n} - 1}} - \alpha^{-1}(x_3 - \beta). \end{cases}$$

Aus (14), (15) und (16) ergibt sich dann

$$(17) \qquad x_3 - x_0 = -\frac{y_3}{\sqrt{(\alpha y_3)^{2n} - 1}} + \frac{y_0}{\sqrt{(\alpha y_0)^{2n} - 1}} = \frac{y_3}{\sqrt{\frac{y_3^{2n}}{c^2} - 1}} + \frac{y_0}{\sqrt{\frac{y_0^{2n}}{c^2} - 1}}.$$

Vergleicht man mit (11), so erhellt, daß *die Bedingung für zwei konjugierte Punkte mit derjenigen für zwei sich auf der Achse schneidende Tangenten identisch ist.*[1])

1) Für $n > 1$ haben die Extremalen geradlinige Asymptoten, welche der Y-Achse parallel sind. Es gibt also dann auf den Extremalen Punkte, welche keine konjugierten Punkte besitzen.

Digitized by Google

6. Ist nun ein Integral J im Falle b), wo (x_0, y_0), (x_1, y_1) zu einander konjugiert sind, ein Minimum? Nach den in neuerer Zeit von Herrn Kneser aufgeschlossenen Eigenschaften der Extremalenenveloppen kann dies nicht der Fall sein, da in der Tat die von den fraglichen Punkten ausgehenden Tangenten von einer und derselben Extremalenschar eingehüllt werden. Dementsprechend werden wir im allgemeinen Falle einen sehr interessanten Satz bestätigt finden, auf welchen für das spezielle Problem der kleinsten Rotationsfläche zuerst Herr L. Lindelöf aufmerksam machte: *der von den beiden konjugierten Punkten begrenzte Extremalenbogen erteilt nämlich dem Integrale denselben Wert wie die von diesen Punkten ausgehenden auf der Achse sich schneidenden Tangenten.*

Für das über die Tangenten genommene Integral bekommen wir nach einer leichten Umformung:

$$(18)\quad \int_0^{y_0} \frac{y^n y_0^n}{\sqrt{y_0^{2n} - c^2}}\,dy + \int_0^{y_1} \frac{y^n y_1^n}{\sqrt{y_1^{2n} - c^2}}\,dy = \frac{1}{n+1}\left[\frac{y_0^{2n+1}}{\sqrt{y_0^{2n} - c^2}} + \frac{y_1^{2n+1}}{\sqrt{y_1^{2n} - c^2}}\right].$$

Als Integral über den Extremalenbogen erhalten wir nach (6) bei Berücksichtigung des Vorzeichens, mit welchem die Wurzel genommen werden soll:

$$(19)\quad \int_{c^n}^{y_0} \frac{y^{2n}\,dy}{\sqrt{y^{2n} - c^2}} + \int_{c^n}^{y_1} \frac{y^{2n}\,dy}{\sqrt{y^{2n} - c^2}}.$$

Nun finden wir durch partielle Integration

$$(20)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{c^n}^{y_0} \frac{y^{2n}\,dy}{\sqrt{y^{2n} - c^2}} = \frac{1}{n}\Big[y\sqrt{y^{2n} - c^2}\Big]_{c^n}^{y_0} - \frac{1}{n}\int_{c^n}^{y_0} \sqrt{y^{2n} - c^2}\,dy \\ \displaystyle = \frac{y_0}{n}\sqrt{y_0^{2n} - c^2} - \frac{1}{n}\int_{c^n}^{y_0} \frac{y^{2n}}{\sqrt{y^{2n} - c^2}}\,dy + \frac{c^2}{n}\int_{c^n}^{y_0} \frac{dy}{\sqrt{y^{2n} - c^2}}. \end{cases}$$

In gleicher Weise ergibt sich

$$(21)\quad \int_{c^n}^{y_1} \frac{y^{2n}}{\sqrt{y^{2n} - c^2}} = \frac{y_1}{n}\sqrt{y_1^{2n} - c^2} - \frac{1}{n}\int_{c^n}^{y_1} \frac{y^{2n}\,dy}{\sqrt{y^{2n} - c^2}} + \frac{c^2}{n}\int_{c^n}^{y_1} \frac{dy}{\sqrt{y^{2n} - c^2}}.$$

Digitized by Google

Durch Benutzung der Relationen (20), (21) und (5) läßt sich (19) in die Gestalt

$$(19') \quad \begin{cases} \frac{1}{n+1}\left[y_0\sqrt{y_0^{2n}-c^2}+y_1\sqrt{y_1^{2n}-c^2}+cx_1-cx_0\right] \\ =\frac{1}{n+1}\left[\frac{y_0^{2n+1}}{\sqrt{y_0^{2n}-c^2}}+\frac{y_1^{2n+1}}{\sqrt{y_1^{2n}-c^2}}\right] \\ +\frac{c}{n+1}\left[x_1-x_0-\frac{cy_0}{\sqrt{y_0^{2n}-c^2}}-\frac{cy_1}{\sqrt{y_1^{2n}-c^2}}\right] \end{cases}$$

umformen. Das letzte Glied verschwindet aber nach (17), falls (x_0, y_0), (x_1, y_1) konjugierte Punkte sind, und die Ausdrücke (18) und (19) werden mithin identisch.

Upsala, im Juni 1906.

The tangent planes which can be drawn to an algebraic surface from a multiple line.

By H. BATEMAN, Cambridge.

If tangents are drawn to an algebraic curve from an arbitrary point O, the fact that their points of contact lie on the first polar of O will in general give us a relation between the points. Thus in the case of a cubic it tells us that the six points of contact lie on a conic.

If, however, the point O is a multiple point on the curve, the number of points of contact will be much less and the above theorem will not in general give us any information about them. Some relations however do exist and have been indicated by Bertini[1]) and Caporali.[2])

I shall now give a method by which the results of Bertini can be obtained, and shall use it afterwards to obtain the corresponding theorems for surfaces.

1. Bertini's theorems are as follows:

(1) If a curve of order $2m$ have a $(2m-2)$fold point at O the $2(2m-1)$ points of contact of the tangents from this point to the curve lie on a curve of order m having a $(m-2)$fold point at O, and the $2(m-1)$ points of contact of the tangents from O to this curve lie on the original one.

1) Bertini, Acc. R. dei Lincei (3) **1** 92—97, 1877.

2) Caporali, Rend. dell' Accad. di Napoli **20**, 143—147 (1881).

Digitized by Google

Thus the six points of contact of the tangents to a quartic from a double point lie on a conic.

(2) If a curve of degree $2m+1$ have a $(2m-1)$ fold point at O, then the $4m$ points of contact of the tangents from O lie on a pencil of curves of degree $(m+1)$ having $(m-1)$ fold points at O, and the points of contact of the tangents from O to these curves lie on the original one.

Thus if a quintic curve has a triple point at O, then the eight points of contact and the point O are the nine base points of a pencil of cubics and the curve may be obtained as the locus of the points of the tangents from O to the members of this pencil.

Take the point O as one corner of the triangle of reference, then the equation of a curve of degree n having a $(n-2)$ fold point at O may be written

$$z^2 U_{n-2} + 2z U_{n-1} + U_n = 0 \tag{1}$$

where U_n denotes a homogeneous polynomial of degree n in x or y.

We shall try to determine a second curve V of degree r:

$$z^2 V_{r-2} + 2z V_{r-1} + V_r = 0 \tag{2}$$

so that we have identically

$$U_{n-2} V_r - 2 U_{n-1} V_{r-1} + U_n V_{r-2} \equiv 0. \tag{3}$$

This relation signifies that any radius vector through the point O is divided harmonically by the two curves. Now if the two points in which the radius cuts one curve coincide, it follows from the harmonic property that one of the points on the other curve will coincide with them also. The two curves therefore are such that each one passes through the points of contact of the tangents from O to the other.

The left hand side of (3) is a homogeneous function of degree $r+n-2$ in x or y, accordingly when we equate to zero the various powers of x, we obtain $r+n-1$ linear relations by means of which the unknown coefficients in V_r, V_{r-1} and V_{r-2} are to be determined. Since the equation (2) contains $3r-1$ constants we must have

$$n + r - 1 \gtreqless 3r - 1, \qquad \text{i. e.} \quad n \gtreqless 2r.$$

Let $2r = n + \alpha$, then we can obtain an ∞^α linear system of curves which will satisfy the given condition. By giving α the values 0, 1 respectively, we obtain the theorems already enunciated. Giving α the value 2 we see that any curve of degree $2r-2$ may be generated by drawing tangents from O to a linear system of r-ics which have a $(r-2)$ fold point at O and which pass through $2(2r-3)$ given

Digitized by Google

points lying on a curve of degree $r-1$ having a $(r-3)$fold point at O, these points being the points of contact of the tangents from O to the given curve.

Caporali's more general result is as follows:

Given a curve F of order n with a $(n-r)$fold point at O

$$n \leqq rs + \tfrac{1}{2}(r-1)(r-2),$$

there exists a $[n - rs - \frac{1}{2}(r-1)(r-2)]$fold linear system of curves θ of order $n-s$ which pass $n-s-2r+2$ times through O and contain the points of contact of the tangents from O to F.

2. By adopting a method analogous to the one already used we may obtain corresponding theorems for surfaces.

The equation of a surface of the nth degree having the line $x=y=0$ as a $(n-2)$fold line may be written

$$S = az^2 + 2hzw + bw^2 + 2gz + 2fw + c = 0$$

where a, b and h are homogeneous functions of x or y of degree $n-2$, g and f of degree $n-1$ and c of degree n.

Any plane through the line $x=y=0$ cuts the surface again in a conic; if the plane is a tangent plane this conic will break up into two straight lines. The directions of the tangent planes will therefore be given by

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = 0.$$

This equation is of degree $3n-4$ in x or y and so there are $3n-4$ tangent planes.

We now construct another surface S'_m having $x=y=0$ as a $(m-2)$fold line

$$S' = a'z^2 + 2h'zw + b'w^2 + 2g'z + 2f'w + c' = 0$$

and such that the quantity

$$\Theta \equiv a'(bc-f^2) + b'(ca-g^2) + c'(ab-h^2) + 2f'(gh-af) + 2g'(hf-bg) + 2h'(fg-ch) \equiv 0.$$

This expression is of degree $m-2+2(n-1)$ in x and y; therefore in order to make it an identity we must satisfy $m+2n-3$ linear conditions. The number of constants in S' is

$$3(m-1) + 2m + (m+1) - 1 = 3(2m-1),$$

Digitized by Google

therefore, if $5m \geqq 2n$ there is a $(5m - 2n)$ fold linear system of surfaces S' which satisfy the condition. We must now find what the geometrical meaning of the equation $\Theta = 0$ is. If we give the ratio x/y any definite value, the equations $S = 0$ and $S' = 0$ will be those of the two conics in which the surfaces are cut by the corresponding plane, and the condition $\Theta = 0$ signifies that it is possible to inscribe triangles in S' which are selfconjugate with regard to S and at the same time to circumscribe triangles to S which are selfconjugate with regard to S'. If however the given plane is a tangent plane to S the conic S will break up into two straight lines, and $\Theta = 0$ is the condition that their point of intersection should lie on S'[1]).

The surface S' therefore passes through the points of contact of the tangent planes to S, but the surface S does not pass through the points of contact of the tangent planes to S'; for if $S' = 0$ represents two straight lines the equation $\theta = 0$ only signifies that they are conjugate with regard to S.

If we take $n = 4$ or 5 we obtain the following theorems:

I. If a quartic surface has a double line, the eight points of contact of the tangent planes through this line are such that every quadric through seven of them passes through the eighth.

(The 8 points of contact do not in general lie on a twisted cubic for in the particular case of Plücker's complex surface the 8 double points, which take the place of the points of contact, form two tetrahedra[2]) which are mutually inscribed or circumscribed to one another, and it is clearly impossible to draw a twisted cubic through 8 such points.)

II. If a quintic surface has a triple line, the eleven points of contact of tangent planes to the surface through this line lie on a quadric.

Cambridge, November 1905.

---

1) See Salmon's Conic Sections, Chapter on Invariants.

2) Hudson, Kummer's Surface p. 72.

Digitized by Google

Rezensionen.

Kistner, Geschichte der Physik. (Sammlung Göschen Bd. 293 u. 294.) 2 Bde. 117 u. 130 S. Leipzig 1906, G. J. Göschen. Preis je ℳ —,80.

Wer es unternimmt, in dem eng bemessenen Raume zweier Göschen-Bändchen eine Geschichte der Physik zu schreiben, wird entweder sich mit Bezug auf den Stoff große Beschränkung aufzuerlegen haben und nur die wichtigsten großen Entdeckungen nach ihrer Bedeutung schildern können, oder er wird unter Voraussetzung eingehender physikalischer Kenntnisse bei seinen Lesern alle Tatsachen — wichtige und unwichtige — historisch aufzählen können. Der Verfasser hat das letztere vorgezogen, und es sogar fertig gebracht, eine Reihe von Tatsachen, die nicht eigentlich zur Physik, sondern ins Gebiet der Technik gehören, mit aufzunehmen. Freilich ist das Wichtigere durch größeren Druck hervorgehoben. Aber es war wirklich z. B. kaum nötig, die Geschichte der für die Elektrisiermaschine verwendeten Amalgame mit allen Jahreszahlen zu bringen, oder die Bedenken anzuführen, die sich der Einführung der Dampfwagen entgegenstellten. Bei der Fülle des verarbeiteten Stoffes vermißt man kaum auch nur eine unwichtigere Tatsache, und die Darstellung ist so korrekt, daß das Buch zum Nachschlagen ausgezeichnete Dienste leisten wird. Dabei wird ein ausführliches Register sich nützlich erweisen. Der erste Band, der nur bis zu Newton reicht, konnte in der Darstellung eingehender sein, denn die Summe der bis zu Newtons Zeit bekannten Erscheinungen und Gesetze macht ja nur einen geringen Bruchteil des gesamten zu verarbeitenden Materiales aus. Der Verfasser zeigt eine große Belesenheit in den Schriften, welche jene zum Teil in mythisches Dunkel gehüllten älteren Entdeckungen behandeln, und bedient sich der zur Ausschaltung unhistorischer Daten nötigen Kritik.

Charlottenburg. H. Samter.

A. Hochheim, Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene. Heft 2. Die Kegelschnitte, Abt. 1. 3. Auflage von O. Jahn und F. Hochheim. A. Aufgaben. [IV und 90 S.] Leipzig 1906, B. G. Teubner. ℳ 1,80.

In der neuen Auflage ist die Fassung der Aufgaben, soweit es notwendig erschien, verbessert worden. Neu hinzugekommen sind 82 Aufgaben; diese „sind in verschiedenen Gebieten eingeschoben, besonders sind neue Aufgaben über geometrische Örter und Enveloppen hinzugefügt, auch sind Aufgaben über konjugierte Pole und Polaren und die Beziehungen der

Digitized by Google

Brennpunkte zu denselben neu hinzugetreten. Die Auswahl der Aufgaben erfolgte auch bei dieser Auflage nach dem Prinzip, daß dieselben im allgemeinen nicht über den Standpunkt der Prima einer Oberrealschule hinausgehen". Daß die neu hinzugekommenen Aufgaben sorgfältig ausgewählt sind, zeigt sich darin, daß sie wirkliche Lücken der früheren Auflagen ausfüllen. Recht erfreulich ist, daß auch die Konstruktionsaufgaben bei der Vermehrung bedacht worden sind; allerdings wäre die getrennte Aufstellung von Aufgaben, welche nahezu miteinander identisch sind, wohl besser vermieden worden, so z. B. bei den Aufgaben 414, 415, 623, 624 (Tangenten von gegebener Richtung zu ziehen). Daß bei der Parabel die hierzu analoge Aufgabe fehlt, beruht wohl nur auf einem Versehen. — Alles in allem genommen, müssen die getroffenen Änderungen als recht glücklich bezeichnet werden, so daß die bei der Besprechung des ersten Heftes (Archiv (3) X, 186, 1906) ausgesprochenen Wünsche auch diesem zweiten Hefte mitgegeben werden können.

Westend. P. Zühlke.

J. W. Mellor, Höhere Mathematik für Studierende der Chemie und Physik und verwandter Wissensgebiete. In freier Bearbeitung der zweiten englischen Ausgabe herausgegeben von A. Wogrinz und A. Szarvassi. 411 S. Berlin 1906, J. Springer. *M* 8,—.

„Das vorliegende Buch soll angehenden Physikochemikern und Studierenden anderer naturwissenschaftlicher Gebiete die zunächst notwendigen Kenntnisse in der Mathematik vermitteln. Es ist eine freie Bearbeitung von J. W. Mellors „Higher mathematics for students of chemistry and physics", in dem Sinne, daß die leitenden Gedanken und der Aufbau des englischen Werkes festgehalten wurden, während insbesondere bei der Auswahl der Beispiele die Bearbeiter ihrem Ermessen gefolgt sind; so z. B. haben sie manche Kapitel Mellors, in denen lediglich physiko-chemische Theorien erläutert werden, stark gekürzt."

Der inhaltliche Umfang des Buches scheint mir über das Maß dessen hinauszugehen, was man einem deutschen Durchschnittsstudenten der Chemie, wenn nicht auch der Physik, an mathematischen Kenntnissen zumuten darf. Wieweit die englischen Ansprüche auf diesem Gebiete den deutschen überlegen sind, entzieht sich meiner Beurteilung. Vielleicht kann man sagen, daß das Buch die Summe und das äußerste Maß dessen bietet, was ein Student der Chemie an Kenntnissen aus den Higher mathematics heutzutage anzuwenden in die Lage kommen dürfte. So werden die Eigenschaften der Gammafunktion entwickelt, einige Worte über elliptische Integrale und mehrfache Integrationen gesagt, ein besonderer Abschnitt den hyperbolischen Funktionen gewidmet, recht ausführlich die Differentialgleichungen abgehandelt: es kommen die gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen, simultane Differentialgleichungen erster Ordnung, auch partielle Differentialgleichungen erster und höherer Ordnung zur Erörterung; ein weiterer Abschnitt beschäftigt sich mit den Fourierschen Reihen und deren Verwendung zur Lösung partieller Differentialgleichungen, wie sie bei den Problemen der Wärmeleitung und der Diffusion auftreten; ein anderes Kapitel handelt von den Determinanten, wo auch die Funktional-

Digitized by Google

determinanten zur Sprache kommen. Und endlich ein Abschnitt über Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichungsrechnung, wo auch Beobachtungen ungleicher Genauigkeit mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate ausgeglichen werden.

Der Schlußabschnitt bringt eine Sammlung von Formeln aus der ebenen und sphärischen Trigonometrie sowie aus der Theorie der hyperbolischen Funktionen, und weiter Tabellen der numerischen Werte der Gammafunktion, des hyperbolischen Sinus und Kosinus, des Wahrscheinlichkeitsintegrals der natürlichen Logarithmen der Zahlen 1—9.99 u. a. m.

Und dabei gewinnt man den Eindruck eines Autors, der seinen Gegenstand einfach und klar darzustellen weiß, der es versteht, das Vorgetragene an einer großen Zahl von Beispielen einzuüben und auf Fragen und Probleme aus der Chemie und Physik anzuwenden, und der mit Geschick Gebiete zusammengestellt hat, die in einem Buche mäßigen Umfanges zusammenzufinden recht vielen Studierenden willkommen sein dürfte, nicht etwa bloß den „Studierenden der Chemie und Physik".

Berlin. E. Jahnke.

E. W. Hyde. Graßmann's space analysis. Fourth edition. Mathematical monographs No. 6. 58 S. New York 1906, J. Wiley & Sons.

Der Verfasser des im Jahre 1890 erschienenen, ausgezeichneten Buches The directional calculus bietet hier dem Studenten auf 58 Seiten eine schnelle Einführung in die Grundbegriffe der Graßmannschen Ausdehnungslehre. Und zwar handelt es sich wesentlich um die Addition und um die beiden Produktbildungen für Punkte und Vektoren in der Ebene und im Raume, wobei der Graßmannsche Begriff der Ergänzung eines Vektors zur Einführung kommt. Das Schlußkapitel enthält die Addition gebundener Vektoren. Jeder Nummer sind noch eine Zahl von Übungen und Aufgaben beigefügt.

Was die Bezeichnung der Produkte angeht, so benutzt der Verfasser diejenige des Stettiner Meisters, nur daß er beim äußeren Produkt die beiden Klammern fortläßt. Daß er auch in der Bezeichnung von Punkten, Linien und Ebenen Graßmann folgt, ist zu bedauern, denn diese Bezeichnung steht mit der bei den Geometern üblichen nicht im Einklang, so daß hierdurch das Studium des Buches wenigstens dem deutschen Studenten in unnötiger Weise erschwert wird.

Es verdient noch hervorgehoben zu werden, worin Herr Hyde über Graßmann hinausgeht, d. i. die Ergänzung eines Punktes. In der Einführung dieses Begriffes trifft er mit F. Caspary zusammen (vgl. E. Jahnke, Vorlesungen über die Vektorenrechnung. Leipzig 1905, B. G. Teubner. S. 160).

Berlin. E. Jahnke.

E. Grimsehl. Die Ziele und Methoden des physikalischen Unterrichts auf der Unterstufe und der Oberstufe. Festgabe bei der 48. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner zu Hamburg 1905. 17 S. 8^0. Hamburg 1905, Lütcke u. Wulff.

Es wird über das Lehrziel, den Unterrichtsstoff und das Lehrverfahren des physikalischen Unterrichts der Unter- und Oberstufe im besondern der

Digitized by Google

realen Vollanstalten gehandelt. Für die physikalischen Schülerübungen, die an keiner höheren Lehranstalt fehlen sollten, wird kraftvoll eingetreten, da „diese für den physikalischen Unterricht eine ähnliche Bedeutung haben wie die Lektüre der Klassiker in den Sprachwissenschaften, wie die Anleitung zum Studium der Quellen in der Geschichte, wie die Betrachtung der Kunstwerke und das Studium derselben an den Kunstwerken selbst oder an vorzüglichen Reproduktionen bei der Kunstgeschichte, wie die selbsttätige Untersuchung der Pflanzen und Tiere bei den sog. beschreibenden Naturwissenschaften".

Die Ausführungen, „die in erster Linie für den Nicht-Fachmann geschrieben sind", stellen auch für den Fachmann eine interessante Lektüre dar.

Gera. E. Kullrich.

Rühlmann. Logarithmisch-trigonometrische und andere für Rechner nützliche Tafeln zunächst für Techniker sowie für den Schulgebrauch und für praktische Rechner überhaupt. 13. vermehrte und verbesserte Auflage. XL und 326 S. 8°. Leipzig 1905, Klinkhardt. geb. ℳ 2,50.

Albrecht. Logarithmisch-trigonometrische Tafeln mit fünf Dezimalstellen. Neunte Stereotyp-Auflage. XVI und 147 S. 9°. Berlin, Stankiewicz. ℳ 2,50.

Beide Tafeln, von denen die erste sechs Stellen, die zweite fünf gibt, sind in erster Linie „für den praktischen Rechner" bestimmt. Das Erscheinen in 13ter, bezw. 9ter Auflage zeigt, daß sie dem Bedürfnis entsprechen. Rühlmann hat das in den physikalischen Tafeln gebotene Material noch vermehrt. Die Angaben wurden dem Erscheinungsjahr angepaßt. Albrecht bietet außer knapper gehaltenen physikalischen Daten auch eine Zusammenstellung mathematischer Formeln. Der Druck ist in beiden Tafeln klar. Für Schulzwecke sind freilich Tafeln mit größeren Zahltypen geeigneter unter Verzicht auf die von Albrecht gebotene bequeme Anordnung bei Tafel I (jede Mantisse steht neben ihrer Zahl), unter Verzicht auf die sechste, ja für humanistische Gymnasien auch auf die fünfte Stelle der Mantissen, unter Verzicht endlich auf die beigefügten mathematischen Formeln und physikalischen Tafeln.

Gera. E. Kullrich.

Arnold Schmidt. Beiträge zum mathematischen Unterricht. I. Die Berechnung der Logarithmen in Untersekunda. II. Die Einführung der komplexen Zahlen. Programmabhandlung 1905 des Kgl. Prinz Heinrich-Gymnasiums in Berlin. 16 S. 4°. Druck von W. Bärenstein.

Die Einsicht, wie die im mathematischen Schulunterricht eine so wichtige Rolle spielenden Logarithmen berechnet werden können, wird eine wesentlich klarere, wenn ein oder das andere Beispiel im Unterricht wirklich durchgeführt wird. Dabei können die Tabellen des ersten Aufsatzes recht brauchbare Dienste leisten. Sie erlauben, die Potenzen von zwei zu bestimmen, deren Wert einer Potenz von zehn nahekommt.

Im zweiten Aufsatz wird für die Einführung der komplexen Zahlen davon ausgegangen, daß sie Punkte einer Ebene darstellen sollen. Geometrisch

Digitized by Google

werden Addition und Multiplikation definiert. Erst dann folgt die Gleichung $i^2 = -1$. Beherzigenswert ist, daß „eine rein arithmetische Einführung der komplexen Zahlen auf der Schule wohl immer daran leiden wird, daß den Primanern ohne Anschauung kein rechtes Verständnis kommt". Zu weit gehend erscheint aber die Bemängelung der arithmetischen Einführung von i wegen der Schwierigkeit, daß bei der Festsetzung $i^2 = -1$ die Multiplikation mit komplexen Zahlen noch nicht definiert sei. Durch die Gleichung $i \cdot i = -1$ ist das Multiplizieren von i mit sich selbst definiert, daran kann $ai \cdot bi$ und dann das Multiplieren komplexer Zahlen angeschlossen werden.

Gera. E. Kullrich.

G. Holzmüller. Die Planimetrie für das Gymnasium im Anschluß an die preußischen Lehrpläne von 1901 methodisch bearbeitet. Nach Jahrgängen geordnet und mit zahlreichen Übungsaufgaben zur freien Auswahl versehen. I. Teil. Von Quarta bis Untersekunda einschließlich reichend. 2. Auflage. Mit 149 Figuren im Text. VIII und 240 S. Leipzig 1905, B. G. Teubner. ℳ 2,40.

Holzmüllers treffliches Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik erfährt in der neuen Auflage eine durchgreifende Umarbeitung hinsichtlich der Stoffanordnung. Es werden jetzt die verschiedenen Gebiete der Mathematik getrennten Bänden zugewiesen, damit bei etwaigen weiteren Umgestaltungen der Lehrpläne nicht jedesmal das Gesamtwerk betroffen werde. Der vorliegende erste Teil der Planimetrie ist auch im einzelnen gegen früher vielfach umgearbeitet und stark erweitert. Ein an so vielen höheren Lehranstalten eingeführtes Schulbuch könnte, um den Umfang und die Kosten zu mindern, knapper sein. Vieles ist, wie Holzmüller selbst auf S. VIII hervorhebt, für den Lehrer bestimmt, dem eine sehr interessante Lektüre, eine gute Hilfe bei der Vorbereitung zum Unterricht geboten wird.

Gera. E. Kullrich.

K. Schwering und W. Krimphoff. Ebene Geometrie. Nach den neuen Lehrplänen bearbeitet. Fünfte Auflage. — Mit 154 Figuren. VI und 136 S. 8°. Freiburg im Breisgau 1905, Herdersche Verlagshandlung. ℳ 1,60.

E. Glinzer. Lehrbuch der Elementar-Geometrie. Erster Teil: Planimetrie. Mit 216 Figuren und einer Sammlung von 300 Aufgaben. Neunte verbesserte Auflage. VI und 120 S. 8°. Leipzig, Ludwig Degener. ℳ 1,80.

Beide Lehrbücher zeigen, da sie sich in der Praxis bewährt haben, in den neuen Auflagen nur ganz unerhebliche Veränderungen. Glinzer wendet sich in erster Linie an technische Schulen, sein Aufgabenmaterial kann aber allgemein hübsche Anregungen bieten. Schwering-Krimphoffs Buch, dessen vierte Auflage im neunten Bande des Archivs S. 77 besprochen wurde, gibt eine für alle höheren Schulen brauchbare Darstellung der Planimetrie.

Gera. E. Kullrich.

Digitized by Google

K. Schwering. Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik für höhere Lehranstalten. Dritter Lehrgang. Zweite, verbesserte Auflage. IV und 98 S. 8°. Freiburg im Breisgau 1904, Herder. *M* 1,20.

H. Fenkner. Arithmetische Aufgaben. Unter besonderer Berücksichtigung von Anwendungen aus dem Gebiete der Geometrie, Physik und Chemie. Für den Unterricht an höheren Lehranstalten. Ausgabe A. Vornehmlich für den Gebrauch in Gymnasien, Realgymnasien und Oberrealschulen. Teil IIa). Pensum der Obersekunda. 3. vermehrte Auflage. IV und 114 S. 8°. Berlin 1905, Salle. *M* 1,20.

Von Schwerings Sammlung wurde hier 1896 im Lit. Ber. LVIII S. 14 die erste Auflage besprochen, 1905 im IX. Bd. S. 79 für den ersten und zweiten Lehrgang die zweite Auflage. Mit dem dritten Lehrgang kommt jetzt die zweite Auflage zum Abschluß. Zugefügt sind neun Aufgaben aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Das erscheint nicht ausreichend, zumal da auch die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit mit berücksichtigt ist.

Fenkner hat gegen die zweite, 1895 erschienene, nur 75 Seiten starke Auflage erhebliche Vermehrungen hinzugefügt. Vielfach sind Änderungen und Umstellungen erfolgt. Die Nebeneinanderbenutzung der zweiten und dritten Auflage dürfte Schwierigkeiten bereiten.

Beide, an einer ganzen Reihe von Schulen eingeführte Sammlungen können auch in den neuen Auflagen warm empfohlen werden.

Gera. E. Kullrich.

A. Sturm. Geschichte der Mathematik. Sammlung Göschen Nr. 226. 152 S. Taschenformat. Leipzig 1904. geb. *M* 0,80.

Th. Bürklen. Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik enthaltend die wichtigsten Formeln und Lehrsätze der Arithmetik, Algebra, algebraischen Analysis, ebenen Geometrie, Stereometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie, mathematischen Geographie, analytischen Geometrie der Ebene und des Raumes, der Differential- und Integralrechnung. Sammlung Göschen Nr. 51. 3. Aufl. 227 S. Taschenformat. Leipzig 1904. geb. *M* 0,80.

Beide Bändchen der Sammlung Göschen bringen empfehlenswerte kurze Zusammenstellungen des Stoffes.

Die Geschichte der Mathematik reicht bis 1800; der Hauptsache nach ist das historische Anordnungsprinzip benutzt, während die Unterteile mehrfach sachlich geordnet sind. Wiederholungen, die sich bei einem solchen gemischten Verfahren einstellen, sind nicht ganz vermieden (z. B. Torricellis opera geometrica auf S. 99 und 115). Vielleicht können auch bei einer Neuauflage noch einige Namen von Mathematikern, über die Weiteres nicht berichtet wird, gestrichen werden. Das Büchlein würde so den Hauptverlauf der Geschichte der Mathematik noch leichter erkennen lassen, ohne daß sein Wert als kleines Nachschlagewerk, den es durch sein Register erhält, wesentlich beeinträchtigt zu werden brauchte. Daß Fig. 1 nicht den auf S. 19 gemachten Angaben entspricht, ferner Fig. 2 und 3 nicht genau zu einander passen, ist unbegründet Nicht angängig ist es, die Loxodrome als die Linie „kürzester Schiffsbahn" zu bezeichnen (S. 90).

Digitized by Google

Die Formelsammlung ist bereits in dritter Auflage erschienen (vgl. Lit. Bericht LVIII 1897, S. 16). Sie umfaßt etwa das mathematische Pensum der Klassen U III bis O I realistischer höherer Lehranstalten und einiges aus den elementaren Vorlesungen der Hochschulen. Die analytische Geometrie nimmt über ein Viertel des Ganzen ein. Wünschenswert ist die Hinzufügung eines Namensverzeichnisses. Zu beanstanden ist auf S. 87 die Ausdrucksweise: „Eine um Punkt A mit dem Halbmesser r beschriebene Kugel ist geometrischer Ort für jede Ebene, die von A den Abstand r hat". Die Kugel ist nicht „geometrischer Ort" für die Ebenen, sondern wird von ihnen eingehüllt. Entsprechend liegt es bei 2c, 3b und 3c derselben Seite.

Gera. E. Kullrich.

Oskar Hertwig. Das Bildungsbedürfnis und seine Befriedigung durch deutsche Universitäten. Rede zur Gedächtnisfeier des Stifters der Berliner Universität König Friedrich Wilhelm III. 31 S. 8^0. Jena 1905, Gustav Fischer. *M* 1,00.

Ein Vergleich der Aufgaben der Universität Berlin bei ihrer Begründung und in der Jetztzeit veranlaßte den Festredner im besonderen auf zwei Äußerungen des modernen Bildungsbedürfnisses und ihre Befriedigung durch deutsche Universitäten einzugehen, nämlich auf das Frauenstudium und die Universitätsausdehnung, d. h. die Zulassung, ja besondere Berücksichtigung nicht zum Studium immatrikulierter Hörer an den Universitäten. Die spezielle Frage der Fortbildung des höheren Lehrerstandes wird nur gestreift.

Gera. E. Kullrich.

Alois Lanner. Die wissenschaftliche Grundlage des ersten Rechenunterrichts. 49 S. 8^0. Wien und Leipzig 1905, C. Fromme. *M* 1,00.

Es wird von Lanner erörtert, wie im ersten Rechenunterricht zunächst das Zählen zu lehren ist, und wie die Entwicklung des Zahlbegriffs aus der Reihenbildung des Zählens zu erfolgen hat. Erst nach Klärung des Zahlbegriffs sei an das Rechnen selbst zu gehen. Die Rechenoperationen sollen nacheinander behandelt werden. Zur Einführung sind „Grenzfälle", d. h. Aufgaben, welche die Eins oder zwei gleiche Zahlen enthalten, ungeeignet.

Die Arbeit, von welcher der erste Teil schon früher erschienen war, enthält hübsche psychologische Bemerkungen. Was von dem jetzigen Stande des ersten Rechenunterrichtes gesagt wird, ist zu pessimistisch; die Bezugnahme auf die reiche Literatur durch Angriffe auf Grube und Hentschel ist zu einseitig. Lanner hätte auch auf Autoren eingehen sollen, die ähnliche Gedanken wie er vorgebracht haben, etwa auf Tanck und Knilling für das Zählprinzip, auf Steuer für das Ausgehen von Zahlen über Eins beim Multiplizieren.

Gera. E. Kullrich.

Ed. Zetzsche. Ebene und räumliche Geometrie. Vierte, vermehrte und verbesserte Auflage bearbeitet von Franz Zetzsche. Mit 242 in den Text gedruckten Abbildungen. Webers illustrierte Katechismen, Band 69. XII und 408 S. 8^0. Leipzig 1905, J. J. Weber. geb. *M* 4,00.

Von der dritten Auflage, welche 1892 im XLV. Bericht S. 16/17 besprochen wurde, unterscheidet sich die vorliegende, von dem Sohn des

Digitized by Google

inzwischen verstorbenen Verfassers herausgegebene Auflage dadurch, daß die Frage- und Antwortform als veraltet fallen gelassen wurde. Die durch die größere Knappheit erstrebte Erhöhung der Stetigkeit und Klarheit wird sich an einzelnen Stellen durch weitere Kürzungen noch steigern lassen. Damit das Buch wieder das Pensum der höheren Lehranstalten umfaßt, wurden verschiedene Abschnitte neu hinzufügt (z. B. Potenz, Apollonische Berührungsaufgabe, Pol und Polare, Prismatoid, Eulerscher Satz, Kegelschnitte). Beim Projizieren hätte auf das Zeichnen von Projektionen eingegangen werden sollen. Die Aufgabe in § 106 würde besser durch eine leichtere ersetzt.

Das Buch wird sich in der verbesserten Form zu den alten Freunden leicht neue erwerben.

Gera. E. Kullrich.

L. Fuchs. Gesammelte mathematische Werke. Herausgegeben von R. Fuchs und L. Schlesinger. 1. Band: Abhandlungen (1858 bis 1875), redigiert von L. Schlesinger, Mayer und Müller. VIII u. 476 S. 4°. Berlin 1904.

Das Erscheinen des mit liebevoller Sorgfalt redigierten ersten Bandes der Gesamtausgabe von L. Fuchs' Werken wird von der mathematischen Welt mit großer Freude begrüßt werden; derselbe enthält die achtzehn in den Jahren 1858—1875, bis zur Übersiedelung nach Heidelberg (April 1875), veröffentlichten Arbeiten. Diese sind in chronologischer Reihenfolge treu nach den Originaltexten wieder abgedruckt worden; alle irgendwie nennenswerten Änderungen sind in den den einzelnen Abhandlungen hinzugefügten Anmerkungen angegeben; nur offenbare Druckfehler wurden meist stillschweigend berichtigt und für alle in deutscher Sprache abgefaßten Abhandlungen als einheitliche Orthographie die bis vor kurzem im Journal für die reine und angewandte Mathematik üblich gewesene durchgeführt. Die Seitenzahlen der Originaldrucke stehen immer am äußeren Rande derjenigen Zeile, die das erste Textwort oder Formelzeichen der betreffenden Seite des Originals enthält. — Alle Arbeiten sind teils vor dem Drucke, teils während desselben einer sachlichen Revision unterzogen worden, und zwar die beiden geometrischen Abhandlungen I und II von Stäckel, die beiden zahlentheoretischen III und IV von Dedekind, von dem auch einige Anmerkungen herrühren, die Abhandlung XVI von A. Hirsch, die übrigen von L. Schlesinger und Heffter. Die französische Arbeit X wurde von H. Vogt in sprachlicher Hinsicht revidiert; außerdem haben Lemke und R. Fuchs je eine Korrektur der Druckbogen gelesen. — Der vorliegende Band ist in der vornehmen Ausstattung der von derselben Verlagshandlung verlegten Werke von Weierstraß und Schering durch die altbewährte Dieterichsche Universitäts-Buchdruckerei in Göttingen hergestellt und mit einem ausgezeichneten Bildnis des Verfassers geziert; das Faksimile der Unterschrift ist dem Manuskripte der Abhandlung entnommen, die der Verf. wenige Wochen vor seinem Hinscheiden zur Säkularfeier Abels für die Acta Mathematica geschrieben, der letzten, die er noch selbst (am 15. März 1902) zum Drucke befördert hat. — Es möge nun das Verzeichnis der 18 Arbeiten folgen, über die, zum großen Teile klassisch geworden und der Geschichte der Mathematik angehörend, noch ein Wort zu sagen wohl überflüssig ist; hervorgehoben sei nur, daß der vorliegende Band insofern ein

Digitized by Google

ganz besonderes Interesse beansprucht, als er die Erstlingsarbeiten von Fuchs enthält, die auf einem ganz anderen Gebiete liegen als dem der linearen Differentialgleichungen, welches später seine eigenste Domäne geworden ist.

I. De superficierum lineis curvaturae. Dissertatio inauguralis etc. Berlin 1858, (40 S.)

II. Integration der partiellen Differentialgleichung: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]$. J. für Math. **58** (1861), 80—89.

III. Über die Perioden, welche aus den Wurzeln der Gleichung $\omega^n = 1$ gebildet sind, wenn n eine zusammengesetzte Zahl ist. J. für Math. **61** (1863), 374—386.

IV. Über die aus Einheitswurzeln gebildeten komplexen Zahlen von periodischem Verhalten, insbesondere die Bestimmung der Klassenzahl derselben. J. für Math. **65** (1866), 74—111.

V., VI. Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Koeffizienten. Jahresbericht der städt. Gewerbeschule zu Berlin, Ostern 1865. J. für Math. **66** (1866), 121—160.

VII. Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Koeffizienten. (Ergänzungen zu der im 66ten Bande dieses Journals enthaltenen Abhandlung). J. für Math. **68** (1868), 354—385.

VIII. Die Periodizitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale als Funktionen eines Parameters aufgefaßt. J. für Math. **71** (1870), 91—127.

IX. Über eine rationale Verbindung der Periodizitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale. J. für Math. **71** (1870), 128—136.

X. Sur le développement en séries des intégrales des équations différentielles linéaires. Annali di Mat. (2) **4** (1870/71), 36—49.

XI. Bemerkungen zu der Abhandlung: „Über hypergeometrische Funktionen n^{ter} Ordnung" d. J. **71**, 316. J. für Math. **72** (1870), 255—282.

XII. Über die Form der Argumente der Thetafunktionen und über die Bestimmung von $\vartheta(0, 0, \ldots, 0)$ als Funkion der Klassenmoduln. J. für Math. **73** (1871), 305—323.

XIII. Über die linearen Differentialgleichungen, welchen die Periodizitätsmoduln der Abelschen Integrale genügen, und über verschiedene Arten von Differentialgleichungen für $\vartheta(0, 0, \ldots, 0)$. J. für Math. **73** (1871), 324—339.

XIV. Über die Darstellung der Funktionen komplexer Variablen, insbesondere der Integrale linearer Differentialgleichungen. J. für Math. **75** (1873), 177—223.

XV. Über die Darstellung der Funktionen komplexer Variablen. Anhang zur Abh. Bd. **75** d. J., 177 ff. — J. für Math. **76** (1874), 175—176.

XVI. Über Relationen, welche für die zwischen je zwei singulären Punkten erstreckten Integrale der Lösungen linearer Differentialgleichungen stattfinden. J. für Math. **76** (1874), 177—213.

XVII. Über die Abbildung durch algebraische Funktionen. J. für Math. **77** (1874), 339—352.

XVIII. Über die Abbildung durch algebraische Funktionen. Anhang zur Abhandlung. Bd. **77**, 339 ff. d. J. — J. für Math. **78** (1875), 338—339.

Berlin-Charlottenburg. G. Wallenberg.

Digitized by Google

C. Christiansen und Johs. J. C. Müller. Elemente der theoretischen Physik. Zweite Aufl. 352 Seiten. Leipzig 1903, Joh. Ambr. Barth.

Das rühmlichst bekannte Buch bietet in sehr guter Auswahl eine kurze Übersicht über die allgemeinen Methoden und über viele der wichtigsten Probleme aus allen Gebieten der theoretischen Physik. Garnicht berücksichtigt sind nur die geometrische Optik, die Dispersionstheorie, die Strahlungsgesetze, die kinetische Gastheorie und die moderne Elektronentheorie. Die mathematische Behandlung ist durchweg elegant und übersichtlich und arbeitet mit möglichst einfachen Mitteln.

Hier und da wäre eine noch präzisere Scheidung zwischen Erfahrungstatsachen, aus ihnen gewonnenen Abstraktionen und Hypothesen erwünscht. Auch dürften bei einer Neuauflage einige redaktionelle Änderungen zu empfehlen sein, z. B. in den einleitenden Sätzen der Abschnitte „Schwingende Bewegung" (pag. 17) und „Innere Kräfte" (pag. 93). In der Gleichung $x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = \frac{df}{dt}$ (pag. 77) fehlt auf der rechten Seite der Faktor 2. Die ersten Worte der Einleitung: „Der Physiker führt alle Erscheinungen auf Bewegungen zurück", entsprechen weder dem tatsächlichen noch dem von den meisten modernen Physikern erstrebten Zustande der Wissenschaft. Ein Rudiment der ersten Auflage ist es wohl, wenn das 18. Jahrhundert als das vorige, daß 19. als unser Jahrhundert bezeichnet wird.

Diese kleinen Ausstellungen sollen natürlich den Wert des Buches nicht im geringsten herabsetzen. Wer es aufmerksam durchstudiert, sei es als Einführung in die theoretische Physik, sei es als Repetition, wird dauernden Nutzen davon haben.

Breslau. E. Pringsheim.

G. Jaeger. Die Fortschritte der kinetischen Gastheorie. Heft 12 der Wissenschaft, Sammlung naturwissenschaftlicher und mathematischer Monographien. 121 Seiten. Braunschweig 1906, Vieweg u. Sohn.

Als die kinetische Gastheorie ihren Siegeslauf begann, galt es allgemein als Axiom, daß es das Ziel der Physik, ja der Naturwissenschaft überhaupt sei, die Erscheinungen der Außenwelt auf Bewegungen zurückzuführen, und die kinetische Theorie der Gase erschien als der erste verheißungsvolle Schritt zur Erreichung dieses Zieles. Später kam diese Theorie — um mit Boltzmann zu reden — aus der Mode, hauptsächlich weil ihre Fortschritte ein sehr langsames Tempo annahmen und nur durch hartnäckigen Kampf mit ungewöhnlichen mathematischen Schwierigkeiten und zum Teil unter Zuhilfenahme recht willkürlicher Hypothesen erreicht werden konnten. Und wenn auch die zielbewußten Energetiker, welche eine mechanische Darstellung der Naturerscheinungen als unnütz betrachteten und auf solche Bestrebungen mit einem gewissen Hochmut herabsahen, auf den Fortschritt der Wissenschaft ohne wesentlichen Einfluß geblieben sind, so hat sich doch die Überzeugung Bahn gebrochen, daß die Aufgabe der Physik zu eng gefaßt ist, wenn man sie darin erblickt, die Welt als eine Summe von Bewegungserscheinungen darzustellen. Zu dieser Überzeugung führten namentlich die großen Fortschritte auf dem Gebiete der Elektrizität und die allgemeine Verbreitung der Maxwellschen Anschauungen über das Wesen der elektrischen und magnetischen Wirkungen.

Digitized by Google

In jüngster Zeit aber sind gerade auf dem Boden der Elektrizitätslehre neue Anschauungen emporgewachsen, welche eine den Lehren von den Atomen der Materie völlig analoge Atomistik der Elektrizität ins Leben gerufen haben. Und so sehen wir in dem der kinetischen Gastheorie früher besonders abgeneigten Reich der Elektrizitätslehre neuerdings Methoden in Anwendung, welche denen der kinetischen Gastheorie nahe verwandt sind. Es hat daher den Anschein, als ob diese Theorie, wenn auch in anderem Gewande und auf anders geartete Elementarteilchen angewendet, einer neuen Blüte entgegenginge, und deshalb muß es mit Dank begrüßt werden, daß ein auf dem Gebiet der kinetischen Gastheorie wohlbekannter Forscher es unternommen hat, die Fortschritte dieser Theorie ohne allzu schweres mathematisches Rüstzeug kurz und übersichtlich darzustellen.

Dem Zwecke des Buches, jedem Physiker verständlich zu sein, ist es sehr angemessen, daß in einer ausgiebigen Einleitung (59 S.) zunächst ein Grundriß der Theorie gegeben wird, welcher in gedrängter Form die klassischen Arbeiten und ihre Resultate darstellt. Dann folgt der eigentliche Hauptteil des Werkes, die Besprechung der wichtigsten Fortschritte, welche seit Maxwell gemacht worden sind, hauptsächlich durch Boltzmann, dann durch Sutherland, den Verfasser, Reinganum und andere. Diese Fortschritte beziehen sich teils auf die strengere Begründung und methodische Durchdringung der Grundlagen der Theorie, wodurch der Sinn des Maxwellschen Verteilungsgesetzes und des Entropiegesetzes klarer zutage tritt, teils auf das Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung unter die Moleküle bei Einwirkung äußerer Kräfte, teils auf die Berücksichtigung der räumlichen Ausdehnung der Moleküle und der zwischen ihnen wirkenden Anziehungskräfte. Wir sehen, wie auf diese Weise eine bessere theoretische Begründung und zugleich eine den Tatsachen sich besser anschließende Form der van der Waalsschen Zustandsgleichung gewonnen wird, wie sich für die Abhängigkeit der inneren Reibung von der Temperatur ein theoretischer, durch die Beobachtungen gut bestätigter Ausdruck ergibt, wie der Temperatursprung bei der Wärmeleitung zwischen Gas und fester Wand seine theoretische Erklärung findet, und endlich, daß auch schon vielversprechende Ansätze zu einer kinetischen Theorie der Flüssigkeiten gemacht worden sind.

Es wäre sehr erfreulich, wenn dieses Buch dazu beitragen würde, das Interesse an der kinetischen Gastheorie neu zu beleben und eine rüstige Schar junger Forscher diesem in der letzten Zeit vernachlässigten Arbeitsgebiet zuzuführen.

Breslau. E. Pringsheim.

Th. Reye. Die Geometrie der Lage. Zweite Abteilung. Vierte Auflage. 335 S. Stuttgart 1907, A. Kröner.

Nach dem großen Erfolge und der weiten Verbreitung, die Reyes Buch bereits gefunden hat, ist es nicht nötig, den vorliegenden Band der neuen Auflage in seinem ganzen Inhalte zu besprechen und zu beurteilen. Es genügt, das hervorzuheben, was verändert oder neu hinzugekommen ist. Die Abschnitte, die gänzlich neu sind, betreffen wesentlich die Liniengeometrie. Sie sind auf Anregung von Herrn Jolles entstanden, dessen Untersuchungen einen großen Teil ihres Inhaltes bilden, und behandeln eine

Digitized by Google

besondere, sehr interessante Ausgestaltung der Liniengeometrie, die sich den Reyeschen Untersuchungen über lineare Mannigfaltigkeiten geometrischer Gebilde unmittelbar anfügt.

Die Anpassung der Liniengeometrie an die synthetischen Methoden Poncelets und Steiners, welche die Grundlagen des Reyeschen Werkes bilden, ist nicht ohne Schwierigkeit. Analytisch ist es sehr einfach und einleuchtend, daß zu Punkt und Ebene die gerade Linie als gleichberechtigtes Raumelement hinzuzutreten hat, daß Regelschar, Strahlenkongruenz und Strahlenkomplex als die Liniensysteme von einer, zwei und drei Dimensionen zu untersuchen sind, und zwar zunächst die linearen Systeme, wobei die „lineare Regelschar" einer quadratischen Regelfläche angehört. Synthetisch gelangt man aber zu diesen Systemen sozusagen nur auf Umwegen. Die Regelschar allerdings erhält man sofort aus dem Schnitt homologer Ebenen zweier projektiver Ebenenbüschel. Geht man aber von der projektiven Zuordnung der Strahlen- und Ebenen*bündel* aus, so erzeugt ein Strahlenbündel mit einem ihm zugeordneten Ebenenbündel eine allgemeine Fläche 2. Ordnung, zwei einander zugeordnete Ebenenbündel die Kongruenz der Bisekanten einer Raumkurve 3. Ordnung. Diese Kongruenz ist von der 1. Ordnung, d. h. durch einen beliebigen Punkt geht *ein* ihr angehörender Strahl, aber von der 3. Klasse, d. h. in einer beliebigen Ebene liegen drei ihrer Strahlen. Die Kongruenz wird erst dann linear, d. h. von der 1. Ordnung *und* 1. Klasse, wenn die beiden Ebenenbündel zwei Ebenen entsprechend gemein haben. So tritt die lineare Kongruenz nur als Spezialfall einer allgemeineren Kongruenz auf. Ebenso ist es mit dem linearen Strahlenkomplex. Nimmt man zwei projektive Strahlenbüschel, die in irgend zwei Ebenen des Raumes liegen, und sucht alle Strahlen, welche je zwei homologe Strahlen dieser Büschel schneiden, so findet man einen quadratischen Strahlenkomplex: die durch einen Punkt gehenden Komplexstrahlen erfüllen einen Kegel und die in einer Ebene liegenden Komplexstrahlen umhüllen einen Kegelschnitt. Erst wenn die beiden erzeugenden Strahlenbüschel einen Strahl entsprechend gemein haben, wird der erzeugte Strahlenkomplex linear, dann gehen durch jeden Punkt und liegen in jeder Ebene die Strahlen eines gewöhnlichen Büschels.

Eine systematischere Begründungsart des linearen Strahlenkomplexes wird durch die Raumkurve 3. Ordnung vermittelt. Wie die Fläche 2. Ordnung ein *Polarsystem*, so begründet die Raumkurve 3. Ordnung ein *Nullsystem*. Nämlich die Schmiegungsebenen dreier Punkte auf ihr schneiden sich in einem Punkte auf deren Verbindungsebene, und so findet man die Zuordnung des Nullsystems, bei dem jedem Punkte eine durch ihn gehende Ebene und umgekehrt jeder Ebene ein in ihr liegender Punkt entspricht. Die Nullstrahlen des Nullsystems, d. h. die Strahlen, die in jeder Ebene durch deren Nullpunkt gehen, bilden aber einen linearen Strahlenkomplex.

Man kann die lineare Strahlenkongruenz und den linearen Strahlenkomplex synthetisch auch durch 4 resp. 5 ihrer Strahlen festlegen, wie man eine Regelschar durch 3 ihrer Strahlen festlegt. Wenn nämlich 4 Strahlen gegeben sind, so erhält man alle Strahlen einer linearen Kongruenz, indem man durch je 3 der 4 Strahlen eine Regelschar bestimmt und durch je 3 der so gefundenen Strahlen eine neue Regelschar u. s. f. Diese Bestimmungsart bildet keinen bequemen Weg zu den Eigenschaften dieser Strahlen-

Digitized by Google

systeme, sie wird aber von Bedeutung, wenn man nun den linearen Strahlenkomplex als Element auffaßt und zu linearen Systemen von Strahlenkomplexen fortschreitet. Die Strahlenkomplexe nämlich, welche 4 Strahlen gemein haben, haben im allgemeinen alle Strahlen einer linearen Kongruenz gemein und bilden nach Reyes Ausdruck einen *Komplexbüschel*. Die Komplexe, welche 3 windschiefe Geraden gemein haben, haben alle Strahlen einer Regelschar gemein und bilden einen *Komplexbündel*. Die Komplexe endlich, welche 2 Strahlen gemein haben, bilden ein *Komplexgebüsch*. Das lineare Komplexsystem höchster Stufe, den *Komplexwald*, wie Reye nach Jolles' Vorschlag sagt, erhält man, indem man die Komplexe aufsucht, die zu einem fest gegebenen Komplexe in einer bestimmten Beziehung stehen. Diese Beziehung drücken Jolles und Reye so aus, daß sie die Komplexe nullinvariant nennen. Sie ist analytisch durch das Verschwinden einer bilinearen Invariante beider Komplexe gegeben.

Die Untersuchungen über lineare Systeme von Komplexen gewinnen an Reiz, wenn man insbesondere deren Hauptachsen aufsucht und die Lage und Verteilung dieser Hauptachsen im Raume erforscht. Unter anderem bilden die Hauptachsen der Komplexe eines Büschels eine metrisch spezialisierte Regelfläche 3. Grades, das bekannte *Zylindroid*. Jolles hat im Anschluß daran eine metrische Theorie der linearen Strahlenkongruenzen ausgearbeitet, die er als ihre Fokaltheorie bezeichnet und der Reye einen kurzen Abschnitt im Anhange seines Buches gewidmet hat.

Auch die ziemlich durchgreifende Änderung in der Terminologie ist auf Jolles' Einfluß zurückzuführen. Manche Begriffe treten dadurch viel plastischer hervor und erscheinen schärfer umrissen. So sind die Bezeichnungen Unisekante, Bisekante, Trisekante für die eine Raumkurve einfach, zweifach, dreifach schneidenden Geraden recht glücklich gewählt, zumal sich ihnen Uni-, Bi- und Triplanare als die dual entsprechenden Begriffe gegenüberstellen. Wenn die Gesamtheit der Schmiegungsebenen einer Raumkurve 3. Ordnung als Ebenengewinde bezeichnet wird, so ist die Benennung wohl einfach und anschaulich, aber man vermißt eine ebenso einfache Bezeichnung für die Kurve selbst, wäre es auch nur das etwas lange und ungeschickte Wort „Raumkegelschnitt", das der Bezeichnung „Raumhyperbel", „Raumellipse", „Raumparabel" für die einzelnen Arten dieser Kurven korrespondieren würde. Auch für die Flächen 2. Ordnung fehlt ein einfaches Wort, dem englischen „Quadric" entsprechend.

Die Abschnitte, welche die Raumkurven 3. Ordnung und was damit zusammenhängt behandeln, hat Reye einer gründlichen Umarbeitung unterzogen, und diese Theorie, welche den eigentlichen Glanzpunkt der synthetischen Geometrie bildet, ist dadurch noch abgerundeter und durchsichtiger geworden. In den Anhang sind die meisten Abschnitte verwiesen worden, welche metrische Sätze betreffen, so die auch für die Mechanik wertvolle Untersuchung über den Achsenkomplex eines Nullsystems, ferner die Fokaltheorie der Flächen 2. Grades, die an fast vergessene französische Untersuchungen (von Chasles u. a.) aus der ersten Hälfte des vorigen Jahrhunderts anknüpft, und eine damit in Verbindung stehende Behandlung kollinearer Räume, die sich auf eine Arbeit von Smith gründet. Die Fassung dieser schönen Sätze scheint aber fast zu knapp, und man bedauert, sie nicht in ausführlicherer Darstellung mit größerem Behagen genießen zu können. Es

Digitized by Google

ist um so mehr die Zurückhaltung des Verfassers zu bewundern, der den didaktischen Zweck des Buches und damit zusammenhängend die Einhaltung eines gewissen bescheidenen Umfanges sich zum obersten und unverbrüchlich festgehaltenen Grundsatz gemacht hat. Er hat deshalb auch ein echtes und rechtes Lehrbuch geschaffen.

Straßburg i. E. H. E. TIMERDING.

P. Riebesell. Über den Kurzschluß der Spulen und die Vorgänge bei der Kommutation des Stromes eines Gleichstromankers. Dissertation. 64 S., 1 Figurentafel. 8°. Kiel 1905.

Den ersten und wichtigsten Teil der vorliegenden Dissertation bildet eine Kritik der Arbeiten der Herren Arnold und Mie (Elektrotechn. Ztschr. 1899; Arnold: Gleichstrommaschine, Berlin 1902/3), und auf diese Kritik soll hier hauptsächlich eingegangen werden, weil mit den Ergebnissen derselben auch das Folgende zum großen Teile steht oder vielmehr fällt; denn, um es gleich von vornherein zu sagen: die Herren Arnold und Mie haben in der Hauptsache Herrn Riebesell gegenüber Recht; ihre Resultate lassen zwar z. T. eine einfachere Herleitung und strengere Begründung zu, sie sind aber in dem wesentlichen Punkte richtig, die des Herrn Riebesell falsch.

Es handelt sich um die Integration der Differentialgleichung der Kurzschlußstromkurve

$$(1) \qquad \frac{di}{dx} + i\left(\tau' + \frac{\tau}{x} + \frac{\tau}{1-x}\right) + J\tau\left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{x}\right) + \frac{ET}{L} + \frac{HT^2}{L}x = 0,$$

und zwar um dasjenige Integral, welches für $x = 0$ den Wert $i = J$ annimmt. Der Punkt $x = 0$ ist i. a. eine singuläre Stelle der Differentialgleichung (1); aber gerade für dasjenige Partikularintegral, welches für $x = 0$ den Wert $i = J$ annimmt, ist $x = 0$ eine reguläre Stelle, da sich in diesem Falle die Glieder $\frac{J\tau}{x}$ gegeneinander aufheben und demnach $\frac{di}{dx}$ für $x = 0$, $i = J$ endlich bleibt. Man erhält dieses Integral am einfachsten durch Quadratur; das allgemeine Integral der Differentialgleichung (1) lautet nämlich:

$$i = Ce^{-\tau' x}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{-\tau}$$

$$+ e^{-\tau' x}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{-\tau}\int_0^x e^{\tau' x}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\tau}\left[J\tau\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1-x}\right) - \frac{ET}{L} - \frac{HT^2}{L}x\right]dx;$$

τ und τ' sind positive Größen, und zwar möge τ zunächst keine ganze Zahl sein. Soll nun $i = J$ für $x = 0$ werden, so muß darin $C = 0$ genommen werden, da sonst i für $x = 0$ unendlich groß wird. Was der Verfasser gegen die Schlußweise des Herrn Arnold einzuwenden hat, ist dem Ref. unerfindlich: der einzige *endliche* Wert, den i für $x = 0$ annehmen *kann*, ist eben $i = J$. — Das fragliche Integral lautet also, wenn zur Abkürzung der Integrand mit A bezeichnet wird:

$$(2) \qquad i = e^{-\tau' x}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{-\tau}\int_0^x A\,dx$$

Digitized by Google

dasselbe läßt sich in eine mit J beginnende, nach ganzen positiven Potenzen von x fortschreitende Potenzreihe entwickeln, *welche*, wie der Verf. richtig zeigt, auch noch für $x = 1$ konvergiert. Es ist das nichts Ungewöhnliches: i ist nämlich, wie wir sogleich sehen werden, eine *mehrwertige* Funktion und der singuläre Punkt $x = 1$ ihr Verzweigungspunkt, in welchem sie *endlich* bleibt.

Wir kommen nun zu dem springenden Punkte: das durch (2) *in eindeutiger Weise bestimmte* Partikularintegral muß festgehalten werden; es darf nicht etwa *neuen* Bedingungen unterworfen, sondern muß *analytisch fortgesetzt* werden, und dann ergibt sich erst, daß i von selber in $x = 1$ den Wert $i = -J$ annimmt. Der Punkt $x = 1$ ist nach Poincarés Bezeichnung ein Knotenpunkt (nœud), d. h. *sämtliche* Partikularintegrale nehmen in $x = 1$ den Wert $i = -J$ an, also auch das Integral (2); das allgemeine Integral der Differentialgleichung (1) hat nämlich in der Umgebung von $x = 1$ die Form

$$i = P(1-x) + C\left(\frac{1-x}{x}\right)^{\tau} e^{-\tau' x},$$

worin P eine mit $-J$ beginnende Potenzreihe und C die willkürliche Konstante bedeutet. In dieser Form ist also auch das Integral (2) enthalten, und die Frage, um die sich nun alles dreht, lautet: ist für dieses Integral C gleich Null oder nicht? Der Verf. beweist durch einige arge Fehlschlüsse (vergl. bes. S. 22 und 34), daß stets $C = 0$ ist. Um den Verf. ganz sicher und ohne große Rechnungen zu überzeugen, daß C i. a. *nicht* gleich Null ist[1]), nehmen wir die einfachere Differentialgleichung, auf die Herr Mie in seiner Erwiderung (Ztschr. für Math. und Phys. **53**, 37—60) das ganze Problem zurückführt, indem er die Abweichung der Kurzschlußstromkurve von dem geradlinigen Verlauf betrachtet:

$$\frac{dz}{dx} + z\left(\tau' + \frac{\tau}{x(1-x)}\right) - x = 0, \tag{3}$$

und beschränken uns, um Weitläufigkeiten zu vermeiden, auf den Fall $\tau < 1$, bemerken aber *ausdrücklich*, daß diese Beschränkung ähnlich wie bei der Bestimmung der Substitutionskoeffizienten der hypergeometrischen Reihe *aufgehoben werden kann*. Das Integral (2) lautet hier:

$$z = \varphi(\tau, \tau', x) = e^{-\tau' x}\left(\frac{1-x}{x}\right)^{\tau} \int_0^x e^{\tau' x} \frac{x^{\tau+1}}{(1-x)^{\tau}}\, dx,$$

und zwar wird $z = 0$ für $x = 0$. Um eine Entwicklung desselben in der Umgebung des Punktes $x = 1$ zu finden, setzt man $1 - x = y$ und erhält:

$$z = e^{\tau' y}\left(\frac{y}{1-y}\right)^{\tau} \int_y^1 e^{-\tau' y} \frac{(1-y)^{\tau+1}}{y^{\tau}}\, dy, \tag{5}$$

---

1) Inzwischen hat Herr Riebesell seinen Fehler eingesehen (E. T. Z. 1906, Heft 3) und in der Ztschr. für Math. u. Phys. **53**, 337—370 selber Methoden für die Bestimmung der Konstante C angegeben.

Digitized by Google

oder, wenn der Integrand zur Abkürzung mit B bezeichnet wird:

$$z = e^{\tau' y}\left(\frac{y}{1-y}\right)^{\tau}\int_0^1 B\,dy - e^{\tau' y}\left(\frac{y}{1-y}\right)^{\tau}\int_0^y B\,dy.$$

Der zweite Teil von z ist eine mit $\frac{y}{\tau-1}$ beginnende Potenzreihe; die Entwicklung von z in der Umgebung von $x = 1$, d. h. $y = 0$ hat also in der Tat die Form:

$$z = P(y) + Ce^{\tau' y}\frac{y^{\tau}}{(1-y)^{\tau}},$$

worin C den *wohldefinierten*, i. a. *von Null verschiedenen* Wert $\int_0^1 B\,dy$ besitzt, sodaß $y = 0$, d. h. $x = 1$ für z ein Verzweigungspunkt ist. (Der Verf. hat auf S. 22 nicht beachtet, daß die obere Integrationsgrenze 1 und nicht 0 ist.) — Das bestimmte Integral $\int_0^1 B\,dy$ genügt übrigens, aufgefaßt als Funktion von τ', einer homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung; vergl. z. B. Schlömilch, Höhere Analysis, 2. Band, S. 522 ff.). Für $\tau > 1$ versagt diese einfache Methode, weil dann $\int_0^1 B\,dy$ an der unteren Grenze 0 unendlich groß wird; in diesem Falle führen, wie bereits oben hervorgehoben, andere Methoden (vergl. auch Mie l. c. p. 46; die dortige Begründung kann noch strenger formuliert werden) zum Ziele. Ist τ eine ganze Zahl, so tritt in (5) bei der Integration ein Logarithmus auf, und zwar lautet das logarithmische Glied, wenn in der Entwicklung von B nach Potenzen von y der Koeffizient von y^{-1} gleich C' ist:

$$-C'e^{\tau' y}\left(\frac{y}{1-y}\right)^{\tau}\ln y$$

(die Ableitung des Herrn Mie ist etwas schwerfällig).

Soweit §§ 1—7. § 8, in welchem die günstigsten Bedingungen für den funkenfreien Gang der Maschine entwickelt werden, basiert auf der Voraussetzung $C = 0$, muß also fallen. Die übrigen Paragraphen beziehen sich auf die Form der nach dem zweiten Kirchhoffschen Satze aufgestellten Differentialgleichung selber, indem mehrere Daten berücksichtigt oder vervollständigt werden, die von den Herren Arnold und Mie vernachlässigt wurden. So wird in § 9 die gegenseitige Induktion der Spulen berücksichtigt. In § 10 wird die kommutierende elektromotorische Kraft, die von den Herren Arnold und Mie als lineare Funktion der Zeit angenommen wurde, gleich einem Ausdruck von der Form $a \sin(\varphi + 2\pi nt) + b \cos 2\pi nt$ gesetzt, worin φ den Bürstenverschiebungswinkel bedeutet; es wird betont, daß die Bürsten nicht in der neutralen Zone stehen dürfen, und die Aufgabe gestellt, für eine bestimmte Stromstärke diejenige kommutierende EMK und damit diejenige Lage der Bürsten zu finden, für welche keine Funken auftreten. In § 11 wird die vollständige Differentialgleichung der Kurzschlußstromkurve aufgestellt; in § 12 werden die Hauptgleichungen

Digitized by Google

der Theorie der Gleichstromdynamomaschine behandelt (Abhängigkeit der Größen J, n und φ voneinander). In § 13 wird die Wirkung einer eingeschalteten Kapazität untersucht, in § 14 die Wirkung der Eigenkapazität der kurzgeschlossenen Spule (die „Telegraphengleichung"). Den Schluß bildet die Angabe der bezüglichen elektrotechnischen, physikalischen und mathematischen Literatur.

Berlin-Charlottenburg. G. Wallenberg.

C. Block. Lehr- und Übungsbuch für den planimetrischen Unterricht an höheren Schulen. Zweiter Teil: Unter-Tertia. IV u. 58 S. 8°. Leipzig und Berlin 1906, B. G. Teubner. geb. ℳ 0,80.

Auch der zweite Teil des Blockschen Übungsbuches, von welchem Teil I im Bd. X S. 180 besprochen wurde, zeichnet sich durch Klarheit und Sorgfalt der Darstellung aus, sowie durch das Handinhandgehen von Lehrsätzen und Konstruktionsaufgaben. Vermißt hat Ref. Konstruktionsaufgaben mit gegebenem Inhalt, die sich an die Sätze über Inhaltsgleichheit und an die Verwandlungsaufgaben naturgemäß anschließen.

Gera. E. Kullrich.

H. Thieme. Leitfaden der Mathematik für Realanstalten. Erster Teil: Die Unterstufe. Dritte Auflage. 128 S. 8°. Leipzig 1907, G. Freytag. geb. ℳ 1,60.

Die dritte Auflage des empfehlenswerten Buches weicht von der zweiten nur in ganz vereinzelten Punkten ab. In gedrängter Form wird das mathematische Pensum der Realanstalten bis *UII* einschließlich geboten und für die geometrischen Disziplinen zugleich Übungsstoff. S. 7—18 sind dem geometrischen Vorkursus gewidmet, S. 18—89 der eigentlichen Planimetrie; S. 89—99 bringen die Trigonometrie, S. 99—109 die Stereometrie, S. 109—128 endlich die Arithmetik und Algebra. Hier ist in der neuen Auflage eingefügt die Veranschaulichung der Zahlenreihe durch Punkte einer Geraden.

Gera. E. Kullrich.

Lackemann-Kreuschmer. Die Elemente der Geometrie. Ein Lehr- und Übungsbuch für den geometrischen Unterricht an sechsklassigen höheren Lehranstalten. Erster Teil: Planimetrie. Achte, verbesserte und vermehrte Auflage. Zweiter Teil: Trigonometrie und Stereometrie. Mit einem Anhange: I. Der Universal-Winkelmeßapparat. — II. Der neue Transporteur für Winkelfunktionen. Fünfte, verbesserte und vermehrte Auflage. Beide Teile unter Berücksichtigung der preußischen Lehrpläne vom Jahre 1901. 136 S. u. 120 S. 8°. Breslau 1906, F. Hirt. kart. je ℳ 1,30.

Die Elemente der Geometrie von Lackemann-Kreuschmer geben auch in den neuen Auflagen eine treffliche Grundlage für den Unterricht ab. Recht beachtenswert ist der Anhang des zweiten Teils. Möchten doch überall Meßvorgänge, wie sie dort beschrieben werden, „die Anschaulichkeit des Unterrichts, das Interesse und das Verständnis der Schüler für trigonometrische Vermessungsaufgaben" erhöhen, möchte überall die „Lösung von

Digitized by Google

praktischen Aufgaben der Geometrie und Trigonometrie unter Verwendung geeigneter einfacher Meßapparate" in Angriff genommen werden! „Dabei werden die Grundlagen der mathematischen Wissenschaften veranschaulicht, somit gründlich verarbeitet und im innersten Kern verstanden" werden.

Gera. E. Kullrich.

A. Koenig. Bürgerliche Rechnungsarten. Bd. 9. Goldene Schülerbibliothek. Wie werde ich versetzt? Hilfsmittel zur Erzielung guter Haus- und Klassenarbeiten und um die Prüfung in die höhere Klasse zu bestehen. 80 S. — Arithmetik und Algebra I. Bd. 10 derselben Sammlung. 94 S. — Lösung planimetrischer Konstruktionsaufgaben I. Bd. 12 derselben Sammlung. 88 S. Kattowitz und Leipzig ohne Jahreszahl. Carl Siwinna, jedes Bändchen ℳ 1,—.

Wenn es gelingt, einen Schüler, der in seinen Leistungen zurückbleibt, dazu zu veranlassen, daß er sich mit besonders liebevollem Fleiß an das Nachlernen macht, so kann ein günstiger Erfolg auch in wenig aussichtsreichen Fällen eintreten. Die goldene Schülerbibliothek: Wie werde ich versetzt? will eine solche Einwirkung auf ihre Leser ausüben; daneben will sie Hilfsbücher für die Eltern der Schüler bieten, Anregungen für die Lehrer und ein „Universalmittel" für die Abiturienten bei ihren Repetitionen. Bezüglich des Hauptzweckes bleibt zu wünschen, daß die durch die goldene Schülerbibliothek erstrebte Einwirkung in der Regel dem Unterricht in der Schule und dem seitens der Schule eingeführten Lehrbuch gelingt. Auch von den Ausnahmefällen werden aber immer nur wenige so beschaffen sein, daß ein Bücherstudium dem Schüler Hilfe bringen kann. So dürfte die nutzbringende Verwendbarkeit der goldenen Schülerbibliothek eine recht begrenzte sein. A. Koenig hat in den drei oben angezeigten Bändchen den i. a. zweckmäßig ausgewählten Stoff ausführlicher dargestellt (namentlich die Aufgabenbehandlung), als dies für die den normalen Verhältnissen angepaßten Lehrbücher angebracht ist. Er hat absichtlich Wiederholungen nicht vermieden und hat neben den Angaben über das „Wie?" auch solche über das „Wie nicht?" gemacht, um die Schüler zur Vermeidung von Fehlern anzuleiten. Die Frage „Warum?" tritt demgegenüber gelegentlich zu weit zurück, so bei der Vorzeichenbestimmung für Produkte und Quotienten oder bei der Multiplikation von Brüchen.

Gera. E. Kullrich.

Močniks logarithmisch-trigonometrische Tafeln. Sechste vermehrte Auflage, besorgt von Johann Reidinger. XIV u. 100 S. 8°. Wien F. Tempsky und Leipzig G. Freitag 1906. geb. ℳ 2,00.

Močniks Tafeln sind, wo man sechsstellige Logarithmen anwendet, wegen des deutlichen Druckes und der klaren Anordnung zu empfehlen. Allerdings vermißt Ref. bei den Angaben der Differenzen für 1″ die Konsequenz. Teils wird die Differenz aus der sechsstelligen Tafel berechnet und steht dann gelegentlich mit der siebenstelligen Tafel im Widerspruch, teils wird sie aus der siebenstelligen Tafel entnommen, wobei sie umgekehrt zu der aus der sechsstelligen Tafel berechneten im Gegensatz stehen kann. S. 36 ist z. B. für log sin 1° 11′ 10″ und log sin 1° 11′ 20″ nach dem

Digitized by Google

Verfahren der Regeldetri aus der vorliegenden sechstelligen Tafel berechnet als Wert für D: 101,5 und 101,4, während aus siebenstelligen Tafeln 101,6 und 101,3 folgen würde. Umgekehrt ist z. B. S. 49 für log sin $10^0\,11'$ und log sin $10^0\,12'$ aus siebenstelligen Tafeln die Differenz angegeben als 11,71 und 11,69, während der Regeldetriansatz aus Močniks Tafel selbst ergibt: 11,72 und 11,70. Pädagogisch ist das erste Verfahren vorzuziehen, rechnerisch das zweite. Einheitlichkeit dürfte aber für spätere Auflagen zu fordern sein. Da man für den Schulunterricht mit fünfstelligen, oft auch mit vierstelligen Tafeln auskommt, so ist es wohl am besten, wenn Reidinger das zweite Verfahren konsequent durchführt.

Gera. E. Kullrich.

G. Rößler, Die Fernleitung von Wechselströmen. Mit 60 Abb. u. VII Tafeln. VIII, 243 S. in 8°. Verlag von J. Springer, Berlin 1905. Preis ℳ 7,—.

Mit der praktischen Beherrschung hoher elektrischer Spannungen haben sich die Leitungen auf weite Entfernung mächtig entwickelt. 60 000 Volt und 500 km bezeichnen noch nicht die erreichten Grenzwerte. Dieser Entwicklung hinkte nun allerdings die rechnerische Behandlung der diesbezüglichen Strom- und Spannungsverteilung in Hochspannungs-Leitungen nach, was dem Ausspruche des großen Theoretikers Heaviside „Die Theorie ist nur die Essenz der Praxis" entspricht.

Der Verfasser gibt in den vier ersten Abschnitten die symbolische Darstellung und die Rechnungsregeln von Wechselstromgrößen entweder als komplexe Zahl, wie es Steinmetz in die praktische Elektrotechnik eingeführt hat, oder als e-Potenz, wie sie die Eulersche Gleichung bestimmt. Auf eine lange Leitung mit Selbstinduktion werden diese Vorführungen angewendet, während im 5. und 6. Abschnitte noch die Ladungserscheinungen infolge Kapazität und das Verhalten von angeschlossenen Kondensatoren im Wechselstrombetriebe überhaupt hinzutreten.

Im 7. Abschnitte wird ein künstliches Kabel betrachtet und das Ergebnis in drei Tafeln wiedergegeben. Je gleichförmiger die Verteilung der Größen längs des Kabels angenommen wird, desto mehr nähert es sich dem natürlichen Falle.

Im 8. und 9. Abschnitte wird für das Kabel aus Differentialgleichungen die Verteilung der Spannungen und Ströme gewonnen. Diese Darstellung erheischt gegenüber der gewöhnlichen ohne symbolische Größen alle Anerkennung. Hätte der Verfasser die hyperbolische Trigonometrie benutzen wollen, so hätte sich die von Kennelly gegebene Form gezeigt. Die nun folgenden Angaben für Drehstromkabel für Spannungen von 3000, 5000 und 10000 Volt sind recht nützlich. Der 10. und 11. Abschnitt erörtert das unendlich lange Kabel und das endliche am Ende offene. Eine vorzügliche graphische Darstellung der Resultate muß hervorgehoben werden. Heaviside und Blakesley haben die überraschenden Erscheinungen schon vor vielen Jahren aufgeklärt als die Ferrantikabel den Praktikern Rätsel aufgaben. Alle diese komplizierten Fragen finden im Buche eine scharfe, wenn auch viele Aufmerksamkeit erheischende Antwort.

Das Schlußkapitel wird dem am Ende belasteten Kabel gewidmet.

Digitized by Google

Es wird gefunden, daß selbst bei geringer Strombelastung und hohen Spannungen die Kapazität in Betracht zu ziehen ist, und daß die volle Ausnutzung des Kupferquerschnittes zufolge des Ladestromes nicht möglich sei. Am Ende wird noch für die Kabelfabrikanten eine Anleitung gegeben, wie aus den Kabelkonstanten die Leitungsgrößen für verschiedene Längen gewonnen werden. Die Bestimmung des günstigsten Kabelquerschnittes bei Projekten beschließt das Werk, welches nach Inhalt, innerer und äußerer Form volle Anerkennung und weite Verbreitung nicht nur bei Elektrotechnikern, sondern auch bei den Physikern und Mathematikern verdient, welche um die Anwendung ihrer Wissenschaft besorgt sein wollen oder müssen. Von literarischen Hinweisen hat der Verfasser, jedenfalls aus raumwirtschaftlichen und lehrmeisterlichen Gründen, gänzlich abgesehen.

Delft. Josef Herzog.

Max Bernhard. Darstellende Geometrie mit Einschluß der Schattenkonstruktionen und der Perspektive. Als Leitfaden für den Unterricht an technischen Lehranstalten, Oberrealschulen und Realgymnasien, sowie zum Selbststudium herausgegeben. Mit 311 Figuren im Texte. Zweite, verbesserte und stark vermehrte Auflage. Stuttgart 1905, Heinrich Enderlen (vorm. Karl Aue). XI und 278 S. 8°. Preis: Geb. ℳ 5.80.

Die Worte der Anerkennung, die dem Buche bei seinem ersten Erscheinen gezollt wurden[1]), haben sich, wie das rasche Erscheinen dieser zweiten Auflage zeigt, als vollkommen berechtigt erwiesen. Der strebsame Verfasser war aber seitdem bemüht, seinem Buche noch mehrseitigere Verwendbarkeit zu geben, indem er den Stoff der ersten Auflage durch Einschiebungen ergänzte, ferner die Perspektive als IV. Teil neu hinzufügte. Der Umfang des Buches ist dadurch um 83 S. gewachsen.

Was die Einschiebungen betrifft, so sind jetzt die Brennpunkteigenschaften der Kegelschnitte ausführlicher behandelt und einige für den Zeichner wertvolle Konstruktionen über diese Kurven hinzugekommen. Die Aufnahme einiger Begriffe und Konstruktionen über Kurven im allgemeinen, insbesondere aber des Kapitels über die für den Maschinenbauer wichtigen zyklischen Kurven (unter Verwendung der einfachsten kinematischen Sätze) wird einem großen Leserkreis willkommen sein. Das Kapitel über Drehflächen ist durch die Umrißermittlung für orthogonale Projektion sowie verschiedene Beispiele über ebene Schnitte erweitert worden, wobei die auf den Anfänger stets verblüffend wirkenden Schnitte mit Tangentialebenen in hyperbolischen Punkten mit Recht den Vorzug erhielten. Überhaupt erkennt man in dem Buche das Streben des Verfassers nach Auffrischung des althergebrachten Lehrstoffes der darstellenden Geometrie an Mittelschulen durch Aufnahme neuer wissenschaftlicher Gedanken, soweit sie dem Verständnis seines Schülerkreises zugänglich sind, ein Streben, das bei der Abfassung mathematischer Lehrbücher für Gymnasien und Realschulen lebhafte Nachahmung verdiente.

In dem neu hinzugekommenen IV. Teil wird nach Erklärung der erforderlichen Grundbegriffe zuerst die Konstruktion eines perspektiven Bildes

1) Arch. Math. Phys. (3) **4** (1903) S. 343.

Digitized by Google

aus den Normalrissen gezeigt („Geometrische Perspektive"). Dabei vermisse ich einen Paragraphen über die Wahl des Auges zur Erzielung eines günstigen Bildes, die erfahrungsgemäß dem Anfänger Schwierigkeiten bereitet. Dann wird in der „freien Perspektive" die Durchführung der Grundkonstruktionen wie: Zeichnen ebener Figuren, Ermittelung der Länge von Strecken, Zeichnen von Kreisen etc., gezeigt und deren Anwendungen auf Schattenkonstruktionen und die Umrißermittlung von Drehflächen, insbesondere der Kugel, gezeigt.

Ich bin überzeugt, daß das Buch in seiner erweiterten Form noch mehr Freunde gewinnen wird.

Wien, im Juni 1906. E. Müller.

Doehlemann, Projektive Geometrie. 3. Aufl. mit 91 Figuren. 181 S. Leipzig 1905, Samml. Göschen. *M* 0,80.

Gegen die vorige Auflage sind nur 2 wichtige Änderungen zu erwähnen, die wohl durch die damalige Besprechung in dieser Zeitschrift (siehe (3) **6**, 163) veranlaßt worden sind, erstens der Wegfall des Doppelfarbendrucks und zweitens die Hinzufügung eines Paragraphen über die Involutionen am vollständigen Viereck und Vierseit.

Berlin. P. Schafheitlin.

Mahler, Ebene Geometrie. Mit 110 zweifarbigen Figuren. 4. Auflage. Leipzig 1905, Samml. Göschen. *M* 0,80.

Die Änderungen gegen die vorige Auflage, die in dieser Zeitschrift ((3) **4**, 151) besprochen wurde, sind nicht erheblich. Einige Sätze und Konstruktionen erhielten bessere oder einfachere Fassung, die Zahl der Übungen ist vermehrt und die historischen und sprachlichen Bemerkungen sind ergänzt worden. Betreffs der Figuren möchte ich mich gegen den zweifarbigen Druck aussprechen; die roten Linien weichen in den meisten Fällen doch recht erheblich von dem Ideale einer Geraden oder eines Kreises ab.

Berlin. P. Schafheitlin.

Arnold Emch. An introduction to projective geometry and its applications. An analytic and synthetic treatment. First edition, first thousand. — New York, John Wiley & Sons; London, Chapman & Hall, limited. 1905. VII und 267 S.

Man kann innerhalb der Mathematik zwischen einer systematischen und einer praktischen Richtung unterscheiden. Die Vertreter der ersteren empfinden vornehmlich das Bedürfnis, ausgehend von möglichst eng umgrenzten Grundlagen in rein logischer Entwicklung zuerst das Allgemeinere und hieraus das Speziellere abzuleiten. Sie interessieren sich für die ganze Kette des Zusammenhangs, die die Einzelerscheinung schließlich mit den Grundsätzen und Grundbegriffen verknüpft. Die Vertreter der praktischen Richtung andererseits sind bestrebt, von einer als feststehend betrachteten Basis aus den gerade vorliegenden Zweck, sei es der Beweis eines einzelnen Satzes oder eine ganze Summe von Kenntnissen, möglichst schnell und leicht

Digitized by Google

zu erreichen, wenn dabei auch noch andere, nicht auf jener Basis stehende Sätze als bekannt angesehen und benutzt werden. Beide Richtungen haben ihre Berechtigung und sind für eine gedeihliche Entwicklung der Mathematik unentbehrlich.

Das vorliegende Buch ist in ausgesprochener Weise ein Erzeugnis der praktischen Richtung. Es verfolgt den Zweck, den Leser, bei dem außer der Elementargeometrie die einfachsten Elemente der analytischen Geometrie vorausgesetzt werden, in die projektive Geometrie einzuführen und mit ihren Anwendungen vertraut zu machen. Man muß zugestehen, daß beides trotz des geringen Umfanges des Buches in ausgezeichneter Weise erreicht wird. Der Leser, zumal derjenige, der sich die zahlreichen Übungsaufgaben zu Nutze macht, muß notwendigerweise einen großen Reichtum an Kenntnissen und eine namhafte Fertigkeit in ihrem praktischen Gebrauch davontragen.

Kapitel I handelt vom Doppelverhältnis, von projektiven Punktreihen und Strahlbüscheln, von der Polarität in bezug auf einen Kreis (S. 22 Z. 11 muß es wohl heißen point statt part, S. 34 Z. 5 v. u. plane statt space).

Kapitel II behandelt unter dem Titel *Kollineation* diese Verwandtschaft mit ihren wichtigsten Spezialfällen analytisch und konstruktiv. (S. 68 Z. 11 lies ranges statt rays).

Kapitel III ist der *Theorie der Kegelschnitte* gewidmet und gibt deren wesentlichste projektive und nicht projektive Eigenschaften wiederum nicht nur analytisch sondern auch in darstellend geometrischen Methoden.

Kapitel IV behandelt die Kegelschnittbüschel und -Scharen, führt von hier zu der Steinerschen Transformation und den Kurveu III. Ordnung, deren Einteilung nach Newton gegeben wird, während die Arbeiten von Moebius und H. Wiener keine Erwähnung finden.

Kapitel V endlich — wohl das originellste des Buches — gibt *Anwendungen auf die Mechanik*, namentlich die graphische Statik. Aber auch in den übrigen Kapiteln ist — mindestens in der Ableitung der Resultate — viel Originelles enthalten, und allenthalben wird auf praktische Anwendungen, z. B. aus der Physik, Bedacht genommen.

Daß mitunter ein Satz ohne Erwähnung vorhandener Ausnahmefälle und doch ohne den Zusatz „im allgemeinen“ ausgesprochen wird (z. B. S. 24 unten), darf bei der Charakterisierung des Buches nicht ganz unbemerkt bleiben. Der Praktiker erblickt eben in solchen Dingen gern Haarspaltereien des Systematikers.

Trotzdem wird das an die Spitze gestellte günstige Urteil gerechtfertigt erscheinen. Wir können das Buch auch deutschen Lesern um so angelegentlicher empfehlen, als bei uns ein ähnliches nicht zu existieren scheint.

Kiel, April 1906. Lothar Heffter.

E. Grünfeld, Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen. Jahresbericht der Realschule im 18. Bezirk. 20 S. 8°. Wien 1906.

In der Einleitung gibt Verfasser eine historische Übersicht über die Theorie der 1ten, 2ten, ... n^{ten} Adjungierten einer homogenen linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung (Arbeiten von Fuchs, Frobenius, Thomé, Forsyth, Cels und dem Verf.); die n^{te} Adjungierte ist identisch mit der sogen. Lagrangeschen Adjungierten; abgesehen von dieser und der

Digitized by Google

1ten Adjungierten sind die Untersuchungen noch nicht bis zu einem befriedigenden Abschlusse gediehen. Die vorliegende Arbeit ist in der Hauptsache eine Ausgestaltung und Ergänzung der im 124. Bande des J. für Math. veröffentlichten Abhandlung des Verf., die sich insbesondere auf die Konstanz gewisser bilinearer Differentialausdrücke bezieht; sie ist dem Andenken von Lazarus Fuchs gewidmet.

Berlin-Charlottenburg. G. Wallenberg.

O. Weinbaum. Die Spiegelung einer unendlichen Ebene in einem zu ihr senkrechten elliptischen Zylinder. 50 S. 3 Figurentafeln. 8^0. Berlin 1906, Mayer & Müller.

§ 1. Einleitung und Stellung des Themas: Das Problem der Spiegelung irgendwelcher Objekte in beliebig gekrümmten Spiegelflächen ist seit langem Gegenstand teils experimentell-praktischer, teils mathematisch-theoretischer Untersuchungen gewesen. Aber bis in die neueste Zeit, wie z. B. noch bei der Behandlung einer spiegelnden Kugelfläche in der „darstellenden Optik" von Engel und Schellbach, wurde fast immer stillschweigend vorausgesetzt, daß ein leuchtender Punkt stets nur *ein* Spiegelbild liefert, eine Annahme, die in Wahrheit nur für „paraxiale" Strahlenbündel gilt, d. h. für solche, deren einzelne Strahlen der Verbindungslinie von leuchtendem Punkt und Krümmungsmittelpunkt unendlich benachbart sind. — Die Tatsache nun, daß bei jeder anderen als der paraxialen Inzidenz eine „astigmatische" Reflexion stattfindet, d. h. daß man dann *zwei* voneinander getrennte, eigentlich aus unendlich kleinen Linien bestehende Bildpunkte erhält, ist zuerst von Ch. Sturm und Kummer, dann aber besonders von Reusch, Neumann und Matthiessen graphisch und mathematisch eingehend behandelt worden. — Die Arbeiten von Bode und Bieneck sind im wesentlichen nach Matthiessenschen Methoden abgefaßt; sie behandeln die speziellen Probleme der Spiegelung einer Kugel in einer Kugel, bzw. einer unendlichen Ebene in einer Kugel. — Die vorliegende Arbeit ist nun ein ausführlicherer Beitrag zur astigmatischen Spiegelung an gekrümmten Flächen; sie untersucht „die Spiegelung einer unendlichen Ebene in einem zu ihr senkrechten geraden elliptischen Zylinder". Der Erörterung sind die von Neumann für die Brechung, bzw. Spiegelung an beliebig gekrümmten Flächen aufgestellten Formeln zugrunde gelegt. Die Formeln nehmen aber im Hinblick auf die besondere Form der spiegelnden Fläche sowie im Hinblick darauf, daß die zu betrachtenden einfallenden Strahlenbündel konzentrisch sind, eine einfachere Gestalt an.

§ 2. Die Neumannschen Formeln und ihre Umformung. § 3. Die Kurve des „Hauptnormalabschnittes". § 4. Aplanatische Spiegelung im Sinne eines wirklich zustande kommenden, vom Objektpunkte getrennten, einheitlichen Bildpunktes ist beim elliptischen Zylinderspiegel unmöglich. § 5. Umgrenzung und Einteilung der eigentlichen Untersuchung. — Die verschiedenen Gruppen von Inzidenzpunkten. § 6. Ausrechnung der Bildabszissen. — Deutung des Resultates für die „erste" Abbildung. § 7. Die „seitliche" oder „allgemeine" Inzidenz. § 8. Seitliche Inzidenz in gleicher Vertikalen. § 9. Streifende Inzidenz. § 10. Vertikal-normale Inzidenz. § 11. Seitliche Inzidenz in gleichem Horizont. § 12. Horizontal-normale

Digitized by Google

Inzidenz und Grundinzidenz. § 13. Zeichnerische Veranschaulichung der gesamten bisherigen Untersuchung. § 14. Veränderungen in der Lage des Augenpunktes. Spezielle Augenpunkte. § 15. Direkte Lösung des Problems.

Berlin-Charlottenburg. G. Wallenberg.

F. Gomes Teixeira. Tratado de las curvas especiales notables. Memoria premiada por la Real Academia de ciencias exactas, fisicas y naturales en el concurso ordinario a premios del año 1897. — XXII. Bd. der Mem., Madrid 1905. IX und 632 S. gr. 8°.

Mit der Erfindung und Entwicklung der Infinitesimalrechnung ging das Studium der schon aus dem Altertum überkommenen Kurven (Kissoide des Diokles, Konchoide des Nikomedes, Spirale des Archimedes usw.), sowie die Entdeckung und Erforschung neuer Kurven Hand in Hand. Manche von diesen Kurven gingen auch als stereotype Beispiele in die Lehr- und Übungsbücher der Differentialrechnung über (Pascalsche Schnecken und Kardioide, Lemniskate von Bernoulli, Zykloiden u. a.). Aber noch 1882 konnte S. Günther in der kleinen Schrift „*Parabolische Logarithmen und parabolische Trigonometrie*“ (Teubner) klagen, daß die deutsche Literatur so gut wie kein Material biete für die Strophoide, eine Kurve, die in Frankreich schon längst neben der Kissoide als klassische Kurve dritter Ordnung betrachtet und vielfach studiert wurde.[1]) Auch in andern Ländern stellte sich infolge der Unzahl von Arbeiten über spezielle Kurven das Bedürfnis heraus, eine Zusammenstellung der bekannten unter diesen mit Angabe der betreffenden Literatur zu besitzen. Dieser Umstand veranlaßte die Madrider Akademie i. J. 1892 und wiederholt i. J. 1895 als Preisaufgabe auszuschreiben „die Herstellung eines geordneten Kataloges aller Kurven irgend welcher Art, die einen speziellen Namen erhalten haben, in Verbindung mit gedrängten Angaben über ihre Gestalt, Gleichung und allgemeinen Eigenschaften, sowie unter Namhaftmachung der ersten Entdecker und Schriften, die sich mit ihnen beschäftigten.“ Dieser Aufforderung kamen zwei Gelehrte nach, der Italiener G. Loria und der Portugiese F. G. Teixeira, letzterer einer der wenigen Männer, die Kunde davon geben, daß auch auf der iberischen Halbinsel das Interesse an der reinen Wissenschaft, speziell der Mathematik, nicht ganz erloschen ist. Beide Arbeiten fanden Ende 1897 die schmeichelhafte Anerkennung der Akademie. Während nun Loria seine Arbeit daraufhin erweiterte, um sie 1902 gleich in deutscher Sprache bei Teubner erscheinen zu lassen (*Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven*; Besprechung in ds. Zeitschr. (3) **9**, 1905, S. 48) und so dem mathematischen Leserkreise ein Werk von staunenswerter Vollständigkeit schenkte, mußte Teixeiras Bearbeitung erst einer Übersetzung ins Spanische unterzogen werden, um in die Memorias der Madrider Akademie aufgenommen zu werden. Da aber diese Übersetzung von einem Nichtmathematiker besorgt wurde, bedurfte es noch einer sorgsamen Überarbeitung, die der Sekretär der Akademie, Miguel Merino dem Werk zu teil werden ließ. Die

1) Erst die neueste (fünfte) Auflage des *Übungsbuches zum Studium der höheren Analysis* von O. Schlömilch, besorgt von E. Naetsch (Teubner 1904), enthält auch die Strophoide.

Digitized by Google

Krankheit und der Tod dieses Mannes sind die Ursache, daß der vorliegende Band erst 1905 erscheinen konnte.

Wenn wir nun von dieser nicht uninteressanten Vorgeschichte des Buches zu diesem selbst übergehen, so liegt es natürlich nahe, dasselbe mit dem Werk von Loria zu vergleichen. Hier ist zunächst hervorzuheben, daß Teixeira, während Loria sich auf die ebenen Kurven beschränkt, etwa 70 Seiten den bekanntesten Raumkurven (Spirale von Pappus, die Clelia des Guido-Grandi, die Loxodrome und andere sphärische Linien, ferner Schraubenlinien, die logarithmischen Kegelschnitte von Booth, die Horopterkurve, die Bertrandschen Kurven a. u.) widmet, dazu noch 12 Seiten dem Studium der Poinsotschen Polhodie und Herpolhodie, von denen die eine eben, die andere gewunden ist. Ein leichter Überschlag ergibt infolgedessen, daß das Loriasche Werk für die ebenen Kurven mindestens das Doppelte an Text gibt. Gleichwohl enthält natürlich das Buch Teixeiras einiges, was bei Loria nicht so ausführlich steht, z. B. die Konchoiden der Ellipse vom Brennpunkt aus, ein ausgedehnteres Kapitel über Spiralen und ähnliches mehr. Im übrigen ist auch die Behandlungsweise der beiden Autoren ganz verschieden. Loria stellt den historischen Gesichtspunkt voran und bringt unter der Herrschaft dieses Prinzips die verschiedenen Kurven und ihre mannigfachen Erzeugungen auf die geschickteste Weise in Zusammenhang. Teixeira dagegen hält sich mehr an die Forderung der Akademie, einen Katalog herzustellen Er gibt eine Erzeugung an, leitet die Gleichung ab und fügt den Namen bei, oder er stellt gar die Gleichung und den Namen voraus und gibt die geometrischen Eigenschaften hinterher. Sodann führt er mit großer Konsequenz bei jeder Kurve die Berechnung des Krümmungsradius, Rektifikation und Quadratur soweit möglich durch. Diese Art der Darstellung ist natürlich für den Leser etwas ermüdend und öde, zum Nachschlagen erweisen sich aber die erhaltenen Formeln recht brauchbar und zuverlässig. Des weiteren stellt sich Teixeira, was er im Vorwort ausdrücklich hervorhebt, auf einen viel elementareren Standpunkt als Loria. Als Beispiel führen wir nur an, daß er in einer eigenen Note beweist, zwei Kurven, die durch lineare Transformation auseinander hervorgehen, ständen in der Beziehung der Perspektivität zu einander.

Fassen wir all dies zusammen, so müssen wir sagen — ohne dem Wert des Werkes speziell für die spanische Literatur nahe treten zu wollen —, daß die Lektüre des Buches von Teixeira, nachdem wir das Loriasche Werk besitzen, bez. der ebenen Kurven nur für den Spezialisten Interesse bietet. Der Teil über die Raumkurven aber gibt manche Ergänzungen zu dem bekannten Artikel von G. Scheffers in der *Enzyklopädie* III D 4, S. 185—268. Deutschen Studierenden würden wir das Buch gerne empfehlen, wenn nicht die äußeren Umstände es unwahrscheinlich machten, daß solche sich mit ihm beschäftigen.

Speyer. H. Wieleitner.

H. B. Fine. A College Algebra. VIII u. 595 S. 8°. Boston 1905, Ginn u. Co.

Der Verfasser sagt im Vorwort, „er habe versucht, die Theorie der algebraischen Prozesse in einer, so weit als möglich, elementaren und für

Digitized by Google

den Unterricht geeigneten Weise zusammenhängend und streng zu entwickeln". In einem kürzeren, einleitenden Teile führt er in das Gebiet der Zahlen ein, der natürlichen, der negativen, gebrochenen, irrationalen und komplexen; hierbei stützt er sich auf Hamilton, Graßmann, Helmholtz, Dedekind, G. Cantor und versucht erfolgreich, Klarheit und Gründlichkeit zu vereinen. Die Mode der Einführung von Zahlenpaaren zur Begründung der komplexen Größen macht er nicht mit; i ist $\sqrt{-1}$; es geht auch so.

Der zweite, der Hauptteil, ist von außerordentlicher Reichhaltigkeit, und seine Brauchbarkeit wird durch passend gewählte Beispiele erhöht; eine Angabe der Resultate würde die Erhöhung wohl noch gesteigert haben. Bei der Verteilung des Stoffes verfährt der Verfasser durchaus frei; man muß stets bedenken, daß er kein systematisch gegliedertes Lehrbuch hat schreiben wollen, sondern ein Begleitbuch für den Unterricht, ein Textbuch. So tritt die Behandlung des Binomialtheorems an drei verschiedenen Stellen auf; so behandelt er zuerst die ganzen Funktionen einer Variablen, die sich in Linearfaktoren zerlegen lassen, und zeigt erst später, gewissermaßen als Krönung des Gebäudes, daß dies eine allgemeine Eigenschaft sei. Um einen Begriff von der Fülle des Stoffes zu geben, der vorgetragen wird, führen wir an: Lösung der Gleichungen der vier niedrigsten Grade; Kombinatorik und Determinanten; polynomisches Theorem; Wahrscheinlichkeitsrechnung; Elimination; Konvergenz unendlicher Reihen; rekurrierende Reihen; unendliche Produkte; Kettenbrüche. Alles in allem genommen dürfen wir sagen, daß der Verfasser das Ziel erreicht hat, das er sich setzte. Wir können das Buch als originell und brauchbar warm empfehlen.

Gießen. E. Netto.

C. A. Laisant, Initiation mathématique. Ouvrage étranger à tout programme dédié aux amis de l'enfance. 1906. Genève: Georg & Cie., Paris: Hachette & Cie. 8°. VIII u. 167 S.

Die Liebe zur Jugend und die Liebe zur Mathematik sind die beiden Angelpunkte der hübschen Schrift. Jeder, der Laisants Sympathien teilt, wird die Schrift mit Interesse lesen, auch wenn er nicht allen Einzelheiten zustimmt, ja auch wenn manches auf die französischen Verhältnisse Zugeschnittene anderwärts nicht völlig paßt.

Laisants Ziel ist: de faire pénétrer dans l'esprit de l'enfant *vingt* fois plus de choses qu'on ne le fait, en matière mathématique; cela en l'amusant, au lieu de le torturer (S. V). Durch die Art, wie er den Stoff darbietet, ist für „Freudigkeit" beim Lernen gesorgt, während das „Auswendiglernen" und alles „Langweilen" und „Quälen" der Kinder vermieden wird. Der Stoffumfang ist dem gesteckten Ziele entsprechend außerordentlich groß, ja überreich. Es werden behandelt: der Zahlbegriff, einfaches Addieren und Subtrahieren, dann erst das Zahlenschreiben, die Beziehung der Zahlen zu Punkten einer Geraden, algebraische Zahlen, Multiplikation, Division, Primzahlen, Brüche, einiges aus der Geometrie der Ebene und des Raumes, Zahlentheoretisches wie Quadratzahlen, arithmetische und geometrische Reihen und Permutationen, Übungen über die Kreislehre und Körperberechnung, die Verwendung der graphischen Darstellung mit hüb-

Digitized by Google

schen Aufgaben, wie deux cyclistes pour une bicyclette und la voiture insuffisante, der Begriff der analytischen Geometrie und harmonischer Beziehungen, zuletzt das geometrisch scheinbar beweisbare Paradoxon, daß 64 und 65 gleich seien.

Um Laisant gerecht zu werden, beachte man zu dieser Überfülle des Stoffes, was im besondern über die Geometrie gesagt wird:

§ 57 nous n'étudions rien du tout; nous apprenons simplement à voir les figures et à savoir comment on les nomme, S. 106: bref, sans faire aucune étude géométrique quant à présent, il (das Kind) prendra, par l'expérience, la connaissance, accompagnée de certitude, de beaucoup de vérités dont les démonstrations seront plus tard d'autant plus facilement assimilables und S. 115/6: tous ces résultats seront obtenus plus tard. On ne les communique actuellement à l'enfant que pour lui rendre possibles certains exercices pratiques. Mais ne lui demandez pas de surcharger sa mémoire de toutes ces formules.

Im Schlußabschnitt berührt Laisant noch zwei für den mathematischen Unterricht wichtige Punkte. Einerseits kämpft er gegen die Vorstellung, daß für den Elementarunterricht eine besondere mathematische Begabung in Frage komme. Anderseits bezeichnet er es als Mittel für die Prüfung der Brauchbarkeit einer Schule: à visiter le matériel d'enseignement des poids et mesures, les instruments d'arpentage etc. Er bemerkt: si on vous répond qu'il n'y a rien de tout cela dans la maison, sauvez-vous, et ne revenez jamais. Gerade der letztere Punkt verdient weitestgehende Beachtung für unseren Sextaunterricht. Möge es nicht mehr vorkommen, daß mit Maßen gerechnet wird, die nicht anschaulich durch Versuche vorgeführt wurden, möge es im besondern keine Sexta geben, in der nicht Messungen mit dem Metermaß wirklich ausgeführt wurden, in der ein Liter Wasser vor den Augen der Schüler mit 1 kg zusammen auf den Schalen einer Tafelwage stand!

Gera. E. Kullrich.

H. Holliger, Kurze Anleitung zur Berechnung von Flächen und Körpern für Schule und Praxis mit 81 in den Text gedruckten geometrischen Figuren. 53 S. 8°. Leipzig-Aarau-Stuttgart 1906, Ed. E. Meyer. ℳ 0,80.

Die Anleitung will, ohne auf die Herleitung der Formeln einzugehen (was in einigen wenigen Fällen freilich doch geschieht), vornehmlich dem praktischen Zwecke dienen, den Leser instand zu setzen, Körper- und Flächenberechnungen auszuführen. Ein bedauerlicher Mangel ist es, daß bei den Lösungen anscheinend die Vorschriften des elementaren Abkürzens nicht berücksichtigt sind. Es werden z. B. S. 6 d) 5,42, S. 7 d) 81,56 und S. 52 8. Zeile von unten: 3,26 angeführt, während sich ungekürzt 5,4289, 81,569 und 3,2656 ergibt. Die Figuren wären besser schwarz auf weißem Grunde als umgekehrt geboten worden. Einzelne, so die zu Nr. 28, sind zu klein. Manche Druckfehler, z. B. die bei den Figuren zu 14, 15 und 36, wo es statt 52^0, 45^0, 48^0 heißt $5 \cdot 20$, $4 \cdot 50$, 480 sind recht störend.

Gera. E. Kullrich.

Digitized by Google

P. de Lafitte. Essai sur le carré magique de N à N nombres. IV u. 23 S. 8°. Paris 1906, Gauthier-Villars. Fr. 1,50.

P. de Lafitte wünscht „d'offrir au lecteur un de ces amusants petits problèmes qui sollicitent et tiennent en éveil la sagacité de nos jeunes apprentis mathématiciens". Es handelt sich um die Aufstellung magischer Quadrate und Würfel aus n — nicht n^2 oder n^3 — Zahlen. Auf die Literatur wird nicht eingegangen, doch werden die Ausführungen und Figuren dem gesteckten Ziele gerecht.

Gera. E. Kullrich.

M. Möller. Die abgekürzte Dezimalbruchrechnung. Ein Beitrag. VI u. 37 S. 8°. Wien 1906, Alfred Hölder. ℳ 0,90.

Nach einleitenden Bemerkungen, in denen sich die liebevolle und intime Beschäftigung mit dem abgekürzten Rechnen kundtut, behandelt Möller die Frage, wann die Teilprodukte beim abgekürzten Multiplizieren, je nachdem ob ein, zwei oder mehr Überstellen berücksichtigt werden, verschieden ausfallen. Durch drei verschiedene Methoden bestimmt er die „relevanten Fälle $n$ter Ordnung", d. h. die, in denen, auch wenn die $n$te Überstelle benutzt wird, die Fehlergrenze eine halbe Einheit übersteigt. Der Gesamtüberblick läßt die mathematische Wahrscheinlichkeit, daß bei dem üblichen Verfahren eine falsche Schätzung der Fehlergrenze eintritt, auch wenn es sich um mehr Teilprodukte oder um unvollständige Dezimalbrüche handelt, sehr gering erscheinen. Die beiden letzten Seiten sind der Division gewidmet.

Das Studium der kleinen Schrift kann namentlich auch denen, die abgekürztes Rechnen zu unterrichten haben, warm empfohlen werden. Zwar wird von Möllers Resultaten kaum etwas in den Schulunterricht einfügbar sein, doch bildet die Lektüre der vorliegenden Schrift eine beherzigenswerte Warnung vor falscher Darstellung des interessanten Stoffgebietes.

Die Bezeichnung periodischer Dezimalbrüche als Irrationalzahlen ist wohl ein Versehen.

Gera E. Kullrich.

L. Krüger. Zur Ausgleichung der Widersprüche in den Winkelbedingungsgleichungen trigonometrischer Netze. Veröffentlichung des Königl. Preußischen Geodätischen Institutes. Neue Folge Nr. 25. Leipzig 1906, B. G. Teubner. ℳ 2,80.

Wenn ein trigonometrisches Netz aus Beobachtungen der Dreieckswinkel hervorgegangen ist, so lassen sich aus den Normalgleichungen des Netzes die Korrelaten der Winkelbedingungsgleichungen leicht durch die übrigen Korrelaten ausdrücken. Denn da die Verbesserungen irgend einer Winkelgleichung in keiner anderen nochmals auftreten, so steht auch ihre Korrelate in der entsprechenden Normalgleichung mit keiner anderen Korrelate unmittelbar in Verbindung. Eliminiert man nun die Korrelaten der Winkelbedingungsgleichungen aus den Normalgleichungen des Netzes, so braucht man eine wirkliche Auflösung nur für die reduzierten Normalgleichungen, die zu den Seitenbedingungsgleichungen und den Horizontabschlüssen gehören, auszuführen. Zu diesen reduzierten Gleichungen gelangt man auch,

Digitized by Google

indem man die Werte der Korrelaten der Winkelgleichungen aus den zugehörigen Normalgleichungen in die zur Bestimmung der Verbesserungen dienenden Korrelatengleichungen einsetzt, und dann erst mit diesen aus den übrigen Bedingungsgleichungen die Normalgleichungen bildet. Diese Art der Winkelausgleichung pflegt man als die Schleiermachersche Methode zu bezeichnen. Daß man dabei auch noch vorher den Winkelgleichungen durch eine unvollständige Ausgleichung genügt, ehe man an die Aufstellung der Horizontabschlüsse und Seitengleichungen geht, gibt wohl eine kleine Rechnungserleichterung, ist aber sonst unwesentlich. Im Grunde genommen ist die Schleiermachersche Methode nichts anderes als die Vorschrift, bei der Auflösung der Normalgleichungen eines nach Winkeln beobachteten Dreiecksnetzes mittels des Gaußschen Algorithmus die zu den Winkelgleichungen gehörigen Normalgleichungen an die Spitze zu stellen, was — da diese am einfachsten sind — eigentlich selbstverständlich ist.

Sind die Beobachtungen für ein Dreiecksnetz derart erfolgt, daß zur Ausgleichung der Widersprüche Richtungsverbesserungen erforderlich sind, so werden die Winkelbedingungsgleichungen durch gemeinschaftliche Verbesserungen zusammenhängen. In den aus ihnen entstehenden Normalgleichungen treten also ihre Korrelaten nicht mehr wie vorher einzeln auf, sondern sie kommen stets in Verbindung mit andern vor. Es wird daher im allgemeinen nicht möglich sein, in einfacherer Weise als durch den Gaußschen Algorithmus eine Auflösung der Normalgleichungen, die aus den Winkelgleichungen entspringen, zu geben, so daß man mit ihrer Hilfe die Korrelaten der Winkelgleichungen, sei es aus den Korrelatengleichungen selbst, sei es aus den übrigen Normalgleichungen des Netzes, eliminieren kann.

Dennoch gibt es viele Fälle, in denen sich einfache Auflösungen finden lassen, wenigstens wird man sehr häufig die Darstellung der Korrelaten der Winkelgleichungen auf die Auflösung weniger Gleichungen zurückführen können. Dies geschieht im folgenden mittels der Auflösung der zu den Winkelgleichungen gehörigen Normalgleichungen eines Zentralsystems, einer einfach zusammenhängenden Dreieckskette und einer aus Vierecken mit Diagonalen bestehenden Kette.

Eine solche Auflösung der zu den Winkelgleichungen gehörigen Normalgleichungen wird besonders dann vorteilhaft sein, wenn die Bedingungsgleichungen des Dreiecksnetzes abwechselnd nach zwei Gruppen, den Winkelgleichungen und den umgeformten Seitengleichungen, ausgeglichen werden, oder wenn man sich des Annäherungsverfahrens bedient, bei dem zuerst nur die Winkelgleichungen allein ausgeglichen und darauf nur die Seitengleichungen, die man für die Ausgleichung durch Gleichsetzung der gegenseitigen Richtungsverbesserungen vereinfacht, in Betracht gezogen werden.

Potsdam. L. Krüger.

Kobold. Der Bau des Fixsternsystems mit besonderer Berücksichtigung der photometrischen Resultate. Mit 19 eingedruckten Abbildungen und 3 Tafeln. [Die Wissenschaft. Heft 11]. XI u. 256 S. Braunschweig 1906, Fried. Vieweg & Sohn.

Die astronomischen Lehrbücher können den interessanten Fragen über die Größe und Struktur des sichtbaren Weltalls nur einen geringen Raum

Digitized by Google

widmen, und die Literatur über diese allen naturwissenschaftlich denkenden Beobachtern der Milchstraße sich aufdrängenden Probleme, die man deshalb unter dem Namen des galaktischen Problems zusammengefaßt hat, ist so zerstreut, daß man nur mit Schwierigkeit sich über alle Einzelheiten zu unterrichten fähig war. Wenn die „Enzyklopädie" soweit erschienen sein wird, so wird eine schnellere Orientierung über diese Literatur und die Resultate der Forschung wohl möglich sein. Aber die Wege, auf denen man zum Ziele gelangt, die Methoden der Beobachtung, die sich an mehr oder weniger wahrscheinliche Hypothesen knüpfenden mathematischen Theorien und die kritischen numerischen Rechnungen, an denen der Verfasser selbst einen wesentlichen Anteil hat, ins einzelne zu verfolgen, dies kann in einem enzyklopädischen Werke kaum gelingen, und so erscheint das vorliegende Buch gerade zur rechten Zeit, um den Lesern alle diese Fragen in guter Anordnung und klarer Sprache bis zu dem Abschluß zu beantworten, zu welchem die Forschung jetzt gelangt ist. Der Verfasser ist sich selbst bewußt, daß auf viele Einzelfragen erst von der Zukunft, der ein reicheres Material zu Gebote stehen wird, Antwort erwartet werden kann. Immerhin dürfen wir eine große Anzahl von Resultaten als gesichert schon heute ansehen, und dieselben sind ja auch bereits in manche populäre Schrift übergegangen. Eine solche soll das vorliegende Buch nicht sein; nur wer in die Werkstatt der Wissenschaft nicht bloß hineinzusehen, sondern tief einzudringen vermag, der wird von dem Buche Gewinn haben. Der Verfasser läßt keine von den Grundlagen des theoretischen Gebäudes, das er entstehen läßt, unerörtert. In einem ersten Abschnitte werden die Beobachtungsmethoden für die Bestimmung des Ortes, der Helligkeit, der Farbe, des Spektrums, der Entfernung, der Eigenbewegung und der Verteilung der Fixsterne behandelt, in einem zweiten die Resultate, welche diese Einzelbeobachtungen gezeitigt haben, genau auseinandergesetzt, ehe in dem dritten das im Titel genannte Problem der räumlichen Anordnung des Universums zur Behandlung kommt. Beigegeben sind Tafeln der Sterne mit bekannter Parallaxe, derjenigen mit großer Eigenbewegung und ein Literaturverzeichnis, sowie ein ausführliches alphabetisches Register. Da der Verfasser selbst das Hypothetische vom Erreichten genau trennt, so haben wir in ihm einen durchaus zuverlässigen Steuermann durch den Ozean der Theorien. Vielleicht ist es nur das Streben nach Vollständigkeit, das ihn zur Aufnahme von Bemerkungen, wie der von Backhouse über die geradlinige Anordnung von Sternen in der Milchstraße veranlaßt hat. Es ist schon früher hervorgehoben worden, daß einmal diese Linien nicht streng gerade sind, daß es zweitens leicht gelingt, beliebige andere Figuren, wie Blumen, aus den Sternen der Milchstraße herauszulesen, und daß in zufällig entstandenen Verteilungen sehr vieler Punkte, z. B. von Sandkörnern, immer solche nahezu geradlinige Anordnungen sich finden lassen.

Charlottenburg. H. Samter.

Börnstein. Leitfaden der Wetterkunde. Zweite umgearbeitete und vermehrte Auflage. XII u. 230 S. u. 22 Tafeln. Braunschweig 1906, Friedr. Vieweg u. Sohn. geb. ℳ 6,80.

Das Lob, welches wir der ersten vor 5 Jahren erschienenen Auflage dieses Buches spendeten, kommt in noch erhöhtem Maße der neuen Auflage

Digitized by Google

zu. Der Verfasser hat sich in allen Punkten mit Erfolg bemüht, die Resultate der neuesten Forschungen in den alten Rahmen hineinzuarbeiten. Dabei ist der Umfang des Buches um drei Bogen gewachsen, die Tafeln sind um fünf, darunter die große aus der Meteor. Zsch. bekannte Abbildung der Hagelwolke, vermehrt worden. Von neueren Forschungsergebnissen notieren wir die über die Zusammensetzung der Luft, die Ionentheorie der atmosphärischen Elektrizität, die Temperaturen und Bewegungen der höchsten Luftschichten, die Lenardschen Beobachtungen über Größe und Gestalt der Regentropfen usw. Wir hoffen, daß das Buch sich zu manchem alten viele neue Freunde erwerben wird.

Charlottenburg. —— —— H. Samter.

Remus. Der dynamologische Lehrgang. Versuch einer geschlossenen Naturkunde. (Sammlung naturwissenschaftlich-pädagogischer Abhandlungen Bd. II Heft 4.) X u. 132 S. Leipzig 1906, B. G. Teubner. Geheftet ℳ 4,—.

Der Verfasser sucht zu beweisen, daß, wenn man einen streng logischen Aufbau der Naturwissenschaften vor seinen Schülern aufführen will, man sich dazu eines besonderen Lehrgangs bedienen muß, dessen Stufen er als Dynamologie, Meteorologie, Biologie, Technologie bezeichnet. Trotzdem wir viele gute Lehrproben in dem Werke finden, müssen wir doch betonen, daß uns eine solche streng logische Konstruktion des Schulunterrichts weder möglich noch nötig scheint, und daß gegen den üblichen Lehrplan schwere Bedenken nicht vorliegen.

Charlottenburg. —— H. Samter.

M. v. Rohr. Die optischen Instrumente. 130 S.

Franz. Der Mond. 132 S. und 2 Doppeltafeln. (Aus Natur und Geisteswelt. Bd. 88 und 90. Leipzig 1906, B. G. Teubner. Gebunden je ℳ 1,25).

Ob das Programm der schönen und preiswerten Sammlung, in erschöpfender und allgemein verständlicher Behandlung wichtige Gebiete des Wissens zu bieten, in den vorliegenden Bändchen gerade genau verwirklicht ist, dies bezweifeln wir. Doch sind in dem zweiten Bändchen die wohl nur einem genügend mathematisch vorgebildeten Leserkreise verständlichen Gebiete über die Bewegungen des Mondes so herausgehoben, daß sie überschlagen werden können, ohne daß das Verständnis der übrigen litte. In bezug auf Vollständigkeit und Verständlichkeit und Lebhaftigkeit läßt das Buch vom Monde im übrigen nichts zu wünschen. Durch genaue Beschreibung der Flutphänomene, die ja nur zum Teil des Mondes Werk sind, wird das zu behandelnde Gebiet in durchaus erwünschter Weise erläutert. Die beigegebenen Mondlandschaften sind hübsch ausgeführt und die Übersichtskarte wird allen Dilettanten genügen.

Ob es möglich ist, den spröden Stoff einer Theorie der optischen Instrumente einem nicht eindringend vorgebildeten Publikum klar und anschaulich zu machen, wissen wir nicht, jedenfalls können wir die vorliegende Behandlung nicht als ausreichend ansehen. Der Verfasser hat ein bedeutendes Werk über das photographische Objektiv veröffentlicht; aber es ist etwas

Digitized by Google

anderes ein wissenschaftliches Buch zu schreiben und wissenschaftliche Gebiete Laien zugänglich zu machen. Durch Weglassung mancher Einzelheiten und größere Ausführlichkeit bei den Hauptsachen wäre die ganz gewiß nicht leichte Materie vielleicht der Auffassung auch schwächer Vorgebildeter nahe zu bringen gewesen, bei der schweren Schreibweise des Verfassers ist es auch wissenschaftlich Gebildeten kaum möglich, ihm in allen Ausführungen zu folgen.

Charlottenburg. H. Samter.

Astronomischer Kalender für 1906. Berechnet für den Meridian und die Polhöhe von Wien. Herausgegeben von der k. k. Sternwarte. Der ganzen Reihe 68. Jahrgang, der neuen Folge 25. Jahrgang. 143 S., dazu Tagebuch und Notizblätter. Wien, Karl Gerolds Sohn. *M* 2,40.

Das Buch enthält alle für den astronomischen Liebhaber interessanten Daten, wie Sternzeit im mittleren und Zeitgleichung im wahren Mittag, die Finsternisse, Verfinsterungen der Jupitermonde, ein Fixsternverzeichnis, ein Verzeichnis der Veränderlichen, von Doppelsternen, Nebelflecken und Sternhaufen, die Koordinaten der Hauptplaneten, der Sonne und des Mondes in hinreichender Ausführlichkeit. Beigegeben ist eine hinreichend ausführliche populäre Abhandlung von Dr. Holetschek über den gegenwärtigen Stand unserer Kenntnisse der veränderlichen Sterne, die auch die sämtlichen Hypothesen für die verschiedenen Typen recht klar darstellt. Wir können den Kalender allen Interessenten, auch den Lehrern höherer Schulen angelegentlichst empfehlen.

Charlottenburg. H. Samter.

Böttger. Beiträge zur Geschichte und Methode des chemischen Unterrichts in der Volksschule. VI und 78 S. Leipzig 1906, B. G. Teubner. *M* 1,40.

Diese von genauer Kenntnis der Literatur zeugende Arbeit eines eifrig für die Einführung und Ausgestaltung des chemischen Unterrichts in der Volksschule — leider eines Stiefkindes der Pädagogik — tätigen Schulmannes wird nicht bloß für Volksschullehrer lesenswert sein, sondern auch manchem an höheren Schulen wirkenden wichtige Fingerzeige geben; denn besonders auf der Unterstufe sollte sich die Methodik in beiden Kategorien von Bildungsanstalten nicht unterscheiden.

Charlottenburg. H. Samter.

Annuaire du Bureau des Longitudes. VI + 950. Paris 1908, Gauthier-Villars. Fr. 1,50.

Wie in jedem Jahre hat das Bureau des Longitudes auch für das Jahr 1908 sein Annuaire herausgegeben. Dieser Band enthält außer den astronomischen Daten zahlreiche Tabellen aus der Physik, Chemie und Technik. Angehängt ist diesmal u. a. die Abhandlung: La distance des astres et en particulier des étoiles fixes von Herrn G. Bigourdan.

Berlin. E. Jahnke.

Digitized by Google

Vermischte Mitteilungen.

1. Aufgaben und Lehrsätze. Lösungen.

A. Aufgaben und Lehrsätze.

191. Über den Seiten a, b, c eines Dreieckes ABC sind drei gleichseitige Dreiecke errichtet, und zwar so, daß das gleichseitige Dreieck BCA_1 auf derselben Seite der Geraden a liegt wie ABC usw. Es sind die Seiten a_1, b_1, c_1, und Winkel $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, des neuen $\triangle A_1 B_1 C_1$ durch die des gegebenen auszudrücken. Der Prozeß ist fortzusetzen: über a_1, b_1, c_1, sind wieder drei gleichseitige Dreiecke mit den Spitzen A_2, B_2, C_2 zu errichten, und das $\triangle A_2 B_2 C_2$ ist nun zu untersuchen. U. s. f. Unter welchen Bedingungen hat der Prozeß nach einer endlichen Anzahl von Operationen ein Ende, d. h. stößt man auf Gebilde $A_\nu B_\nu C_\nu$, die keine Dreiecke mehr sind, und welcher Art sind dann diese Ausartungen?

Statt der gleichseitigen Dreiecke in voriger Aufgabe sollen gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke genommen werden (a, b, c; $a_1, b_1, c_1 \cdots$ sollen jedesmal die Hypotenusen sein.

Gremsmühlen. Otto Meissner.

192. Gegeben im R_4 ein Körper $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ und ein zweiter $x^2 + y^2 + u^2 = b^2$; beider Schnitt ist zu untersuchen und auf die dreidimensionalen Räume $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $u = 0$ (die Koordinatenräume) zu projizieren.

Gremsmühlen. Otto Meissner.

193. Vom Nullpunkte O eines rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystems trägt man auf den Axen nach beiden Richtungen hin die Einheitsstrecke ab; die Endpunkte mögen P_x, P_{-x}, P_y, P_{-y} heißen. Außerdem trägt man auf der positiven Hälfte der X-Achse die Strecke a bis P_0 ab. Über $P_0 P_{-x}$ als Durchmesser errichtet man den Halbkreis, der die positive Y-Achse in P_1 schneidet; über $P_1 P_{-y}$ wird abermals der Halbkreis geschlagen, sein Schnittpunkt mit der negativen Hälfte der X-Achse heiße P_2, mit $P_2 P_x$ verfährt man entsprechend usw. Es ist dann also $OP_0 = a$, $OP_1 = \sqrt{a}$, $OP_2 = \sqrt[4]{a}$ etc. Es ist eine Kurve mit möglichst einfacher Gleichung anzugeben, die durch die Punkte $P_0 P_1$ usw. geht.

Gremsmühlen. Otto Meissner.

Digitized by Google

B. Lösungen.

Zu **15** (Bd. I, S. 370) (E. N. Barisien). — La normale en un point M variable d'une ellipse de centre O rencontre le grand axe de l'ellipse en N. Le point N se projette en P sur OM; la perpendiculaire élevée en N à NM rencontre OM en Q. Montrer que chacune des droites NP et NQ est normale à une ellipse fixe. Trouver les lieux des points P et Q et calculer l'aire de ces courbes.

Die Ellipse mit den Halbachsen a und b sei auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bezogen, dessen X- und Y-Achse mit den Achsen der Ellipse zusammenfallen und dessen Ursprung im Mittelpunkt O derselben liegen möge. Bezeichnet man die Koordinaten des Ellipsenpunktes M mit (x_1, y_1), die des Punktes N mit $(x', 0)$, so ist die Gleichung der Normale NM $\frac{y_1}{x_1 - x'} = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}$, woraus sich $x' = \frac{e^2}{a^2} x_1$ ergibt für $e^2 = a^2 - b^2$. Herr Barisien behauptet, daß die Gerade NP Normale einer festen Ellipse sei. Diese Behauptung ist nicht richtig.

Ich bestimme die orthogonalen Trajektorien der Geraden NP. Hat der gesuchte Ort auf den Geraden NP die Koordinaten (x, y), so stellt sich die Gleichung der Geraden NP in der Form dar: $y y_1 = -x_1 \left(x - \frac{e^2}{a^2} x_1\right)$, oder da doch (x_1, y_1) der Ellipse angehört:

$$y^2 \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x_1^2) = x_1^2 \left(x - \frac{e^2}{a^2} x_1\right)^2$$

oder

$$f(x, y, x_1) \equiv a^2 b^2 y^2 (a^2 - x_1^2) - x_1^2 (a^2 x - e^2 x_1)^2 = 0.$$

Die Differentialgleichung der orthogonalen Trajektorien folgt durch Elimination von x_1 aus den Gleichungen:

$$f(x, y, x_1) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Da nun $\frac{\partial f}{\partial y} = 2 a^2 b^2 (a^2 - x_1^2)\, y$; $\frac{\partial f}{\partial x} = -2 a^2 x_1^2 (a^2 x - e^2 x_1)$, so nehmen jene Gleichungen, wenn noch $\frac{dy}{dx} = p$ gesetzt wird, die Form an:

$$p = -\frac{b^2 y (a^2 - x_1^2)}{x_1^2 (a^2 x - e^2 x_1)} \quad \text{und} \quad -a^2 y \cdot p = a^2 x - e^2 x_1.$$

Die Elimination von x_1 liefert die Differentialgleichung der orthogonalen Trajektorien:

$$p = \frac{b^2 [e^4 - a^2 (x + py)^2]}{a^4 p (x + py)^2} \quad \text{oder} \quad x + py = \frac{b e^2}{a \sqrt{a^2 p^2 + b^2}},$$

und sie führt nicht zu einer Ellipse. Soll nämlich der gesuchte Ort eine Ellipse sein, so müßte die Differentialgleichung lauten: $x + py = \frac{b e^2 p}{a \sqrt{a^2 p^2 + b^2}}$ (vgl. O. Schlömilch, Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis, 2. Teil, 2. Aufl., 1874, Leipzig, B. G. Teubner; S. 306, Nr. 31).

Auch die Geraden NQ besitzen nicht die von Herrn Barisien behauptete Eigenschaft. In diesem Falle wird die Differentialgleichung der orthogonalen

Digitized by Google

Trajektorien $x + py = \frac{e^2}{\sqrt{b^2p^2 + a^2}}$, die ebenfalls zu keiner Ellipsengleichung führt.

Die Gleichung des Ortes P ist:

$$a^2(x^2 + y^2)^2(b^2x^2 + a^2y^2) = e^4b^2x^4.$$

Diese Kurve sechsten Grades besteht aus zwei symmetrisch zur X- und Y-Achse gelegenen Blättern. Aus der Polargleichung $r^2 = \frac{b^2e^4}{a^2} \frac{\cos^4\varphi}{b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi}$ erkennt man, daß der Nullpunkt, ein vierfacher Punkt unserer Kurve, auch Wendepunkt, und daß die Y-Achse Wendetangente ist.

Der Flächeninhalt dieser Kurve folgt aus:

$$F = 2\frac{b^2e^4}{a^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4\varphi\, d\varphi}{b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi} = \frac{\pi b(a-b)^2(2a+b)}{2a^3}.$$

Für $a = b$ ist $F = 0$, wie es sein muß.

Die Ortskurve des Punktes Q ist:

$$(b^2x^2 + a^2y^2)^3 = \frac{b^6e^4}{a^2}x^4.$$

Sie hat eine ähnliche Gestalt wie die des Punktes P, beide Kurven berühren sich in den Punkten $x = 0$, $y = 0$ und $x = \pm\frac{e^2}{a}$, $y = 0$.

Ich will für die Kurven der Punkte P und Q noch eine andere einfache Konstruktion mitteilen. Für die Kurve P gilt

$$r'^2 = \frac{b^2e^4}{a^2} \frac{\cos^4\varphi}{b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi},$$

woraus unter Beachtung der Ellipsengleichung

$$r^2 = \frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi} \quad \text{folgt:} \quad \frac{r'}{\cos\varphi} = \frac{r}{a} \cdot \frac{e^2}{a}\cos\varphi.$$

Wird $\frac{r'}{\cos\varphi} = u$, $\frac{e^2}{a}\cos\varphi = v$ gesetzt, so ist: $u = \frac{r}{a} \cdot v$, und hieraus ergibt sich eine einfache Konstruktion. Ähnliches gilt für die Ortskurve des Punktes Q.

Der Flächeninhalt der letzteren Kurve ist gegeben durch:

$$F = 2\frac{b^6e^4}{a^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4\varphi}{(b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi)^2}\, d\varphi = \frac{3}{8}\frac{be^4}{a^3} \cdot \pi.$$

Der Flächeninhalt der zweiten Kurve kann in Beziehung zu dem der Ellipse, ihren Scheitelkreisen und ihrer Evolute gebracht werden. Die Ellipse hat den Flächeninhalt $E = ab\pi$, ihre Evolute den Flächeninhalt $D = \frac{3}{8}\pi\frac{e^4}{ab}$. Daher verhält sich $D : F = a^2 : b^2$, d. h. „der Flächeninhalt der Ellipsenevolute verhält sich zu dem der Kurve Q wie die Quadrate der beiden Halbachsen der Ellipse oder wie die Flächeninhalte des Haupt- und Nebenscheitelkreises der Ellipse."

Berlin. stud. math. Werner Gaedecke

Digitized by Google

Zu **47** (Bd. III, S. 78) (O. Stolz). — Der Inhalt eines Körpers, welcher aus einer Regelfläche durch zwei parallele Ebenen geschnitten wird, läßt sich durch die Prismatoidformel berechnen. Bezeichnet man mit h den Abstand jener beiden Ebenen, mit g und G die Zahlen der in ihnen befindlichen Grundflächen des Körpers, endlich mit D die Zahl seines Mittelschnittes [d. i. des Schnittes in der durch den Mittelpunkt von h parallel zu g und G gelegten Ebene], so ist der Inhalt des Körpers

$$\frac{h}{3}\left(\frac{g+G}{2}+2D\right).$$

Das vom Aufgabensteller bereits angedeutete Beweisverfahren gestaltet sich — unter Beibehaltung seiner Bezeichnung — im einzelnen wie folgt:

Der Inhalt des zur Abszisse x gehörigen Querschnitts der Regelfläche bestimmt sich aus der Formel $Q(x)=\int y\,dz$ oder wenn man für y und z die Ausdrücke aus den Flächengleichungen $x=\alpha u$, $y=Y+\beta u$, $z=Z+\gamma u$ einführt, aus $Q(x)=\int(Y+\beta u)\,d(Z+\gamma u)=\int\left(Y+\frac{\beta}{\alpha}x\right)d\left(Z+\frac{\gamma}{\alpha}x\right)$.

Berücksichtigt man, daß x längs des Querschnittes konstant ist, so geht der Ausdruck rechterhand über in

$$\int Y\,dZ+x\left[\int_{\alpha}^{\beta}dZ+\int Y\,d\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)\right]+x^2\int_{\alpha}^{\beta}d\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right).$$

Nun ist, wie unmittelbar ersichtlich, $\int Y\,dZ=g$. Setzt man noch

$$\int_{\alpha}^{\beta}dZ+\int Y\,d\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)=B,\quad \int_{\alpha}^{\beta}d\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)=A,$$

so wird

$$Q(x)=Ax^2+Bx+g.$$

Die Konstanten A und B ergeben sich aus den Bedingungen $Q\left(\frac{h}{2}\right)=D$ und $Qh=G$.

Aus dem quadratischen Ausdrucke für $Q(x)$ folgt aber bekanntlich die von Stolz angegebene Prismatoidformel.

Berlin. stud. math. Werner Gaedecke.

Zu **54** (Bd. III, S. 171) (E. Lampe). — Der Ausschlag α eines Pendels gegen die Ruhelage beträgt $179^0 59'$. Wie verhält sich seine Schwingungsdauer T zu der Schwingungsdauer T_0 für unendlich kleine Schwingungen? (Für $\alpha=180^0$ ist bekanntlich $T=\infty$).

Erste Lösung. — Setzt man, wie üblich,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=K\quad\text{und}\quad\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}}=K',$$

worin $k=\sin\frac{\alpha}{2}$ und $k'=\cos\frac{\alpha}{2}$ bedeutet, so besteht die Gleichung $\frac{T}{T_0}=\frac{2K}{\pi}$. Da hier k nahezu gleich 1 und k' sehr klein ist, so kann man die Entwick-

Digitized by Google

lungen von K und K' nach Potenzen von k' benützen, welche (z. B. nach Schlömilch, Comp. d. höh. An. II. 3. Aufl. 1879, S. 322) lauten

$$K = \frac{2K'}{\pi} \log \frac{4}{k'} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \right)^2 \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{2n} \right) k'^{2n},$$

$$K' = \frac{\pi}{2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \right)^2 k'^{2n} \right].$$

Wegen der Kleinheit von $k' = \sin 30'' = 0{,}0001454 \cdots$ haben die Summen Σ auf die 7. Dezimalstelle keinen Einfluß mehr, daher ist $K = \log \frac{4}{k'}$ und $K' = \frac{\pi}{2}$. Also ist mit derselben Genauigkeit

$$\frac{T}{T_0} = \frac{2}{\pi} \log \frac{4}{k'} = 6{,}507536.$$

Aussig (Böhmen). stud. math. J. Krug.

Zweite Lösung. — Man berechne aus dem Ausschlage α der Reihe nach $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ mittels der Gleichungen (Landensche Substitution):

$$\sin \frac{\alpha_1}{2} = \tan^2 \frac{\alpha}{4}, \quad \sin \frac{\alpha_2}{2} = \tan^2 \frac{\alpha_1}{4}, \quad \sin \frac{\alpha_3}{2} = \tan^2 \frac{\alpha_2}{4} \cdots,$$

so folgt die Schwingungsdauer T, welche zu 2α gehört, aus

$$T = \frac{T_0}{\cos^2 \frac{\alpha}{4} \cdot \cos^2 \frac{\alpha_1}{4} \cdot \cos^2 \frac{\alpha_2}{4} \cdot \cos^2 \frac{\alpha_3}{4} \cdots}.$$

Für $\alpha = 179^0 59'$ ergibt sich der von Herrn Krug gefundene Zahlwert.

Berlin. E. Lampe.

Zu **76** (Bd. IV, S. 351) (W. Fr. Meyer). — Trägt man in jedem Punkte P einer ebenen Kurve C an die Tangente eine Gerade g_γ unter konstantem Winkel γ an, so umhüllen die Geraden g_γ eine Kurve E_γ, die im Falle, daß γ ein Rechter ist, in die Evolute E von C übergeht.

„Hält man einen Punkt P von C fest, so liegen die Berührungspunkte aller von P ausgehenden Geraden g_γ auf dem Kreise, der über dem Krümmungsradius von P als Durchmesser beschrieben ist."

Erste Lösung: Die Kurve C habe, auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bezogen, die Gleichung $y = f(x)$. Um die Kurve E_γ zu finden, gehe ich aus von der Gleichung der Geraden g_γ:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \operatorname{tg} \alpha, \tag{1}$$

wo α den Winkel bezeichnet, den g_γ mit der positiven X-Achse bildet, und wo sich (x_1, y_1) auf die Kurve C, (x, y) auf die Kurve E_γ beziehen. Da $\frac{dy_1}{dx_1} = f'(x_1)$ der Richtungskoeffizient der Tangente der Kurve C ist, so ist: $\operatorname{tg} \gamma = \frac{\operatorname{tg} \alpha - f'(x_1)}{1 + f'(x_1) \cdot \operatorname{tg} \alpha}$, woraus mit $f'(x_1) = y_1'$ hervorgeht: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_1' + \operatorname{tg} \gamma}{1 - y_1' \cdot \operatorname{tg} \gamma}$.

Digitized by Google

Setzt man diesen Wert in (1) ein, so ergibt sich:

$$F(x, y, x_1) = (y - y_1)(1 - y_1' \operatorname{tg}\gamma) - (x - x_1)(y_1' + \operatorname{tg}\gamma) = 0.$$

Durch Differentiation nach x_1 erhält man, da $y_1 = f(x_1)$:

$$\frac{\partial F(x,y,x_1)}{\partial x_1} = -(y - y_1) y_1'' \operatorname{tg}\gamma - (1 - y_1' \operatorname{tg}\gamma) y_1' - (x - x_1) y_1'' + y_1' + \operatorname{tg}\gamma = 0,$$

woraus:

$$\operatorname{tg}\gamma = -\frac{(x - x_1) y_1''}{(y - y_1) y_1'' - (1 + y_1'^2)}.$$

Um nun den geometrischen Ort der Berührungspunkte aller Kurven E_γ mit den durch $P \equiv (x_1, y_1)$ gehenden Geraden g_γ zu finden, hat man x_1, y_1 als konstant, $\operatorname{tg}\gamma$ dagegen als variabel zu betrachten. Die Substitution des obigen Wertes von $\operatorname{tg}\gamma$ verwandelt Gleichung (1) weiter in:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1' [(y - y_1) y_1'' - (1 + y_1'^2)] - (x - x_1) y_1''}{y_1' y_1'' (x - x_1) + (y - y_1) y_1'' - (1 + y_1'^2)}$$

oder

$$(y - y_1)^2 y_1'' - (y - y_1)(1 + y_1'^2) + (x - x_1)^2 y_1'' + (x - x_1) y_1' (1 + y_1'^2) = 0.$$

Und diese Gleichung läßt sich leicht auf die Form

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = \left(\frac{\varrho}{2}\right)^2$$

bringen, wo

$$\varrho = \frac{(1 + y_1'^2)^{\frac{3}{2}}}{y_1''}, \quad \xi = x_1 - \frac{(1 + y_1'^2) y_1'}{2 y_1''}, \quad \eta = y_1 + \frac{1 + y_1'^2}{2 y_1''}$$

den Krümmungsradius der Kurve C, bezw. die Koordinaten des Halbierungspunktes von ϱ bezeichnen. Der gesuchte Ort ist also in der Tat ein Kreis, der den Krümmungsradius von P zum Durchmesser hat.

Berlin. stud. math. Werner Gaedecke.

Zweite Lösung: Von zwei festen Punkten M_1 und M_2 mögen zwei Strahlen ausgehen, die sich in S schneiden. Drehen sich nun $M_1 S$ und $M_2 S$ mit gleichen und gleichsinnigen Geschwindigkeiten um M_1 und M_2, so durchläuft ihr Schnittpunkt den Umkreis von $M_1 M_2 S$.

Es seien P und Q zwei unendlich nahe Punkte auf der gegebenen Kurve C; dann schneiden sich die Normalen von P und Q im Zentrum Z des Krümmungskreises. Ein Punkt der gesuchten Umhüllungslinie E_γ ist der Schnittpunkt S zweier Geraden, die mit den Tangenten in P und Q, also auch mit den Normalen in P und Q denselben Winkel bilden. Daher liegt S auf dem Umkreise von PQZ; dieser Kreis berührt natürlich die Tangente in P, ist also der Kreis über dem Krümmungsradius von P als Durchmesser.

Berlin, 12. Febr. 1908. E. Lampe.

Zu **156** (Bd. X. S. 328) (O. Meißner) — Gegeben ist ein Dreieck ABC mit den Seiten a, b, c, den Winkeln α, β, γ und dem Flächeninhalt J. Gesucht werden alle eingeschriebenen, gleichwendig und ungleichwendig ähnlichen Dreiecke $A'B'C'$ vom Flächeninhalte i.

Digitized by Google

a) Ich beschränke mich zunächst auf den Fall, daß ABC ungleichseitig ist und benütze folgende bekannte Sätze (Emmerich, die Brocardschen Gebilde. § 38, 9. Anm., § 61, 5. usw.):

I. Es gibt sechs Punkte in der Ebene, deren Fußpunktdreiecke $A_0'B_0'C_0'$ dem Urdreiecke ABC gleichwendig ähnlich sind, und zwar

1. den Umkreismittelpunkt O; die Ecken A_0', B_0', C_0' des zugehörigen Fußpunktdreieckes liegen bezüglich auf a, b, c, und der Flächeninhalt ist $i_0(O) = \frac{J}{4}$.

2. und 3. die beiden Brocardschen Punkte D und E; die Ecken A_0', B_0', C_0' der zugehörigen Fußpunktdreiecke liegen bezüglich auf c, a, b und b, c, a, und die Flächeninhalte sind $i_0(D) = i_0(E) = J \sin^2\omega$, wobei ω der Brocardsche Winkel des Urdreiecks ist.

4., 5. und 6. die Zentren der drei Apollonischen Kreise L', M' und N'; die Ecken A_0', B_0', C_0' der zugehörigen Fußpunktdreiecke liegen bezüglich auf a, c, b; c, b, a und b, a, c, und die Flächeninhalte sind[1])

$$i_0(L') = J \cdot \frac{\sin^2\beta \sin^2\gamma}{\sin^2(\beta-\gamma)},\quad i_0(M') = J \cdot \frac{\sin^2\gamma \sin^2\alpha}{\sin^2(\gamma-\alpha)},\quad i_0(N') = J \cdot \frac{\sin^2\alpha \sin^2\beta}{\sin^2(\alpha-\beta)}.$$

II. Es gibt ferner fünf Punkte in der Ebene, deren Fußpunktdreiecke $A_0'B_0'C_0'$ dem Urdreiecke ABC ungleichwendig ähnlich sind, nämlich:

7., 8. und 9. die Ecken des zweiten Brocardschen Dreiecks L, M und N; die Ecken A_0', B_0', C_0' der zugehörigen Fußpunktdreiecke liegen bezüglich auf a, c, b; c, b, a und b, a, c, und die Flächeninhalte sind

$$i_0(L) = \frac{J}{4}\sin^2\lambda,\ i_0(M) = \frac{J}{4}\sin^2\mu,\ i_0(N) = \frac{J}{4}\sin^2\nu,$$

wobei λ, μ und ν die Winkel zwischen den Seiten und ihren zugeordneten Schwerlinien im Urdreiecke sind.

10. und 11. die durch Inversion am Umkreise aus den Brocardschen Punkten D und E entstandenen Punkte D' und E'; die Ecken A_0', B_0', C_0' der zugehörigen Fußpunktdreiecke liegen bezüglich auf c, a, b und b, c, a, und die Flächeninhalte sind $i_0(D') = i_0(E') = \frac{J}{\cot^2\omega - 3}$.

b) Es werde allgemein irgend einer dieser elf Punkte mit P bezeichnet. Die Lote PA_0', PB_0' und PC_0' mögen nun um P im positiven oder negativen Sinne um den Winkel θ_p gedreht und gleichzeitig im Verhältnisse $1 : \cos\theta_p$ verlängert werden, dann bleiben die Endpunkte auf den Seiten des Urdreieckes und bilden ein eingeschriebenes Dreieck $A'B'C' \sim A_0'B_0'C_0' \sim ABC$ mit dem Flächeninhalt $\frac{i_0(P)}{\cos^2\theta_p}$, der $= i$ sein soll. Ist daher $i \gtreqless i_0(P)$ gegeben, so lassen sich aus jeder der elf Gleichungen

$$(m) \qquad \cos\theta_p = \sqrt{\frac{i_0(P)}{i}}$$

1) Hat ein Punkt P von den Seiten a, b, c die Abstände x, y, z so ist der Flächeninhalt seines Fußpunktdreiecks bekanntlich:

$$i_0 = \tfrac{1}{2}(yz\sin\alpha + zx\sin\beta + xy\sin\gamma).$$

Die senkrechten Abstände x, y, z (Normalkoordinaten) der im Texte angegebenen Punkte sind bekannt (Emmerich, l. c. Anhang.), daher konnte i_0 überall angegeben werden.

Digitized by Google

entweder zwei reelle (spitze) Winkel $\pm\theta$, oder nur ein Wert $\theta = 0$, oder kein reeller Winkel θ finden. Die Anzahl der reellen Lösungen für θ aus diesen elf Gleichungen (m), welche $\leqq 22$ ist, stimmt demnach mit der Anzahl der eingeschriebenen, gleichwendig und ungleichwendig ähnlichen Dreiecke $A'B'C'$ vom Flächeninhalte i überein.

c) Ist ABC gleichschenklig, etwa $b = c$, so fällt vom zweiten Brocardschen Dreiecke die Ecke L nach O, die Ecke M nach D und die Ecke N nach E, desgleichen tällt L' ins Unendliche, M' auf D' und N' auf E'; es gibt hier also nur 5 Punkte, nämlich O, D, E, D', E', deren Fußpunktdreiecke mit dem Urdreiecke ähnlich sind (ein Unterschied zwischen gleichwendig und ungleichwendig ähnlich besteht hier nicht), und daher nur fünf Gleichungen (m) für θ mit höchstens zehn reellen Lösungen.

d) Ist ABC gleichseitig, so fallen von den vorigen fünf Punkten D und E nach O und D' und E' ins Unendliche, weshalb also hier nur eine Gleichung (m) mit höchstens zwei reellen Lösungen für θ auftritt.

e) Aus diesen Betrachtungen ist ersichtlich, daß die Aufgabe insofern inkorrekt gestellt ist, als nicht „drei evidente" Lösungen vorkommen; denn die Anzahl z der Lösungen genügt beim ungleichseitigen Dreiecke der Ungleichung $0 \leqq z \leqq 22$, beim gleichschenkligen Dreiecke der Ungleichung $0 \leqq z \leqq 10$ und beim gleichseitigen Dreiecke der Ungleichung $0 \leqq z \leqq 2$. Die Lösung auf Seite 107 in Bd. XII berücksichtigt nur den Brocardschen Punkt D, dessen Fußpunktdreieck $i_0 = J \sin^3\omega$ ist; daher werden bloß zwei, eine, oder keine Lösung gefunden, jenachdem

$$\frac{i}{J} \gtreqless \frac{i_0}{J} \quad \text{oder} \quad \frac{i}{J} \gtreqless \sin^2\omega.$$

Diese Lösung ist demnach unvollständig.

Aussig (Böhmen). stud. math. Josef Krug.

Zu **173** (Bd. XI, 132) (G. Kober). — Eine Antwort auf die erste Frage ist auch von Herrn stud. Arthur Wieferich (Münster) eingelaufen. Red.

Zu **180.** (Bd. XII, S. 91) (G. Kober). — Die Gleichung einer kubischen Parabel P_3 sei $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$. Diese Gleichung kann man schreiben $\frac{y - a_0}{x} = a_1 + a_2 x + a_3 x^2$, und daraus erkennt man, daß P_3 das Erzeugnis des Strahlenbüschels

$$\text{(I)} \qquad \frac{y - a_0}{x} = \lambda$$

und der Parallelstrahleninvolution

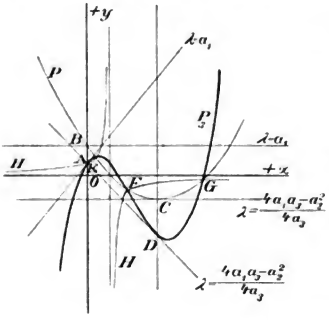
$$\text{(II)} \qquad a_1 + a_2 x + a_3 x^2 = \lambda$$

ist. Der Scheitel des Büschels (I) ist der Punkt A (siehe Fig.), in dem P_3 die y-Achse schneidet; seine Koordinaten sind 0, a_0. Die Strahlen der Involution (II) treffen die Parabel $y = a_1 + a_2 x + a_3 x^2$, die mit P bezeichnet werden möge, in den Punkten, in denen sie auch von den Strahlen des Büschels

$$\text{(III)} \qquad y = \lambda,$$

Digitized by Google

dessen Scheitel der unendlich entfernte Punkt der x-Achse ist, geschnitten wird, und diese Schnittpunkte werden also von den Strahlen der Involution auf die x-Achse und auf jede zu ihr parallele Gerade projiziert. Die Parabel P schneidet die y-Achse in dem Punkte B, dessen Ordinate a_1 ist; ihr Scheitel



C hat die Koordinaten $-\frac{a_2}{2a_3}$, $\frac{4a_1a_3-a_2^2}{4a_3}$. Der Schnittpunkt der Parabelachse mit der Kurve P_3 sei D.

In den Strahlenbüscheln (III) und (I) entsprechen einander die Strahlen $y=a_1$ und $\frac{y-a_0}{x}=a_1$; ersterer ist die Parallele durch B zur x-Achse, letzterer die Tangente von P_3 in A. Ferner entsprechen sich die Strahlen

$$y=\frac{4a_1a_3-a_2^2}{4a_3}$$

und

$$\frac{y-a_0}{x}=\frac{4a_1a_3-a_2^2}{4a_3};$$

ersterer ist die Parallele durch C zur x-Achse, letzterer die Tangente von P_3 in D.

Das Erzeugnis der beiden projektivischen Strahlenbüschel (III) und (I) ist die Hyperbel $y(x-1)=-a_0$; sie heiße H. Sie geht durch A und hat die Asymptoten $x=1$ und $y=0$. Für die Schnittpunkte von H und P gilt die Gleichung

$$\frac{a_0}{1-x}=a_1+a_2x+a_3x^2 \text{ oder } a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3-(a_1+a_2x+a_3x^2)=0.$$

Diese Gleichung genügt auch den drei Schnittpunkten der Kurven P_3 und P. Demnach schneidet die Hyperbel H die Kurve P_3 außer in A noch in den drei Punkten E, F, G, in denen P_3 von P getroffen wird. Punkt A ist immer reell; dagegen können zwei der Punkte E, F, G imaginär sein.

Anmerkung: Die Figur entspricht der Gleichung $y=\frac{1}{2}+\frac{5}{4}x-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{4}x^3$.

Prenzlau. W. Stegemann.

2. Anfragen und Antworten.

(Vacat.)

3. Kleinere Notizen.

Das regelmäßige Vieruunddreißig-Eck.

1. Aus Fig. 1 läßt sich die Gleichung ablesen:

(I) $$2\sin\tfrac{15}{2}\alpha+2\sin\tfrac{11}{2}\alpha+2\sin\tfrac{7}{2}\alpha+2\sin\tfrac{3}{2}\alpha=1+2\sin\tfrac{13}{2}\alpha+2\sin\tfrac{9}{2}\alpha+2\sin\tfrac{5}{2}\alpha+2\sin\tfrac{1}{2}\alpha$$

Digitized by Google

oder auch folgende:

$$\text{(II)}\quad 2\cos\alpha + 2\cos 3\alpha + 2\cos 5\alpha + 2\cos 7\alpha = 1 + 2\cos 2\alpha + 2\cos 4\alpha + 2\cos 6\alpha + 2\cos 8\alpha.$$

Allgemein kann man für einen Winkel $\alpha = \frac{\pi}{4n+1}$ (n eine ganze Zahl $\geqq 1$) sich folgende Konstruktion (s. Fig. 2a und 2b) ausgeführt denken. Vom Scheitel aus sei auf dem einen Schenkel eine beliebige Strecke $= 1$ abgeschnitten, um den Endpunkt des Abschnitts ein Bogen mit dem Halbmesser 1 beschrieben, um den Schnittpunkt dieses Bogens mit dem andern Schenkel sei wieder ein Bogen mit dem Halbmesser 1 geschlagen, und das Verfahren sei fortgesetzt, bis die ganze Figur ein gleichschenkliges Dreieck mit dem Basiswinkel $2n\alpha$ werde. Von den $2n$ Teildreiecken liegen n mit den

Fig. 1.

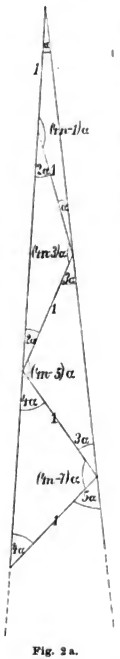


Fig. 2a.

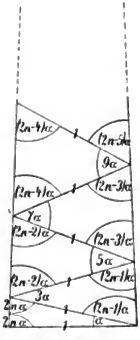


Fig. 2b.

Basiswinkeln $\alpha, 3\alpha, \cdots (2n-1)\alpha$ dem einen Schenkel, n andere mit den Basiswinkeln $2\alpha, 4\alpha, \cdots 2n\alpha$ dem andern Schenkel an. Das letzte Teildreieck ist stets dem ganzen Dreiecke ähnlich. Für den einfachsten Fall, $n = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{5}$, ergibt sich die altbekannte Figur zur Herleitung der Konstruktion eines Winkels von 36^0.

Digitized by Google

Aus Fig. 2a und 2b lassen sich für $\alpha = \frac{\pi}{4n+1}$ die allgemeinen Formeln ablesen:

$$2 \sin \frac{4n-1}{2} \alpha - 2 \sin \frac{4n-3}{2} \alpha + \cdots + 2 \sin \tfrac{3}{2} \alpha - 2 \sin \frac{\alpha}{2} = 1$$

oder

$$2 \cos \alpha - 2 \cos 2\alpha + \cdots + 2 \cos (2n-1)\alpha - 2 \cos 2n\alpha = 1.$$

Die letztere Formel läßt sich auch schreiben

$$2 \cos \alpha + 2 \cos 3\alpha + \cdots + 2 \cos (2n-1)\alpha + 2 \cos (2n+1)\alpha + \cdots + 2 \cos (4n-1)\alpha = 1.$$

2. In ähnlicher Weise läßt sich die Gleichung (II) schreiben:

$$2 \cos \alpha + 2 \cos 3\alpha + 2 \cos 5\alpha + 2 \cos 7\alpha + 2 \cos 9\alpha + 2 \cos 11\alpha + 2 \cos 13\alpha + 2 \cos 15\alpha = 1.$$

Nun kommt es nach Gauß[1]) an auf den Ausdruck

$$\cos \alpha + \cos 9\alpha + \cos 13\alpha + \cos 15\alpha = \sin \tfrac{15}{2}\alpha - \sin \tfrac{1}{2}\alpha - \sin \tfrac{9}{2}\alpha - \sin \tfrac{13}{2}\alpha.$$

Setzt man in der Gleichung (I)

$$\sin \tfrac{11}{2}\alpha + \sin \tfrac{7}{2}\alpha + \sin \tfrac{3}{2}\alpha - \sin \tfrac{5}{2}\alpha = x_1,$$
$$\sin \tfrac{1}{2}\alpha + \sin \tfrac{9}{2}\alpha + \sin \tfrac{13}{2}\alpha - \sin \tfrac{15}{2}\alpha = x_2,$$

so ist $x_1 - x_2 = \frac{1}{2}$. Führt man die Multiplikation $x_1 x_2$ aus und wendet auf die Teilprodukte die Formel $\sin\beta \sin\gamma = \frac{1}{2}[\cos(\beta-\gamma) - \cos(\beta+\gamma)]$ an, so findet man

$$x_1 x_2 = 2 \cos \alpha - 2 \cos 2\alpha + 2 \cos 3\alpha - 2 \cos 4\alpha + 2 \cos 5\alpha - 2 \cos 6\alpha + 2 \cos 7\alpha - 2 \cos 8\alpha,$$

also nach Formel (II): $x_1 x_2 = 1$.

Setzt man weiter $\sin \frac{11}{2}\alpha + \sin \frac{7}{2}\alpha = y_1$, $\sin \frac{5}{2}\alpha - \sin \frac{3}{2}\alpha = y_2$, so ist

$$y_1 - y_2 = x_1,$$
$$y_1 y_2 = \tfrac{1}{2}(\cos\alpha - \cos 2\alpha + \cos 3\alpha - \cos 4\alpha + \cos 5\alpha - \cos 6\alpha + \cos 7\alpha - \cos 8\alpha) = \tfrac{1}{4}.$$

Ebenso ergibt sich für $\sin \frac{13}{2}\alpha + \sin \frac{1}{2}\alpha = z_1$, $\sin \frac{15}{2}\alpha - \sin \frac{9}{2}\alpha = z_2$

$$z_1 - z_2 = x_2, \quad z_1 z_2 = \tfrac{1}{4}.$$

Endlich findet man

$$\sin \tfrac{13}{2}\alpha \sin \tfrac{1}{2}\alpha = \tfrac{1}{2}(\cos 6\alpha - \cos 7\alpha) = \tfrac{1}{2}(\sin \tfrac{5}{2}\alpha - \sin \tfrac{3}{2}\alpha) = \tfrac{1}{2} y_2.$$

Für die Sehnen der doppelten Winkel aber ergeben sich die Gleichungen

$$\text{chord } 11\alpha + \text{chord } 7\alpha - (\text{chord } 5\alpha - \text{chord } 3\alpha) = 2x_1 = a_1,$$
$$\text{chord } 13\alpha + \text{chord } \alpha - (\text{chord } 15\alpha - \text{chord } 9\alpha) = 2x_2 = a_2,$$

(III) $$a_1 - a_2 = 1; \qquad a_1 a_2 = 4,$$

1) Disquisitiones arithmeticae, art. 364.

Digitized by Google

ferner

$$\text{chord } 11\alpha + \text{chord } 7\alpha = 2y_1 = b_1, \quad \text{chord } 5\alpha - \text{chord } 3\alpha = 2y_2 = b_2,$$

$$b_1 - b_2 = a_1; \qquad b_1 b_2 = 1. \tag{IV}$$

$$\text{chord } 13\alpha + \text{chord } \alpha = 2z_1 = c_1, \quad \text{chord } 15\alpha - \text{chord } 9\alpha = 2z_2 = c_2$$

$$c_1 - c_2 = a_2, \qquad c_1 c_2 = 1, \tag{V}$$

endlich

$$\text{chord } 13\alpha \text{ chord } \alpha = b_2. \tag{VI}$$

Es kann nunmehr chord α = chord $\frac{\pi}{17}$, die Seite des in einen gegebenen Kreis beschriebenen regelmäßigen Vielecks von 34 Seiten, durch Konstruktion gefunden werden (s. Fig. 3).

Man ziehe einen Durchmesser AO_1B, mache $AO_2 \perp AB$ und $= \frac{1}{2} AO_1$, beschreibe um O_2 mit O_2A einen Kreis, ziehe und verlängere BO_2. Man be-

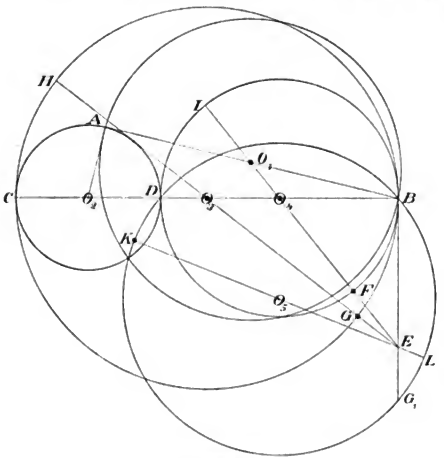


Fig. 3.

schreibe um BC und um BD als Durchmesser Kreise, mache $BE \perp CB$ und $= BO_1$, ziehe und verlängere EO_3 und EO_4. Dann verlängere man BE um $EG_1 = EG$, beschreibe um B und um G_1 mit $\frac{1}{2} EJ$ Bogen, die sich in O_5 schneiden, schlage um O_5 mit $\frac{1}{2} EJ$ einen Kreis und ziehe in diesem den durch E gehenden Durchmesser. Dann ist $BC = a_1$, $BD = a_2$, $EH = b_1$, $EG = b_2$, $EJ = c_1$, $EF = c_2$, $EK =$ chord 13α, EL aber $=$ chord α die Seite des in den gegebenen Kreis einbeschriebenen regelmäßigen Vierunddreißig-Ecks.

Digitized by Google

3. Es besteht zwischen der Beschreibung des regelmäßigen Vierunddreißig-Ecks und der des regelmäßigen Siebzehn-Ecks in einen gegebenen Kreis dieselbe Beziehung, die für die regelmäßigen Figuren von 10 und von 5, von 6 und von 3 Seiten gilt: das regelmäßige Vieleck mit der doppelten Seitenzahl läßt sich leichter einbeschreiben, als das mit der einfachen Seitenzahl, und letzteres konstruiert man am einfachsten mit Hilfe des ersteren. Diese Beziehung findet bei der Berechnung der Seiten aus dem Halbmesser des gegebenen Kreises darin ihren Ausdruck, daß für die Seite des Vielecks mit der einfachen Seitenzahl eine Quadratwurzelziehung mehr erforderlich ist, der Wurzelexponent des algebraischen Ausdrucks die zweifache Höhe hat.

4. Leitet man zu den Gleichungen (III)—(VI) noch folgende ab:

$$\text{chord } 15\alpha \cdot \text{chord } 9\alpha = \text{chord } 11\alpha + \text{chord } 7\alpha = b_1$$
$$\text{chord } 11\alpha \cdot \text{chord } 7\alpha = \text{chord } 13\alpha + \text{chord } \alpha = c_1$$
$$\text{chord } 5\alpha \cdot \text{chord } 3\alpha = \text{chord } 15\alpha - \text{chord } 9\alpha = c_2,$$

so ist die Berechnung der acht Sehnen zurückgeführt auf die Lösungen quadratischer Gleichungen.

Es ergibt sich

$$a_1 = \frac{\sqrt{17}+1}{2}, \qquad a_2 = \frac{\sqrt{17}-1}{2}$$

$$b_1 = \tfrac{1}{4}\left(\sqrt{17}+1+\sqrt{34+2\sqrt{17}}\right), \quad b_2 = \tfrac{1}{4}\left(-\sqrt{17}-1+\sqrt{34+2\sqrt{17}}\right)$$

$$c_1 = \tfrac{1}{4}\left(\sqrt{17}-1+\sqrt{34-2\sqrt{17}}\right); \quad c_2 = \tfrac{1}{4}\left(-\sqrt{17}+1+\sqrt{34-2\sqrt{17}}\right).$$

Bei der weiteren Berechnung ist zu beachten: es ist

$$\sqrt{17}\sqrt{34+2\sqrt{17}} = 4\sqrt{34-2\sqrt{17}} + \sqrt{34+2\sqrt{17}}$$
$$\sqrt{17}\sqrt{34-2\sqrt{17}} = 4\sqrt{34+2\sqrt{17}} - \sqrt{34-2\sqrt{17}},$$

entsprechend den Formeln

$$\sqrt{a^2+1}\sqrt{2(a^2+1)+2\sqrt{a^2+1}} = a\sqrt{2(a^2+1)-2\sqrt{a^2+1}} + \sqrt{2(a^2+1)+2\sqrt{a^2+1}}$$
$$\sqrt{a^2+1}\sqrt{2(a^2+1)-2\sqrt{a^2+1}} = a\sqrt{2(a^2+1)+2\sqrt{a^2+1}} - \sqrt{2(a^2+1)-2\sqrt{a^2+1}}$$

für $a = 4$, oder den allgemeineren Formeln:

$$\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{2(a^2+b^2)+2b\sqrt{a^2+b^2}} = a\sqrt{2(a^2+b^2)-2b\sqrt{a^2+b^2}} + b\sqrt{2(a^2+b^2)+2b\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{2(a^2+b^2)-2b\sqrt{a^2+b^2}} = a\sqrt{2(a^2+b^2)+2b\sqrt{a^2+b^2}} - b\sqrt{2(a^2+b^2)-2b\sqrt{a^2+b^2}}$$

für $a = 4$, $b = 1$.

Digitized by Google

Anderes Beispiel für die allgemeineren Formeln:

$$\sqrt{13}\sqrt{26+4\sqrt{13}} = 3\sqrt{26-4\sqrt{13}} + 2\sqrt{26+4\sqrt{13}}$$

$$\sqrt{13}\sqrt{26-4\sqrt{13}} = 3\sqrt{26+4\sqrt{13}} - 2\sqrt{26-4\sqrt{13}}.$$

5. Mit Berücksichtigung dieser Formeln findet man

$$\begin{cases} \text{chord}\quad \alpha = \frac{1}{8}\left(\sqrt{17}-1+\sqrt{34-2\sqrt{17}}\right) \\ \qquad\qquad -\frac{1}{4}\sqrt{17+3\sqrt{17}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}} \\ \text{chord}\ 13\alpha = \frac{1}{8}\left(\sqrt{17}-1+\sqrt{34-2\sqrt{17}}\right) \\ \qquad\qquad +\frac{1}{4}\sqrt{17+3\sqrt{17}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{chord}\ 15\alpha = \frac{1}{8}\left(-\sqrt{17}+1+\sqrt{34-2\sqrt{17}}\right) \\ \qquad\qquad +\frac{1}{4}\sqrt{17+3\sqrt{17}+2\sqrt{34+2\sqrt{17}}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}} \\ \text{chord}\ 9\alpha = -\frac{1}{8}\left(-\sqrt{17}+1+\sqrt{34-2\sqrt{17}}\right) \\ \qquad\qquad +\frac{1}{4}\sqrt{17+3\sqrt{17}+2\sqrt{34+2\sqrt{17}}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{chord}\ 11\alpha = \frac{1}{8}\left(\sqrt{17}+1+\sqrt{34+2\sqrt{17}}\right) \\ \qquad\qquad +\frac{1}{4}\sqrt{17-3\sqrt{17}-2\sqrt{34-2\sqrt{17}}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}} \\ \text{chord}\ 7\alpha = \frac{1}{8}\left(\sqrt{17}+1+\sqrt{34+2\sqrt{17}}\right) \\ \qquad\qquad -\frac{1}{4}\sqrt{17-3\sqrt{17}-2\sqrt{34-2\sqrt{17}}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{chord}\ 5\alpha = \frac{1}{8}\left(-\sqrt{17}-1+\sqrt{34+2\sqrt{17}}\right) \\ \qquad\qquad +\frac{1}{4}\sqrt{17-3\sqrt{17}+2\sqrt{34-2\sqrt{17}}-\sqrt{34+2\sqrt{17}}} \\ \text{chord}\ 3\alpha = -\frac{1}{8}\left(-\sqrt{17}-1+\sqrt{34+2\sqrt{17}}\right) \\ \qquad\qquad +\frac{1}{4}\sqrt{17-3\sqrt{17}+2\sqrt{34-2\sqrt{17}}-\sqrt{34+2\sqrt{17}}}. \end{cases}$$

Bekannt ist außerdem chord 17α gleich dem Durchmesser 2.

6. Zur Berechnung der übrigen Diagonalen des regelmäßigen Vierunddreißig-Ecks aus dem Halbmesser des umbeschriebenen Kreises leite ich aus

$$\sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\beta}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[1-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\right]} \text{ ab } \text{chord}\,\beta = \sqrt{2-\text{chord}\,(\pi-2\beta)}$$

Digitized by Google

und finde wegen $\pi = 17\alpha$,

$$\text{chord } 2\alpha = \sqrt{2 - \text{chord } 13\alpha}, \quad \text{chord } 4\alpha = \sqrt{2 - \text{chord } 9\alpha},$$
$$\text{chord } 6\alpha = \sqrt{2 - \text{chord } 5\alpha}, \quad \text{chord } 8\alpha = \sqrt{2 - \text{chord } \alpha},$$
$$\text{chord } 10\alpha = \sqrt{2 + \text{chord } 3\alpha}, \quad \text{chord } 12\alpha = \sqrt{2 + \text{chord } 7\alpha},$$
$$\text{chord } 14\alpha = \sqrt{2 + \text{chord } 11\alpha}, \quad \text{chord } 16\alpha = \sqrt{2 + \text{chord } 15\alpha}.$$

Besondere Aufmerksamkeit verdient chord $2\alpha = \text{chord } \frac{2}{17}\pi$ als Seite des einbeschriebenen regelmäßigen Siebzehnecks. Für dieselbe ergibt sich

$$\sqrt{\tfrac{1}{8}\left(17 - \sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}\right) - \tfrac{1}{4}\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}}.$$

Die vorstehenden acht Diagonalen des regelmäßigen Vierunddreißig-Ecks sind die Seite und die Diagonalen des regelmäßigen Siebzehn-Ecks; die algebraischen Ausdrücke für dieselben sind Irrationalitäten vom 16 ten Grade. Die Ausdrücke für die übrigen Diagonalen (art. 5), abgesehen vom Durchmesser, enthalten als höchste Irrationalitäten solche vom 8 ten Grade.

7. In **Klügels** mathematischem Wörterbuch, 5. Band (bearbeitet von Grunert), S. 811, werden die Gleichungen III—VI (art. 2) abgeleitet und auf dieselben eine Konstruktion gegründet. Die oben von mir gegebene Konstruktion scheint mir in Ausführung und Beweis einfacher zu sein.

A. a. O. ist $\text{chord } \frac{2}{17}\pi = 2\sin\frac{\pi}{17}$ aus $2\sqrt{1 - \cos^2\frac{\pi}{17}}$ abgeleitet und gleich

$$\tfrac{1}{4}\sqrt{34 - 2\sqrt{17} - 2\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 4\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{170 + 38\sqrt{17}}}}$$

gefunden.

Der Wert stimmt mit dem von mir gefundenen (s. o.) überein; denn es ist

$$\sqrt{170 + 38\sqrt{17}} = 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}.$$

In ähnlicher Weise läßt sich $2\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}$ zu $\sqrt{170 - 38\sqrt{17}}$ zusammenziehen. Will man alle Sehnen berechnen, so bringt diese Zusammenziehung keine Erleichterung.

Gauß gibt a. a. O. art. 365 für $\cos\frac{1}{17}P$, wo P den Kreisumfang bezeichnet, den Wert an:

$$\tfrac{1}{16}\left(-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}\right) + \tfrac{1}{8}\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}.$$

Es ist aber $\cos\frac{1}{17}P = \cos\frac{2}{17}\pi = \frac{1}{2}\,\text{chord } 13\alpha$ Die Ergebnisse stimmen also überein.

Kassel. KARL HUNRATH.

Digitized by Google

Der Fundamentalsatz der Algebra.

Einer der einfachsten von den vielen Beweisen für den Fundamentalsatz der Algebra scheint mir derjenige zu sein, der sich auf den bekannten funktionentheoretischen Satz stützt, daß eine rationale Funktion jeden beliebigen Wert ebenso oft annimmt, als sie unendlich wird. Ist also w speziell eine *ganze* rationale Funktion von z vom Grade n, also

$$w = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0, \tag{1}$$

so folgt, daß, wenn z alle Werte der komplexen Z-Ebene durchläuft, w alle Werte der komplexen W-Ebene annimmt und zwar jeden n-mal, also auch den Wert Null. Man kann nun auf elementarem Weg ohne funktionentheoretische Hilfsmittel beweisen, daß, wenn z alle Werte der Z-Ebene durchläuft, w jeden Wert, im besonderen auch den Wert Null, mindestens *einmal* annimmt. Die Gleichung $w = 0$ hat also mindestens eine Wurzel. In bekannter Weise folgt dann, daß die Gleichung $w = 0$ genau n Wurzeln hat. Dies zu beweisen, ist der Zweck der folgenden Zeilen.

Beweis. Dem beliebigen komplexen Wert z_0 entspreche nach (1) der Wert w_0; wir setzen nun

$$z = z_0 + z_1, \quad w = w_0 + w_1 \tag{2}$$

und erhalten aus (1) durch Ordnen nach Potenzen von z_1 eine Gleichung von der Form

$$w_1 = z_1^{\mu}(b_0 + b_1 z_1 + b_2 z_1^2 + \cdots + b_{n-\mu} z_1^{n-\mu}), \tag{3}$$

wobei die ganze positive Zahl μ den Ungleichungen

$$n \geqq \mu \geqq 1 \tag{4}$$

genügt und die b_i konstante endliche komplexe Größen sind. Das von z_1 freie Glied ist in (3) verschwunden, da nach (2) für $z_1 = 0$ auch $w_1 = 0$ sein muß. Aus (3) folgt nun nach dem bekannten Satz über den absoluten Betrag einer Summe

$$|w_1| \leqq |b_0 z_1^{\mu}| + |b_1 z_1 + b_2 z_1^2 + \cdots + b_{n-\mu} z_1^{n-\mu}| \cdot |z_1^{\mu}|. \tag{5}$$

Da die Koeffizienten b_i alle endlich sind, so existiert eine positive Zahl m derart, daß für alle $i = 1, 2, \cdots n - \mu$

$$|b_i| < m \cdot |b_0| \tag{6}$$

ist. Aus (6) folgt jetzt

$$\begin{aligned} |b_1 z_1 + b_2 z_1^2 + \cdots + b_{n-\mu} z_1^{n-\mu}| &< m \cdot |b_0| \cdot |z_1| \cdot \{1 + |z_1| + |z_1|^2 \\ &+ \cdots + |z_1|^{n-\mu-1}\} = m\,|b_0| \cdot |z_1| \cdot \frac{1 - |z_1|^{n-\mu}}{1 - |z_1|}. \end{aligned} \tag{7}$$

Wir setzen von nun an fest, daß stets

$$|z_1| < \frac{1}{m+1} \tag{8}$$

ist, dann folgt aus (7)

$$\begin{aligned} |b_1 z_1 + b_2 z_1^2 + \cdots b_{n-\mu} z_1^{n-\mu}| &< (m+1) \cdot |b_0| \cdot |z_1| \{1 - |z_1|^{n-\mu}\} \\ &< |b_0| \cdot \{1 - |z_1|^{n-\mu}\} < |b_0|. \end{aligned} \tag{9}$$

Digitized by Google

Aus dieser Gleichung und aus (5) ergibt sich

$$|w_1| < |2b_0 z_1^\mu \tag{10}$$

für alle z_1, die der Ungleichung (8) genügen. Die Ungleichung (10) drückt nichts anderes aus als die bekannte Tatsache, daß die Funktion $w(z)$ in (1) in der Umgebung jedes Punktes der Z-Ebene eine *stetige* Funktion von z ist.

Aus (3) ergibt sich weiter

$$|w_1| \geqq |b_0 z_1^\mu - b_1 z_1 + b_2 z_1^2 + \cdots b_{n-\mu} z_1^{n-\mu}| \cdot |z_1^\mu$$

und mit Hilfe von (9)

$$\begin{cases} |w_1| > |b_0 z_1^\mu| - |b_0| \cdot z_1^\mu \cdot \{1 - |z_1|^{n-\mu}\} \\ |w_1| > |b_0| \cdot |z_1|^n. \end{cases} \tag{11}$$

Wir beschreiben nun in der Z-Ebene um den Punkt z_0 einen Kreis mit dem Radius $|z - z_0| = |z_1| < \frac{1}{m+1}$ und in der W-Ebene um den Punkt w_0 zwei Kreise mit den Radien $|b_0| \cdot |z_1|^n$ bzw. $|2b_0 z_1^\mu|$; alsdann folgt aus (10) und (11), daß die Bilder der Peripheriepunkte des Kreises in der Z-Ebene in das durch die zwei Kreise der W-Ebene begrenzte Ringgebiet fallen. Es könnte nun immerhin der Fall sein, daß die Punkte der Kreisperipherie in der Z-Ebene nur gewisse Bezirke des Ringgebiets als Bilder ergeben. Wir können aber im Folgenden zeigen, daß, wenn z_1 die Peripherie jenes Kreises durchläuft, also sein Argument um 2π wächst, das Argument von w_1 ebenfalls mindestens um 2π gewachsen ist. Zu diesem Beweise brauchen wir folgenden *Hilfssatz:* Seien $c_1, c_2, \cdots c_n$ beliebige komplexe Größen derart, daß

$$\sum_{i=1}^{i=n} |c_i| = C < 1$$

ist, so ist der absolute Betrag des Arguments von $1 + c_1 + c_2 + \cdots c_n \leqq \varepsilon$, wobei

$$\sin \varepsilon = C \tag{12}$$

ist.

In der Tat, stellt man in der Ebene die Summe $1 + c_1 + c_2 + \cdots c_n$ in der üblichen Weise durch einen Punkt A dar, so sieht man, daß A nicht außerhalb des um den Punkt 1 mit dem Radius C beschriebenen Kreisbogens fallen kann; zieht man an diesen Kreis vom Nullpunkt aus die in der positiven Halbebene liegende Tangente, so bildet diese mit der Achse der reellen Zahlen einen Winkel ε, der (12) genügt und offenbar nie kleiner als die absolut genommene Amplitude von A sein kann. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Aus (3) schließen wir nun

$$\text{Arg } w_1 = \text{Arg } b_0 z_1^\mu + \text{Arg}\left\{1 + \frac{b_1}{b_0} z_1 + \frac{b_2}{b_0} z_1^2 + \cdots \frac{b_{n-\mu}}{b_0} \cdot z_1^{n-\mu}\right\}. \tag{13}$$

Nach dem Hilfssatz ist aber

$$\text{Arg}\left\{1 + \frac{b_1}{b_0} z_1 + \frac{b_2}{b_0} z_1^2 + \cdots \frac{b_{n-\mu}}{b_0} z_1^{n-\mu}\right\} = \varepsilon \cdot \vartheta, \tag{14}$$

Digitized by Google

wo ϑ eine positive oder negative Zahl vom absoluten Betrage nicht größer als 1 ist, und

$$\sin\varepsilon = \left|\frac{b_1}{b_0}z_1 + \frac{b_2}{b_0}z_1^2 + \cdots + \frac{b_{n-\mu}}{b_0}z_1^{n-\mu}\right| \tag{15}$$

ist. Wir zeigen sogleich noch, daß $\sin\varepsilon < 1$ ist. Aus (6) ergibt sich nämlich

$$\sin\varepsilon < m\,|z_1| \cdot \{1 + |z_1| + |z_1|^2 + \cdots |z_1|^{n-\mu-1}\} = m \cdot |z_1| \cdot \frac{1-|z_1|^{n-\mu}}{1-|z_1|}$$

und nach (8) $\sin\varepsilon < \delta\,(m+1)\cdot|z_1|\cdot\{1-|z_1|^{n-\mu}\}$ oder

$$\sin\varepsilon < (m+1)\cdot|z_1|, \tag{16}$$

womit gezeigt ist, daß in der Tat $\sin\varepsilon < 1$ ist. Aus (13) und (14) folgt jetzt

$$\operatorname{Arg} w_1 = \operatorname{Arg} b_0 + \mu \operatorname{Arg} z_1 + \varepsilon\vartheta. \tag{17}$$

Aus (16) ergibt sich, daß durch hinreichend kleine Wahl von $|z_1|$ die Größe ε und damit auch $\varepsilon\vartheta$ in (17) absolut kleiner gemacht werden kann als eine vorgeschriebene kleine Größe σ. Wir setzen voraus, daß $|z_1|$ demgemäß gewählt sei, und lassen nun in der Z-Ebene den Punkt z_1 um den Punkt z_0 den Kreis mit dem Radius $|z_1|$ durchlaufen, also sein Argument stetig von 0 bis 2π wachsen. Aus (17) und dem oben Gesagten folgt dann, daß der Bildpunkt w_1 jenes Ringgebiet in einer stetigen Kurve durchzieht, die sich μ-mal [$\mu \geqq 1$, vgl. (4)] um den Punkt w_0 herumwindet. Ist der Punkt z_1 an seine Ausgangsstelle gerückt, so muß auch w_1 wegen der eindeutigen Abbildung auf seinem ursprünglichen Platz wieder angelangt sein. Die Kurve in der W-Ebene ist also geschlossen. Jetzt lasse man $|z_1|$ stetig gegen Null konvergieren, dann zieht sich das Ringgebiet nach (10) und (11) immer weiter zum Punkt w_0 zusammen, die Kurve in jenem Ringgebiet wird dabei wegen der stetigen Abbildung allmählich über alle Punkte eines um den Punkt w_0 mit hinreichend kleinem Radius beschriebenen Kreises wegfegen: Es folgt der

Satz: Um jeden Punkt der W-Ebene, der Bildpunkt eines Punktes der Z-Ebene ist, läßt sich ein Kreis mit endlichem Radius beschreiben, so daß alle Punkte seiner Fläche Bilder von Punkten der Z-Ebene sind.

Wir nehmen nun irgend einen Punkt P_0 ($w = w_0$) der W-Ebene, von dem man weiß, daß er Bildpunkt eines Punktes der Z-Ebene ist, und ziehen durch P_0 einen Halbstrahl g. Wir beschreiben um P_0 den dem Satz entsprechenden Kreis — wir nennen ihn kurz den „Kreis von P_0" — der g in P_1 schneiden möge; um P_1 zeichnen wir den „Kreis von P_1", der die g in P_2 (jenseits von P_0P_1) schneidet usw. Es folgt dann, daß, wenn man so bis zu einem Punkt P_k vorgedrungen ist, alle Punkte von g zwischen P_0 und P_k Bilder von gewissen Punkten der Z-Ebene sind. Es wäre nun denkbar, daß bei der Fortsetzung dieser Konstruktion die Radien der Kreise immer kleiner würden, so daß erst nach unendlich vielen Schritten ein Punkt P_ω von g erreicht würde, über den hinaus also die Konstruktion nicht fortgesetzt werden könnte. Dann müßte aber der Punkt P_ω Häufungspunkt der Menge $P_0P_1P_2\cdots$ sein und zwar der einzige, da sonst der Prozeß schon vor P_ω sein Ende gefunden hätte. Die Punkte $P_0P_1P_2\cdots$ mögen die Bilder der Punktmenge $Q_0Q_1Q_2\cdots$ der Z-Ebene sein, letztere Menge ist unendlich, da höchstens n verschiedenen Punkten

Digitized by Google

der Menge Q ein und derselbe Punkt der Menge P entspricht (eine Gleichung $n$ten Grades hat höchstens n Wurzeln!). Die Menge Q hat also mindestens *einen* Häufungspunkt Q_ω. Es läßt sich nun leicht zeigen, daß das Bild von Q_ω notwendig P_ω ist. Denn würde dem Punkt Q_ω der Z-Ebene P_ω in der W-Ebene nicht entsprechen, so möge P' das Bild von Q_ω sein, wobei P' mit einem Punkte P_i zusammen fallen kann oder nicht. Jetzt läßt sich um P' ein Kreis k mit hinreichend kleinem Radius beschreiben, daß alle Punkte der Menge P (außer P' selbst) außerhalb k liegen. Wegen der stetigen Abbildung gibt es dann um Q_ω einen Kreis l, so daß alle Punkte innerhalb l ihre Bilder innerhalb k haben. Da nun Q_ω Häufungspunkt der Menge Q ist, so liegen innerhalb l außer Q_ω unendlich viele Punkte Q_i, von ihnen fallen die Bilder von höchstens $n-1$ mit P' (falls P' ein Punkt der Menge P ist) zusammen, die anderen müßten zu Bildern andere Punkte der Menge P als P' haben, ihre Bilder müßten also außerhalb k fallen, was ein Widerspruch ist, also ist P_ω das Bild von Q_ω.[1]) Nach dem obigen Satz gibt es aber nun um P_ω einen Kreis mit endlichem Radius, so daß alle Punkte desselben Bilder von Punkten der Z-Ebene sind. Die Zahl der Punkte der Menge P außerhalb dieses Kreises ist eine endliche, die zugehörigen Kreise zusammen mit dem um P_ω sind daher auch in endlicher Zahl. Man kommt also mit einer endlichen Zahl von Schritten über den Punkt P_ω hinaus. Damit ist zugleich gezeigt, daß alle Punkte von g Bilder von gewissen Punkten der Z-Ebene sind. Endlich lasse man g um P_0 in der W-Ebene rotieren, so folgt der Satz:

Alle Punkte der W-Ebene sind ausnahmslos Bilder von Punkten der Z-Ebene oder die Funktion $w(z)$ nimmt jeden Wert also auch den Wert Null mindestens einmal an, w. z. b. w.

In der üblichen Weise folgt daraus, daß jede Gleichung $n$ten Grades n Wurzeln hat.

Heilbronn a. N., den 31. März 1907. K. Kommerell.

Abwicklung eines Rotationsellipsoids auf die Rotationsfläche einer Sinuslinie.

Jede Rotationsfläche ist nach einem bekannten Satz einer stetigen Verbiegung fähig, bei der sie stets Rotationsfläche bleibt, und bei der die Meridiane und Parallelkreise in ihrer Eigenschaft als solche erhalten bleiben. Alle auf einer vorgelegten Rotationsfläche

$$x = f(v)\cos u, \quad y = f(v)\sin u, \quad z = \varphi(v)$$

1) Dies entspricht der bekannten Tatsache, daß das endlichdeutige stetige Bild einer abgeschlossenen Menge wieder eine abgeschlossene Menge ist. Überhaupt läßt sich der Beweisgang mengentheoretisch kurz so skizzieren: Die Punktmenge P ist in sich dicht, weil in der Nachbarschaft jedes ihrer Punkte Bildpunkte liegen. Die Menge P ist abgeschlossen, weil sie jeden ihrer Grenzpunkte enthält, sie ist also perfekt. Da weiter die Menge im Sinne Cantors in sich zusammenhängend ist, so ist die Menge das zweidimensionale Kontinuum. Die Menge erfüllt also entweder die ganze W-Ebene oder gewisse Teile derselben. In letzterem Falle hätte die Menge, funktionentheoretisch gesprochen, eine natürliche Grenze. Da aber rings um einen Punkt dieser Grenze Punkte der Menge liegen, so sieht man, daß eben eine solche Grenze nicht existieren kann. Die Punktmenge besteht daher aus allen Punkten der W-Ebene.

Digitized by Google

abwickelbaren Rotationsflächen sind durch folgende Gleichungen gegeben:

$$x = cf(v)\cos\frac{u}{c}, \quad y = cf(v)\sin\frac{u}{c}, \quad z = \int_0^v \sqrt{\varphi'^2(v) + (1-c^2)\,f'^2(v)}\,dv.$$

Dabei ist c eine willkürliche Konstante. Das gemeinsame Linienelement aller dieser Flächen ist

$$ds^2 = f^2(v)\,du^2 + (f'^2(v) + \varphi'^2(v))\,dv^2.$$

Wendet man diese Formeln auf das Rotationsellipsoid

(1) $$x = a\cos v\cos u, \quad y = a\cos v\sin u, \quad z = b\sin v$$

an, so sind alle auf ihm abwickelbaren Rotationsflächen gegeben durch

(2) $$x = ca\cos v\cos\frac{u}{c}, \quad y = ca\cos v\sin\frac{u}{c},$$

$$z = \int_0^v \sqrt{b^2\cos^2 v + (1-c^2)\,a^2\sin^2 v}\,dv.$$

Es ist bemerkenswert, daß sich das bei z auftretende elliptische Integral zweiter Gattung für einen Wert der Konstanten c reduzieren läßt. Setzt man nämlich $(1-c^2)\,a^2 = b^2$, $c^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}$, so wird $z = bv$. Nur wenn das Ellipsoid abgeplattet ist, wird c reell und zwar gleich der numerischen Exzentrizität ε der Meridianellipse. Die dem Wert $c = \varepsilon$ entsprechende Fläche ist die *Rotationsfläche einer Sinuswelle* um ihre Achse; ihre Gleichungen sind

(3) $$x = \varepsilon a\cos v\cos\frac{u}{\varepsilon}, \quad y = \varepsilon a\cos v\sin\frac{u}{\varepsilon}, \quad z = bv.$$

Die Gleichung der Meridiankurve ist $r = \varepsilon a\cos v$, $z = bv$ oder in expliziter Form

$$r = \varepsilon a\cos\frac{z}{b}.$$

Die Spitzen dieser spindelförmigen Rotationsfläche gehen aus den Polen des Ellipsoids hervor, wie sich durch Einsetzen von $v = \pm\frac{\pi}{2}$ in die Gleichungen beider Flächen ergibt.

Wenn sich das Rotationsellipsoid einer Kugel nähert, konvergiert ε gegen 0, b gegen a. Demgemäß nimmt die Amplitude der Sinuswelle gegen 0 ab, während sich ihre Phase der Länge eines Meridians nähert. Das entspricht dem bekannten Satz, daß sich die spindelförmigen Rotationsflächen konstanter Krümmung der Rotationsfläche einer Sinuswelle um so mehr nähern, je mehr die Dicke der Spindel im Verhältnis zu ihrer Länge abnimmt.

Es sei noch auf eine geometrische Erzeugung der allgemeinen spindelförmigen Rotationsflächen (2) hingewiesen[1]), welche, wie sich durch Normierung des elliptischen Integrals sofort ergibt, den Werten $c^2 < 1$ entsprechen. Schneidet

1) Verallgemeinerung eines Satzes von Scheffers; Archiv (3) **6**, pag. 249.

Digitized by Google

man einen elliptischen Zylinder $\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} = 1$ durch zwei Ebenen, von denen die eine auf der Richtung der Erzeugenden senkrecht steht, während die zweite mit der ersten den Winkel λ einschließt und durch die Achse α ihrer Schnittellipse geht, so geht die Schnittellipse der zweiten Ebene bei der Abwicklung des Zylinders in die Meridiankurve einer Rotationsfläche (2) über. Bezeichnet man nämlich mit $\xi = \alpha \sin v$, $\eta = \beta \cos v$ die Koordinaten und mit $ds = \sqrt{\alpha^2 \cos^2 v + \beta^2 \sin^2 v}\, dv$ das Bogenelement der ersten Schnittellipse auf dem Zylinder, so sind

$$\xi = \beta \cos v \operatorname{tg} \lambda, \quad s = \int_0^v \sqrt{\alpha^2 \cos^2 v + \beta^2 \sin^2 v}\, dv$$

die Koordinaten der zweiten Schnittkurve in der Abwicklung. Das sind in der Tat die Gleichungen der Meridiankurven der Flächen (2), wenn man

$$\alpha^2 = b^2, \quad \beta^2 = (1 - c^2)\, a^2, \quad \beta \operatorname{tg} \lambda = ca$$

setzt, und diese letzteren Gleichungen sind reell auflösbar, solange $1 - c^2 > 0$ ist, d. h. bei allen Flächen (2) vom spindelförmigen Typus.

Kaiserslautern. M. Lagally.

Eine elementare Herleitung für das Keplersche Gesetz von der Gestalt der Bahn.

Das Keplersche Gesetz von der Gleichheit der Flächen, sowie die Gleichung der lebendigen Kraft gestatten elementare Beweise, die hinlänglich bekannt sind. Die Kombination dieser beiden Gesetze liefert für die Bahn des Planeten die Gleichung

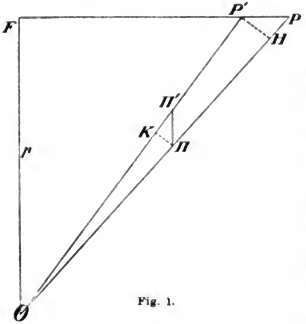


Fig. 1.

$$\frac{1}{p^2} = \frac{2a}{r} + b, \tag{1}$$

in der r den Radiusvektor, p das Lot von der Sonne auf die Bahntangente, a und b je eine Konstante bedeutet. Will man die Gestalt der Bahn kennen lernen, so erscheint es zweckmäßig, (1) als Ausgangspunkt zu wählen.

Sei demnach eine Kurve C vorgelegt, die (1) befriedigt. P sei ein beliebiger Punkt von C, PF eine Tangente an C, OP sei der Radiusvektor r und OF das Lot p. Zu C konstruiere man die Inverse Γ, deren Radiusvektor ϱ den Wert $\frac{1}{r}$ besitzt. Man denke sich eine in O befestigte starre Gerade G und lasse sie mit der Winkelgeschwindigkeit 1 um O rotieren. Ihre Durchschnittspunkte mit C bez. Γ mögen sich zur Zeit t in P bez. Π, zur Zeit $t + e$ in P' bez. Π' befinden. Man wähle e so klein, daß die Kurvenstücke PP' und

Digitized by Google

$\Pi\Pi'$ als geradlinig angesehen werden können. Jene Schnittpunkte beschreiben infolge der Rotation von G gewisse Bewegungen auf G, deren Geschwindigkeiten mit v bez. φ bezeichnet werden mögen. Man zeichne die Kreisbogen HP' und $K\Pi$ mit den Radien OP' bez. $O\Pi$ und hat dann drei ähnliche Dreiecke: OFP, PHP', $K\Pi\Pi'$. Aus ihnen ergibt sich

$$\frac{\sqrt{r^2 - p^2}}{p} = \frac{K\Pi'}{K\Pi}.$$

Da nun $K\Pi$ und $K\Pi'$ bez. die Werte ϱe und φe haben, so folgt aus dieser Gleichung

$$\frac{1}{p^2} = \varphi^2 + \varrho^2,$$

d. h. wegen (1)

$$\varphi^2 + \varrho^2 = 2a\varrho + b$$

oder

$$\varphi^2 + (\varrho - a)^2 = k^2,$$

wo k^2 eine Konstante ist. Denkt man sich auf G im Abstande $\sigma = \varrho - a$ von O einen Punkt S, so vollführt auch dieser bei der Drehung von G auf G eine Bewegung mit der Geschwindigkeit φ, und es gilt für diese Bewegung die Gleichung

(2) $\qquad \sigma^2 + \varphi^2 = k^2.$

Sie zeigt, *daß die von S auf G ausgeführte Bewegung eine harmonische mit der Phase $t + const.$ ist.*

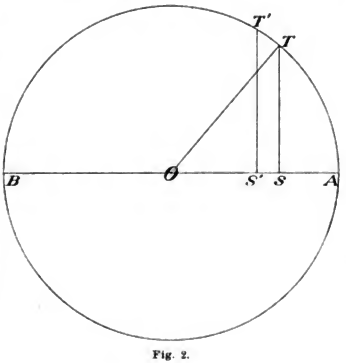


Fig. 2.

In der Tat. Über einer Strecke $AB = 2OA = 2k$ als Durchmesser beschreibe man einen Kreis K, wähle auf AB den Punke S so, daß er zur Zeit t von O um σ absteht, und lasse ihn auf AB die durch (2) gekennzeichnete Bewegung ausführen. Gleichzeitig verfolge man die Bewegung des Radius OT, dessen Projektion OS ist. Zur Zeit $t + e$ mögen sich S und T in S' bez. T' befinden. Da nun der Winkel, den SS' mit TT' bildet, gleich dem Winkel OTS ist, so folgt

$$SS' : TT' = ST : k = \sqrt{k^2 - \sigma^2} : k$$

oder wegen (2)

$$\frac{e\varphi}{TT'} = \frac{\varphi}{k},$$

d. h.

$$TT' = ke.$$

Digitized by Google

Mithin bewegt sich T auf K mit der konstanten Geschwindigkeit k, und der Radius OT dreht sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit 1. Bildet OT zur Zeit 0 mit OA den Winkel α, so bildet es demnach zur Zeit t mit OA den Winkel $\alpha + t$, und man hat folglich

$$\sigma = k \cos(\alpha + t),$$

womit die obige Behauptung bewiesen ist.

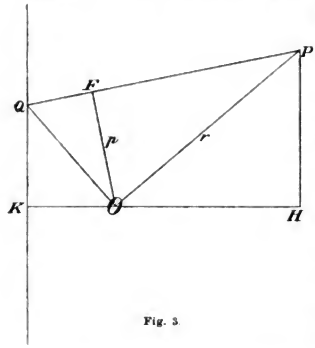


Fig. 3.

Aus der letzten Gleichung folgt nun

$$\varrho = a + k \cos(\alpha + t),$$

$$r = \frac{1}{a + k \cos(\alpha + t)},$$

d. h. C ist ein Kegelschnitt.

Zusatz. — Will man nur zeigen, daß stets ein Kegelschnitt existiert, der (1) befriegt, so führt folgende Betrachtung kürzer zum Ziele.

Sei KQ die Direktrix, O der Brennpunkt, P ein Punkt, PQ eine Tangente eines gewissen Kegelschnitts, dessen numerische Exzentrizität ε und Parameter $2m$ noch näher zu bestimmen sind.

Sei ferner

$$OK = n = \frac{m}{\varepsilon}, \quad OP = r, \quad OF = p,$$

$$OF \perp QP, \qquad OH \perp PH.$$

Aus dem rechtwinkligen Dreiecke POQ ergibt sich ohne weiteres

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{OQ^2}.$$

Die Ähnlichkeit der $\triangle\triangle$ OKQ und OHP gestattet, OQ durch $OK = n$, $OP = r$ und $OH = \frac{r}{\varepsilon} - n$ auszudrücken. Es ergibt sich

$$\frac{1}{OQ^2} = \frac{\varepsilon^2 - 1}{m^2} + \frac{2}{mr} - \frac{1}{r^2}$$

und folglich

$$\frac{1}{p^2} = \frac{2}{mr} + \frac{\varepsilon^2 - 1}{m^2}.$$

Bestimmt man ε und m aus

$$\frac{2}{m} = 2a, \qquad \frac{\varepsilon^2 - 1}{m^2} = b,$$

so ist der (1) befriedigende Kegelschnitt gefunden.

Biedenkopf. H. Dörrie.

Digitized by Google

Über die Zahlen der Form $a^{p-1} - 1$, wenn p eine Primzahl.

1. *Ist p eine Primzahl und a eine ganze Zahl kleiner als p, so ist* $a^{p-1} - 1$ *durch* p^3 *ohne Rest teilbar für* $p = 113$, $a = 68$. — Infolge einer Anfrage: „Kann $a^{p-1} - 1$, wenn p eine Primzahl und a eine ganze Zahl kleiner als p ist, durch p^2 ohne Rest teilbar sein?“ hat Jacobi die Primzahlen bis $p = 37$ hierauf untersuchen lassen. Es sind 6 solcher Werte gefunden. Später hat noch Desmarest die interessante Lösung gefunden $p = 487$, $a = 10$.

Die Jacobische Untersuchung ist von mir fortgesetzt, um zu erforschen, ob es auch Werte von $a^{p-1} - 1$, $a < p$ gibt, welche durch p^3 ohne Rest teilbar sind.

Es wurden alle Primzahlen bis 307, außerdem 331, 353, 487, 673 untersucht; ferner sämtliche Primzahlen zwischen 307 und 751, aber nur für a und $p - a$, wenn $a < \sqrt{p}$ ist.

In diesen Grenzen sind nur die oben angegebenen Werte gefunden. Es ist nämlich

$$a^{p-1} - 1 \equiv 8p^3 \pmod{p^4} \text{ für } p = 113,\ a = 68.$$

Wird in der erwähnten Frage die beschränkende Bedingung gestellt, daß $a < \sqrt{p}$ ist — alsdann entspricht auch a^2 der Frage —, so sind in den angegebenen Grenzen folgende 5 Werte gefunden worden

$p = 11$; $a = 3, 9$

$p = 331$; $a = 18, 324$ und 71

$p = 353$; $a = 14, 196$

$p = 487$; $a = 10, 100$, aber auch 175 und 307

$p = 673$; $a = 22, 484$.

2. Bickmore hat in den Nouvelles annales (3) **15**, 222—227 (1896) in der Abhandlung: „Sur les fractions décimales périodiques“ die reduzierten Werte von $10^{p-1} - 1$ angegeben für $p = 1$ bis 100. In der Tabelle sind drei Druckfehler vorgekommen; für $p = 29$, 33 und 64 müssen die Faktoren sein bez.

43037, 1 344628 210313 298373

und

5040 068544 932211 078070 661761.

Ferner ist der große Faktor für $p = 99$ nicht durch 1001001 (der reduzierte Wert von $10^9 - 1$) dividiert. Ich selbst habe für $p = 35$ und $p = 84$ bez. noch die Primfaktoren gefunden

123551 und 226549.

Die Zerlegung für $p = 17$ in 2 Primfaktoren

2 071723 und 5363 222357

ist erst später gefunden worden.

Literatur: 1) Jacobis gesammelte Werke Bd. 6, S. 238—239 und Crelles Journal (3), 301—302. 2) Desmarest, Théorie des nombres, Paris 1852. 3) Ergänzung zum Fermatschen und Wilsonschen Satze. Von W. Fr. Meyer-Königsberg im Archiv der Mathematik (3) 2, 141—146, 1902.

Halensee. H. Hertzer.

Digitized by Google

Über eine für die Dreiecksgeometrie wichtige Gleichung sechsten Grades.

Das Problem der Winkelhalbierenden, welches von F. Bützberger in Angriff genommen und von W. Heymann und A. Korselt bezüglich der Lösbarkeit geprüft wurde, ist von mir[1]) in dem Sinne erledigt worden, daß die Gleichung zehnten Grades, durch welche die Seiten eines Dreieckes aus den Winkelsymmetralen desselben bestimmt sind, aufgestellt und die mit dem Problem zusammenhängenden Kurven 4. Ordnung, welche eine Übersicht über die möglichen Lösungen desselben gewähren, untersucht wurden. Dabei ergab sich, daß die Geometrie der Punktsysteme auf den erwähnten Kurven vollständig von einer Gleichung sechsten Grades beherrscht ist.

Der Zweck der vorliegenden Studie ist nun, dieselbe aufzulösen und damit eine endgültige Erledigung des Problemes der Winkelhalbierenden herbeizuführen.

Seien x_i, w_i $(i = 1, 2, 3)$ die Seiten, bez. die Winkelsymmetralen eines schiefwinkligen Dreieckes; dann bestehen bekanntlich folgende Relationen:

$$(1) \qquad x_i w_i^2 (k - x_i)^2 = k \cdot x_1 x_2 x_3 (k - 2x_i), \quad (i = 1, 2, 3)$$

wenn $k = x_1 + x_2 + x_3$ gesetzt wird. Durch Einführung der durch: $x_i = k \cdot u_i$ $(i = 1, 2, 3)$ definierten Größen u_i und durch darauf folgende Division der ersten zwei Gleichungen von (1) ergibt sich, $\left(\frac{w_1}{w_2}\right)^2 = p$ gesetzt, die nachstehende Gleichung:

$$p \cdot u_1 \cdot (1 - 2u_2)(1 - u_1)^2 = u_2 (1 - 2u_1)(1 - u_2)^2,$$

welche, wenn u_1 und u_2 als rechtwinklige Koordinaten gedeutet werden, eine Kurve 4. Ordnung darstellt, deren Plückersche Charaktere (nach der Bezeichnung von Salmon) sind:

$$\mu = 4, \quad \delta = 1, \quad \varkappa = 0; \quad \nu = 10, \quad \tau = 16, \quad \iota = 18; \quad D = 2.$$

Von dem Doppelpunkt (1, 1) aus können an die Kurve sechs Tangenten gezogen werden, deren Richtungskoeffizienten durch die folgende Gleichung sechsten Grades bestimmt sind:

$$(2) \quad p^2 x^6 - 4p^2 x^5 + (4p^2 - 4p) x^4 + 6px^3 + (4 - 4p) x^2 - 4x + 1 = 0.$$

Diese Gleichung ist es nun, welcher die früher angegebene Bedeutung zukommt, und deren Wurzeln wir aufzusuchen haben.

Wir schreiben zunächst (2) in der Form:

$$(3) \qquad (px^3 - 2px^2 - 2x + 1)^2 - 4px^3 = 0$$

und führen dann für den Klammerausdruck die Größe y ein, so daß wir erhalten:

$$(4) \qquad y^2 = 4px^3.$$

Eliminieren wir nun p aus (3) und $y = px^3 - 2px^2 - 2x + 1$, so liefert die so erhaltene Gleichung

$$(5) \qquad 2(y + 2x)^2 = x(y + 2)^2$$

in Verbindung mit (4) die Wurzeln x.

1) Siehe Programm der Realschule Eger, Jahrg. 1902, 1903 und 1904.

Digitized by Google

Wir können nämlich auf Grund der Transformationsformeln

$$\xi = x, \qquad x = \xi,$$
$$\eta = \frac{y+2x}{y+2}, \qquad y = \frac{2(\xi-\eta)}{\eta-1}$$

für (4) und (5) schreiben

$$2\eta^2 = \xi, \tag{6}$$

$$\eta^3 - \eta^2 - 2a\eta + a = 0, \tag{7}$$

wenn $a = \frac{1}{\pm\sqrt{8p}}$ gesetzt wird.

Wird aus (6) und (7) η eliminiert [und die Eliminationsgleichung rational gemacht], so erkennt man, daß Gleichung (2) durch die beiden folgenden ersetzt werden kann:

$$\begin{cases} px^3 - (\sqrt{8p} + 2p)\,x^2 + (2 + \sqrt{8p})\,x - 1 = 0, \\ px^3 - (\sqrt{8p} + 2p)\,x^2 + (2 - \sqrt{8p})\,x - 1 = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Ihre Diskriminanten sind

$$\begin{cases} D_1 = -\frac{p}{3}\,(8\sqrt{2p} + 13p + 8p\sqrt{2p}), \\ D_2 = +\frac{p}{3}\,(8\sqrt{2p} - 13p + 8p\sqrt{2p}); \end{cases} \tag{9}$$

sie belehren uns, daß die erste von den kubischen Gleichungen (8) irreduzibel, die zweite reduzibel ist.

Es macht nunmehr auch keine Schwierigkeit, die Diskriminante der Gleichung (2) zu berechnen. Nach einem bekannten Satze erhalten wir hierfür, wenn die Resultante der Gleichungen (8) mit R bezeichnet wird:

$$D = R^2 \cdot D_1 D_2$$

oder

$$D = -\,2^{15} p^8 (p-1)^2 (128p^2 + 87p + 128),$$

welcher Ausdruck in der früher zitierten Abhandlung auf einem ganz anderen Wege gefunden wurde.

Es mag noch einer interessanten Eigenschaft der Gleichung (2) Erwähnung getan werden.

Es ist nämlich, wie der Bau dieser Gleichung zeigt, wenn $x_i = \varphi(p)$ eine ihrer Wurzeln ist, auch $\frac{1}{\varphi\left(\frac{1}{p}\right)}$ eine Wurzel von (2) und zwar entweder wieder x_i oder $x_k = \psi(p)$, so daß in diesem Falle auch umgekehrt die Relation $x_i = \frac{1}{\psi\left(\frac{1}{p}\right)}$ zu gelten hat.

Näheren Aufschluß über die angedeutete Beziehung der Wurzeln geben uns die Gleichungen (8). Bezeichnen wir die kubische Variante von einer derselben mit A, die kubische Retrovariante mit B, so daß also

$$27 \cdot A = \pm\, 2p\sqrt{8p} - 15p^2 \mp 6p^2\sqrt{8p} - 16p^3,$$
$$27 \cdot B = 16 \pm 6\sqrt{8p} + 15p \mp 2p\sqrt{8p}$$

Digitized by Google

ist, so lassen sich die Wurzeln wie folgt darstellen

$$x_1 = \frac{\pm\sqrt{8p}+2p}{3p} + \frac{1}{p}\sqrt[3]{-\frac{A}{2}-\frac{p}{2}\sqrt{\frac{D_{1,2}}{27}}} + \frac{1}{p}\sqrt[3]{-\frac{A}{2}+\frac{p}{2}\sqrt{\frac{D_{1,2}}{27}}}$$

$$= \frac{\pm\sqrt{8p}+2p}{3p} + \frac{1}{p}(U_1+U_2),$$

$$x_2 = \frac{\pm\sqrt{8p}+2p}{3p} + \frac{1}{p}(JU_1+J^2U_2), \quad x_3 = \frac{\pm\sqrt{8p}+2p}{3p} + \frac{1}{p}(J^2U_1+JU_2),$$

wo $D_{1,2}$ durch (9) bestimmt und $J = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ ist. Auf gleiche Weise erhalten wir

$$\frac{1}{x_1} = \frac{2\pm\sqrt{8p}}{3} - \sqrt[3]{-\frac{B}{1}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{D_{1,2}}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{B}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{D_{1,2}}{27}}}$$

$$= \frac{2\pm\sqrt{8p}}{3} - (V_1+V_2),$$

$$\frac{1}{x_2} = \frac{2\pm\sqrt{8p}}{3} - (JV_1+J^2V_2), \quad \frac{1}{x_3} = \frac{2\pm\sqrt{8p}}{3} - (J^2V_1+JV_2).$$

Setzen wir nun $1/p$ für p in A, B und $D_{1,2}$ ein (was durch einen Strich oben an den betreffenden Buchstaben angedeutet werden mag), so ist

$$A' = -\frac{B}{p^3}, \qquad B' = -\frac{A}{p^3}, \qquad D'_{1,2} = \frac{D_{1,2}}{p^6},$$

und daher geht $\frac{1}{x_1}$ durch die angegebene Substitution in x_1, $\frac{1}{x_2}$ in x_3 und $\frac{1}{x_3}$ in x_2 über. Das soeben gefundene Resultat setzt uns in den Stand, die Wurzeln der Gleichung (2) für Werte von $\frac{1}{p}$ sofort anschreiben zu können, wenn sie für Werte von p bekannt sind; eine weitere Vereinfachung in der Bestimmung der Wurzeln scheint es jedoch nicht zu gewähren.

Eger. Josef Schmidt sen.

Der Schwerpunkt des Parabelbogens.

Jeder Parabelbogen $2b$, dessen Sehne $2s$ auf der Achse senkrecht steht, hat, wenn p der Krümmungshalbmesser im Scheitel und r derjenige der Endpunkte ist, in der Entfernung $a = \frac{1}{8}\left(\frac{rs}{b}-p\right)$ vom Scheitel seinen Schwerpunkt.

Holzminden. G. Kober.

Diese elegante Formel folgt aus dem bekannten Ausdruck für den Schwerpunkt des Parabelbogens, wenn man an Stelle der Koordinaten des Endpunktes den Krümmungsradius und die Bogenlänge einführt.

Berlin. E. Lampe.

Digitized by Google

4. Bei der Redaktion eingegangene Bücher.

Annuaire pour l'an 1908, publié par le bureau des longitudes. Paris 1908, Gauthier-Villars. VI + 950. Fr. 1.50.

Baker, H. F., An introduction to the theory of multiply periodic functions. Cambridge 1907, University Press.

Ball, W. Rouse, Récréations mathématiques et problèmes des temps anciens et modernes. 2me édit. franç. Première partie: Arithmétique, algèbre et théorie des nombres. Paris 1907, A. Hermann. 355 S. Fr. 5.—.

Ball, Rouse, Histoire des Mathématiques. Traduite sur la troisième édition anglaise par L. Freund. Tome 2e. Avec des additions de R. de Montessus: Les Mathématiques modernes depuis Newton jusqu'à nos jours. — Note complémentaire de M. G. Darboux. Paris 1907, A. Hermann. 271 S. Fr. 8.—.

Barkow, E., Versuche über Entstehung von Nebel bei Wasserdampf und einigen anderen Dämpfen. Inaug. Diss. Marburg 1907.

Björnbo, A. A., Joannis Verneri de triangulis sphaericis libri quatuor. Leipzig 1907, B. G. Teubner. 184 S. ℳ 8.—.

Blochmann, R., Grundlagen der Elektrotechnik. Nr. 168 „Aus Natur und Geisteswelt". Leipzig 1907, B. G. Teubner. 106 S. ℳ 1.25.

Bojko, J. und Wendling, E., Neues System zum technischen Kopfrechnen. 1. Heft: Die Quadratbildung der Zahlen 1 bis 1250. Systematisch bearbeiteter Lehrgang mit zahlreichen Beispielen und Übungen. Zürich 1907, E. Speidel. ℳ —.80.

Brioschi, F., Opere matematiche. Tomo terzo. Milano 1904.

Bronzin, V., Theorie der Prämiengeschäfte. Leipzig 1908, F. Deuticke. ℳ 2.50.

Bruno, Karl, Integral- und Differentialrechnung. Wien 1908, A. Hölder. ℳ 1.25.

Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics. Nr. 1: J. G. Leathem, Volume and surface integrals used in physics. 1905. 2 s. 6 d. — Nr. 2: G. H. Hardy, The integration of functions of a single variable. 1905. 2 s. 6 d. — Nr. 3: J. I'A. Bromwich, Quadratic forms and their classification by means of invariant factors. 1906. 3 s. 6 d. — Nr. 4: A. N. Whitehead, The axioms of projective geometry. 1906. 2 s. 6 d. — Nr. 5: A. N. Whitehead, The axioms of descriptive geometry. 1907. 2 s. 6 d. Cambridge University Press Warehouse. C. F. Clay.

Dantscher, V. v., Vorlesungen über die Weierstraßsche Theorie der irrationalen Zahlen. Leipzig 1908, B. G. Teubner. 79 S. ℳ 2.80.

Davison, Ch. and Richards, C. H., Plane geometry for secondary schools. Cambridge 1907, University Press. VIII + 411. 4 sh.

Durège, H., Theorie der elliptischen Funktionen. 5. Aufl. neu bearb. von L. Maurer. Leipzig 1908, B. G. Teubner. VIII + 436 S. ℳ 11.—.

Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées. Tome I, volume 2, fasc. 1: Algèbre. Paris 1907, Gauthier-Villars; Leipzig, B. G. Teubner. 232 S. ℳ 6.80.

Gray, George J., A bibliography of the works of Sir Isaac Newton. 2nd ed. Cambridge 1907, Bowes and Bowes. 80 S.

Gérard, E., Mesures électriques. Etalons et instruments. Essais mécaniques, photométriques, magnétiques et électriques. Applications aux lignes, générateurs, moteurs et transformateurs. 3me édit. Paris 1908, Gauthier-Villars. 708 S.

Hobson, E. W., The Theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series. Cambridge 1907, University Press. XV + 772 S. 21 sh.

Hočevar, F., Lehr- und Übungsbuch der Geometrie für Untergymnasien. 8. Aufl. Wien 1907, F. Tempsky. 122 S.

Kleiber-Scheffler, Elementarphysik mit Chemie für die Unterstufe der Gymnasien. 3. Aufl. München 1907, R. Oldenbourg. 32 S. ℳ 2.—.

Kammerer, Werkzeug und Arbeitsteilung. Rede zum Geburtstage S. M. des Kaisers und Königs Wilhelm II. Kgl. Techn. Hochsch. Berlin. 1908.

Digitized by Google

Kischke, R., Über Fehlerabschätzung bei unendlichen Produkten und deren Anwendungen. Inaug. Diss. Königsberg 1908.

Knoche, H., Theoretisch-praktische Anleitung zur Erteilung des Rechen- und Raumlehrunterrichts. Arnsberg 1908, J. Stahl. *M.* 2.50.

Kowalewski, G., Einführung in die Infinitesimalrechnung mit einer historischen Übersicht. Nr. 197 „Aus Natur und Geisteswelt". Leipzig 1908, B. G. Teubner.

Lipps, G. F., Mythenbildung und Erkenntnis. Band III aus „Wissenschaft und Hypothese". Leipzig 1907, B. G. Teubner. 312 S. *M.* 5.—.

Marx, E., Grenzen in der Natur und in der Wahrnehmung. Leipzig 1908. B. G. Teubner. 31 S. *M.* 1.—.

Mercer, J. W., Trigonometry for beginners. Cambridge 1907, University Press. XI + 351 S. 4 sh.

Močnik-Neumann, Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für die oberen Klassen der Gymnasien. 30. Aufl. Wien 1907, F. Tempsky. 310 S.

Möller, M., Exakte Beweise für die Erdrotation. Wien 1908, A. Hölder. *M.* 1 —.

Morgenstern, A., Beiträge zur numerischen Lösung der Gleichungen fünften Grades. Inaug. Diss. Halle. 1907.

Müller, S., Technische Hochschulen in Nordamerika. Nr. 190 „Aus Natur und Geisteswelt". 103 S. *M.* 1.25.

Pascal, E., Funzioni ellittiche. Milano 1896, U. Hoepli. V + 227 S. L. 1.50.

Pellat, H., Cours d'électricité. Tome III: Electrolyse. — Electrocapillarité. — Ions et électrons. Paris 1908, Gauthier-Villars. 290 S.

Poincaré, L., Die moderne Physik. Übertragen von M. Brahn und B. Brahn. Leipzig 1908, Quelle u. Meyer. 260 S. *M.* 4,40.

Reidt, F., Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der Trigonometrie und Stereometrie. I. Teil: Trigonometrie. 5. Aufl. Bearb. von H. Thieme. Leipzig 1907, B. G. Teubner. 255 S. *M.* 4.80.

Reidt, F., Auflösungen der Aufgaben in der Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der Trigonometrie und Stereometrie. I. Teil: Trigonometrie. 5. Aufl. Bearb. von H. Thieme. Leipzig 1907, B. G. Teubner. *M.* 1.80.

Rudio, F., Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippokrates. A. u. d. T.: Urkunden für Geschichte der Mathematik im Altertume, Heft 1. Leipzig 1907, B. G. Teubner. *M.* 4.80.

Schlett, W., Über die Änderung der Dichte und spezifischen Wärme bei Platin und Nickel durch Bearbeitung und über Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärme derselben. Inaug. Diss. Marburg 1907.

Schoenflies, A., Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. II. Teil. Leipzig 1907, B. G. Teubner. 331 S. *M.* 12.—.

Stuyvaert, M., Cinq études de géométrie analytique. Applications diverses de la théorie des matrices et de l'élimination. Gent 1908, E. van Goethem. Fr. 6.—.

Tidy, Ch. M., Das Feuerzeug. Bearb. von P. Pfannenschmidt. Leipzig 1907, B. G. Teubner. 92 S. *M.* 2.—.

Universität Göttingen, Ratschläge und Erläuterungen für die Studierenden der Mathematik und Physik. Leipzig 1907, B. G. Teubner. 31 S. *M.* 1.—.

Universität und Schule. Vorträge von F. Klein, P. Wendland, Al. Brandl und Ad. Harnack. Leipzig 1907, B. G. Teubner. 88 S. *M.* 1.50.

Valentiner, S., Vektoranalysis. Nr. 354 der Sammlung Göschen. Leipzig 1907, Göschen. 163 S. *M.* —.80.

Weber-Wellstein, Enzyklopädie der Elementarmathematik. II: Elementare Geometrie. 2. Aufl. Leipzig 1907, B. G. Teubner. 596 S. *M.* 12.—.

Wegner-Dallwitz, Die Explosionsgasturbine als Reaktionsturbine (als einstufiger Schnelläufer) in Theorie u. Konstruktion. Rostock 1908, E. Volckmann. *M.* 1.50.

Weisse, E., Anwendung der elliptischen Funktionen auf ein Problem aus der Theorie der Gelenkmechanismen. Inaug. Diss. Dresden. 1907.

Digitized by Google

wissenschaftliche Grundlage des ersten Rechenunterrichts. Von E. Kullrich. S. 58. — Zwetsch, Ed., Ebene und räumliche Geometrie. Von E. Kullrich. S. 58. — Fuchs, L., Gesammelte mathematische Werke. Von G. Wallenberg. S. 59 — Christiansen, C. und Müller, Joh. J. C., Elemente der theoretischen Physik. Von E. Pringsheim. S. 61. — Jaeger, G., Die Fortschritte der kinetischen Gastheorie. Von E. Pringsheim. S. 61. — Reye, Th., Die Geometrie der Lage. Von H. E. Timerding. S. 62. — Rhebeseil, P., Über den Kurzschluß der Spule und die Vorgänge bei der Kommutation des Stromes eines Gleichstromankers. Von G. Wallenberg. S. 65 — Block, C., Lehr- und Übungsbuch für den planimetrischen Unterricht an höheren Schulen. Von E. Kullrich. S. 68. — Thieme, H., Leitfaden der Mathematik für Realanstalten. Von E. Kullrich. S. 68. — Lackemann-Kreuschmer, Die Elemente der Geometrie. Von E. Kullrich. S. 68. — Knoblauch, A., Bürgerliche Rechnungsarten. Von E. Kullrich. S. 69. — Močnik's logarithmisch-trigonometrische Tafeln. Von E. Kullrich. S. 69 — Rößler, G., Die Fernleitung von Wechselströmen. Von Josef Herzog. S. 70 — Bernhard, M., Darstellende Geometrie mit Einschluß der Schattenkonstruktionen und der Perspektive. Von E. Müller. S. 71. — Doehlemann, Projektive Geometrie. Von P. Schafheitlin. S. 72. — Mahler, Ebene Geometrie. Von P. Schafheitlin. S. 73. — Emch, A., An introduction to projective geometry and its applications. Von Lothar Heffter. S. 72. — Grünfeld, E., Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen. Von G. Wallenberg. S. 73. — Weinbaum, O., Die Spiegelung einer unendlichen Ebene in einem zu ihr senkrechten elliptischen Zylinder. Von G. Wallenberg. S. 74. — Teixeira, F. Gomes, Tratado de las curvas especiales notables. Von H. Wieleitner. S. 75. — Fine, H. B., A College Algebra. Von E. Netto. S. 74. — Laisant, C. A., Initiation mathématique. Von E. Kullrich. S. 77. — Mollinger, H., Kurze Anleitung zur Berechnung von Flächen und Körpern für Schule und Praxis. Von E. Kullrich. S. 78. — Lafitte, P. de, Essai sur le carré magique de N à N nombres. Von E. Kullrich. S. 79. — Müller, M., Die abgekürzte Dezimalbruchrechnung. Von E. Kullrich. S. 79. — Krüger, L., Zur Ausgleichung der Widersprüche in den Winkelbedingungsgleichungen trigonometrischer Netze. Von L. Krüger. S. 79. — Kobold, Der Bau des Fixsternsystems mit besonderer Berücksichtigung der photometrischen Resultate. Von H. Samter. S. 80. — Börnstein, Leitfaden der Wetterkunde. Von H. Samter. S. 81. — Remus, Der dynamologische Lehrgang. Von H. Samter. S. 82. — Bücher, M. v., Das optischen Instrumente. Franz, Der Mond. Von H. Samter. S. 82. — Astronomischer Kalender für 1906. Von H. Samter. S. 83. — Böttger, Beiträge zur Geschichte und Methode des chemischen Unterrichts in der Volksschule. Von H. Samter. S. 83. — Annuaire pour l'an 1908. Von E. Jahnke. S. 83.

Vereinsnachrichten 84

1. Aufgaben und Lehrsätze. Lösungen.

A. Aufgaben und Lehrsätze. **191.** Von O. Meißner. S. 84. — **192.** Von O. Meißner. S. 84. — **193.** Von O. Meißner. S. 84.

B. Lösungen. Zu **15** (E. N. Barisien) von stud. math. W. Gaedecke. S. 85. — Zu **47** (O. Stolz) von stud. math. W. Gaedecke. S. 87. — Zu **54** (E. Lampe) von stud. math. J. Krug und E. Lampe. S. 87. — Zu **76** (W. Fr. Meyer) von stud. math. W. Gaedecke und E. Lampe. S. 88. — Zu **156** (O. Meißner) von stud. math. J. Krug. S. 89. — Zu **173** (G. Kober) von stud. math. A. Wieferich. S. 91. — Zu **180** (G. Kober) von W. Stegemann. Mit 1 Figur. S. 91.

2. Anfragen und Antworten. (Vacat.)

3. Kleinere Notizen. Das regelmäßige Vierundzweißig-Eck. Von Karl Hunrath. Mit 4 Figuren. S. 92. — Der Fundamentalsatz der Algebra. K. Kommerell. S. 99 — Abwicklung eines Rotationsellipsoids auf die Rotationsfläche einer Sinuslinie. Von M. Lagally. S. 102. — Eine elementare Herleitung für das Keplersche Gesetz von der Gestalt der Bahn. Von H. Dörrie. Mit 3 Figuren. S. 104. — Über die Zahlen der Form $a^{p-1} - 1$, wenn p eine Primzahl. Von H. Hertzer. S. 107. — Über eine für die Dreiecksgeometrie wichtige Gleichung sechsten Grades. Von Josef Schmidt sen. S. 108. — Der Schwerpunkt des Parabelbogens. Von G. Kober und E. Lampe. S. 110.

4. Bei der Redaktion eingegangene Bücher 111

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft:	Anhang Seite
57. Sitzung am 18. Dezember 1907	19
58. Sitzung am 29. Januar 1908	19
Die Nullstellen der hypergeometrischen Funktion. Von P. Schafheitlin	19—28

Eingelaufen sind und zum Abdruck in den nächsten Heften gelangen Beiträge der Herren

O. Biermann, P. Boedke, F. Boegehold, V. Eberhard, E. Eckhardt, E. Foethke, W. Gadt, R. Heger, Ed. Janisch, Philip E. B. Jourdain, W. Kluge, F. Kölmel, J. Kürschak, R. Liebstein, G. Majcen, E. Malo, E. Meyer, W. F. Meyer, J. V. Pexider, H. Reißner, L. Saalschütz, F. H. Safford, E. Salkowski, A. Schmid, C. Schmidt, O. Spieß, E. Stenitz, J. Valyi, W. Vogt, G. Wallenberg, A. Wendler, R. Winkelmann, E. Ziemke.

Eingelaufene Lösungen: Zu 40 (U. Stolz) von W. Gaedecke. — Zu 162 (P. Schaffheitlin) von H. Schumacher (Münster) und stud. math. K. Loeber (Berlin). — Zu 165 (F. Schlegel) von J. Rose (Nivelles). — Zu 177 (W. Fr. Meyer) von W. Stegemann. — Zu 182 (H. Wieleitner) von den stud. math. G. Fuchs, J. Krug und A. Baruch, von C. Hoffmann stud. math. L. Braude (Heidelberg), W. Stegemann, stud. math. W. Blaschke (Graz) und H. Wieleitner. — Zu 183 (H. Wieleitner) von W. Stegemann. — Zu 184 (U. Kober) von W. Stegemann. — Zu 186 (W. Fr. Meyer) von G. Berkhan (Hamburg). — Zu 187 (G. Kober) von R. Köstlin (Schwäbisch Gmünd). — Zu 189 (P. Stäckel) von stud. math. A. Baruch, G. Berkhan, stud. rer. K. Bühle (Charlottenburg), E. Stamm (Innsbruck), W. Lorey (Göttingen), E. Köstlin und den stud. math. J. Braunschweiger (Erlangen) und W. Groß (Wien). — Zu 190 (H. Wieleitner) von stud. math. W. Gaedecke, G. Berkhan, C. Hoffmann, E. Köstlin und H. Wieleitner.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin.

Fragen der Elementargeometrie.

Aufsätze von

U. Amaldi, E. Baroni, R. Bonola, B. Calò, G. Castelnuovo, A. Conti, E. Daniele, F. Enriques, A. Giacomini, A. Guarducci, G. Vailati, G. Vitali.

Gesammelt und zusammengestellt von

Federigo Enriques,

ord. Professor an der Universität Bologna.

Deutsche Ausgabe von Dr. **Hermann Fleischer.**

II. Teil. Die geometrischen Aufgaben, ihre Lösung und Lösbarkeit.

Mit 135 Figuren im Text. [XII u. 348 S.] gr. 8. 1907. In Leinwand geb. n. ℳ 9.—

[Teil I. Unter der Presse.]

Das Original des Buches erschien 1900 in Bologna unter dem Titel: Questioni riguardanti la geometria elementare. Es war aus der Anregung hervorgegangen, die F. Klein mit seiner Schrift: Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie, Leipzig 1895, gegeben hatte. Hatte Klein in dieser Schrift dargelegt, „was die moderne Wissenschaft über die Möglichkeit der elementargeometrischen Konstruktionen zu sagen weiß", so wünschte Enriques noch in andern Punkten zu zeigen, was aus den Untersuchungen der modernen Mathematik für elementargeometrische Fragen sich ergibt, um auf diese Weise dazu beizutragen, daß der geometrische Unterricht auf den Mittelschulen von höheren Gesichtspunkten aus erteilt werde. So hat Enriques noch die „Lösung der geometrischen Aufgaben" und die „Prinzipien der Geometrie", soweit sie sich elementar behandeln lassen, in den Kreis seiner Betrachtungen gezogen und zur Erledigung seines Programms einen Kreis von Mitarbeitern angeworben, dem neben seinem Freunde G. Castelnuovo in Rom mehrere frühere Schüler von ihm angehören. Das Original enthält vierzehn, auch das Historische berücksichtigende Aufsätze, von denen die ersten sechs sich mit grundlegenden Fragen der Geometrie und die übrigen acht mit den geometrischen Aufgaben, ihrer Lösung und Lösbarkeit, beschäftigen. Für die deutsche Ausgabe, die nach mancher Hinsicht als eine Erweiterung und Vervollständigung des Originals sich darstellt, ergab sich daher die natürliche Einteilung in zwei Bände, von denen zunächst der zweite Band vorliegt. Dieser zweite Band der „Fragen der Elementargeometrie" kann auch als eine erweiterte neue Auflage der oben erwähnten Kleinschen Schrift betrachtet werden, die seit längerer Zeit vergriffen ist.

Ausführlicher Prospekt auf Verlangen umsonst und postfrei vom Verlag.

Hierzu Beilagen von **B. G. Teubner** in **Leipzig**, die wir der Beachtung unserer Leser bestens empfehlen.

ARCHIV
DER MATHEMATIK UND PHYSIK

MIT BESONDERER RÜCKSICHT AUF DIE BEDÜRFNISSE DER LEHRER AN HÖHEREN UNTERRICHTSANSTALTEN.

GEGRÜNDET 1841 DURCH J. A. GRUNERT.

DRITTE REIHE.

MIT ANHANG
SITZUNGSBERICHTE DER BERLINER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT.

HERAUSGEGEBEN
VON

E. LAMPE
IN BERLIN

W. FRANZ MEYER
IN KÖNIGSBERG I. PR.

E. JAHNKE
IN BERLIN

13. BAND. 2. HEFT.

MIT 6 TEXTFIGUREN

AUSGEGEBEN AM 19. MAI 1908.

LEIPZIG UND BERLIN,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1908.

Generalregister zum Archiv der Mathematik und Physik, II. Reihe, Band 1—17, zusammengestellt von E. Jahnke. Mit einem Bildnis und Biographie R. Hoppes. [XXXI u. 114 S.] gr. 8. 1901. geh. a. Mk. 6.—

ARCHIV DER MATHEMATIK UND PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN VON E. LAMPE, W. FRANZ MEYER UND E. JAHNKE.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASSE 3.

☞ Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Rezensionsexemplare u. s. w.) sind an den geschäftsführenden Redakteur:

Prof. Dr. E. Jahnke, Berlin W 15, Pariserstraße 36

zu richten. Es nehmen aber auch Geheimer Regierungsrat Prof. Dr. E. Lampe in Berlin W 15, Fasanenstraße 64, und Prof. Dr. W. Franz Meyer in Königsberg i. Pr., Maraunenhof, Herzog Albrecht Allee 27, Sendungen für die Redaktion an.

☞ Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich von größeren Aufsätzen 30 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen, Mitteilungen, Rezensionen u. s. w. 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die gewährte, zu den Herstellungskosten.

☞ Jeder Band des Archivs umfaßt 24 Druckbogen in 4 Heften und kostet 16 Mark; jährlich sollen nicht mehr als 6 Einzel-Hefte ausgegeben werden. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

Die Redaktion ersucht die Herren Autoren, in ihrem eigenen Interesse den Umfang der für das Archiv bestimmten Manuskripte nach Möglichkeit einschränken zu wollen, da nur solche geringen Umfanges Aussicht haben, in nächster Zeit abgedruckt zu werden. Die Redaktion teilt ferner mit, daß sie sich durch den Umfang des vorliegenden Manuskriptenmaterials für die nächste Zeit verhindert sieht, Inauguraldissertationen in extenso ins Archiv aufzunehmen.

INHALT DES VORLIEGENDEN HEFTES.

Seite

Über die Verteilung der reellen Wurzeln dreier rational abhängigen algebraischen Gleichungen. Von V. Eberhard in Halle a. S. 113

Zur Geometrie auf der Kugel. Von R. Heger in Dresden. I. 127

Über sternförmige Polygone, welche mit der Teilung der elliptischen Funktionen im Zusammenhange stehen. Von P. Kokott in Neisse. Mit 1 Figur. 134

Systeme korrelativer Bündel, welche eine gegebene F^3 erzeugen. Von Wolfgang Vogt in Karlsruhe 137

Einige Sätze über die räumliche Hyperbel. Von G. Majcen in Agram 144

Die involutorischen konformen Punkttransformationen des Raumes. Von Eugen Meyer in Charlottenburg 149

Über Formen, die vollständige Potenzen sind. Von Josef Kürschák in Budapest 153

Sur un mode de génération de la cubique gauche; par Lucien Godeaux in Liége 166

Rezensionen. Von E. Aschkinaß, F. Harres, P. Johannesson, M. Lane, M. Poche, A. Roth, H. Samter, Cl. Schaefer, P. Schafheitlin, E. Schelbe, Ad. Schmidt, O. Staude, J. Tropfke, R. Vater 169

Thomae, J., Grundriß einer analytischen Geometrie der Ebene. Von O. Staude. S. 158. — Amodeo, Federico, Lezioni di geometria proiettiva. Von O. Staude. S. 164. — Müller, Felix, Karl Schellbach. Rückblick auf sein wissenschaftliches Leben. Von H. Samter. S. 167. — Barbarin, A., Vorlesungen über theoretische Astronomie. Von H. Schaefer. S. 168. — Metz, G. de, La Science rationelle considérée dans ses limites. Von Cl. Schaefer. S. 169. — Thomsen, J. J., Elektrizität und Materie. Von E. Aschkinaß. S. 169. — Popius, Karl Frhr. von, Das Reihen- und die rationellen Gleichungen. Von E. Aschkinaß. S. 170. — Hasson, Paul, La Radium et la Radioactivité. Von E. Aschkinaß. S. 171. — Zenneck, J., Elektromagnetische Schwingungen und drahtlose Telegraphie. Von E. Aschkinaß. S. 171. — Mayer, Methodisch geordnete Sammlung geometrischer Aufgaben in stufenweiser Darstellung. Von P. Schafheitlin. S. 172. — Schellbach, Funktionentheorie. Bemerkungen zum Anfange Algebraischer Begriffe. Von P. Schafheitlin. S. 173. — Koppe-Blochmann's Grundriß zum Gebrauche an höheren Unterrichtsanstalten. Von P. Schafheitlin. S. 173. — Fabiánek, Gabriel, Die Theorie, Berechnung und Konstruktion der Dampfturbinen. Von R. Vater. S. 176. — Wechsler, Alfred, Anwendung der Graphostatik in Maschinenbau, mit besonderer Berücksichtigung der städtischen In-

(Fortsetzung auf der 4. Seite des Umschlages.)

Über die Verteilung der reellen Wurzeln dreier rational abhängigen algebraischen Gleichungen.

Von V. Eberhard in Halle a. S.

In meinem Referat: „Ein Beitrag zur Theorie der Gleichungen“[1]) habe ich das Problem der Trennung der reellen Wurzeln einer allgemeinen Gleichung n-ten Grades auf die Bestimmung der entsprechenden Wurzeln zweier Gleichungen $(n-1)$-ten Grades zurückgeführt. Nachdem ich dort unter I die Notwendigkeit eines solchen Zusammenhanges nachgewiesen, habe ich mich bei seiner Ableitung in II auf den speziellen Fall einer Gleichung mit n reellen Wurzeln beschränkt und für den allgemeinen Fall in III mein damaliges recht kompliziertes Beweisverfahren nur angedeutet. Bei dem Bestreben, einen einfacheren allgemeinen Beweis zu finden, erkannte ich jenen Zusammenhang als speziellen Fall eines allgemeinen Gesetzes über die Verteilung der reellen Wurzeln dreier algebraischen Gleichungen

$$f_1(x) = 0,\ f_2(x) = 0,\ f_3(x) = 0,$$

zwischen deren linken Seiten eine ganze rationale Identität statt hat:

$$g_1(x) f_1(x) + g_2(x) f_2(x) + g_3(x) f_3(x) = 0.$$

Die folgenden Ausführungen geben in den Nrn. **1**—**3** die Ableitung dieses Theorems und in Nr. **4** seine Auswertung für die früher behandelte Aufgabe.

1. *Ein fundamentales Positionsgesetz.* — Zwischen drei ganzen rationalen Funktionen $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ der Grade N_1, N_2, N_3 mit resp. den reellen Nullstellen

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_a,\ \beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_b,\ \gamma_1 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_c$$

und drei positiv definiten analogen Funktionen $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x)$ bestehe die Identität:

$$g_1(x) \cdot f_1(x) + g_2(x) \cdot f_2(x) + g_3(x) \cdot f_3(x) = 0.$$

1) Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Band XI. 1902, Heft 4.

Digitized by Google

Dann gilt rücksichtlich der Verteilung aller $a+b+c$ Werte α, β, γ im reellen Zahlgebiet das Fundamentalgesetz:

I. Ordnet man sämtliche reellen Wurzeln der Gleichungen

$$f_1(z)=0,\ f_2(z)=0,\ f_3(z)=0$$

der Größe nach zu einer einzigen aufsteigenden Folge

$$(\alpha,\beta,\gamma)_{a,\,b,\,c}$$
$$\equiv\cdots<\alpha_1^{(h)}<\alpha_2^{(h)}<\cdots<\alpha_{a_h}^{(h)}<\beta_1^{(h)}<\beta_2^{(h)}<\cdots<\beta_{b_h}^{(h)}<\gamma_1^{(h)}<\gamma_2^{(h)}<\cdots<\gamma_{c_h}^{(h)}<\cdots\equiv$$
$$\equiv\cdots<(\alpha)_{a_h}<(\beta)_{b_h}<(\gamma)_{c_h}<\cdots\equiv A$$
$$(a_h=0,\,1,\,2,\cdots,a;\quad b_h=0,\,1,\,2,\cdots,b;\quad c_h=0,\,1,\,2,\cdots,c;$$
$$1\leqq a_h+b_h+c_h\leqq a+b+c),$$

so wird irgend ein Paar aufeinanderfolgender gleichnamiger Wurzeln

$$\alpha_i<\alpha_{i+1}\ \text{ oder }\ \beta_k<\beta_{k+1}\ \text{ oder }\ \gamma_l<\gamma_{l+1}$$

entweder durch je eine gerade oder durch je eine ungerade Anzahl von Wurzeln der beiden anderen Gleichungen getrennt.

Beweis. Aus den gemachten Voraussetzungen folgt, daß die Vorzeichen der drei Funktionen $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_3(z)$ für ein beliebiges z in einer der Beziehungen stehen:

(1)
$$\begin{aligned}&\text{a)}\quad \operatorname{sgn} f_1=\ \ \operatorname{sgn} f_2=-\operatorname{sgn} f_3,\\ &\text{b)}\quad \operatorname{sgn} f_1=-\operatorname{sgn} f_2=\ \ \operatorname{sgn} f_3,\\ &\text{c)}\quad -\operatorname{sgn} f_1=\ \ \operatorname{sgn} f_2=\ \ \operatorname{sgn} f_3,\end{aligned}$$

also allgemein

$$\operatorname{sgn} f_1\ \operatorname{sgn} f_2\ \operatorname{sgn} f_3=-1,$$

welche an den Nullstellen α, β, γ die Formen annehmen:

(2)
$$\begin{aligned}&\text{a)}\ f_1(\alpha)=0,\ \operatorname{sgn} f_2(\alpha)=-\operatorname{sgn} f_3(\alpha),\\ &\text{b)}\ f_2(\beta)=0,\ \operatorname{sgn} f_1(\beta)=-\operatorname{sgn} f_3(\beta),\\ &\text{c)}\ f_3(\gamma)=0,\ \operatorname{sgn} f_1(\gamma)=-\operatorname{sgn} f_2(\gamma).\end{aligned}$$

Wenn daher das Wurzelpaar $\alpha_1<z<\alpha_2$ — es genügt dieses eine zu betrachten — getrennt ist durch die Größenfolgen:

$$\bar\beta_1<\bar\beta_2<\cdots<\bar\beta_p\ \text{ und }\ \bar\gamma_1<\bar\gamma_2<\cdots<\bar\gamma_q,$$

so bestimmen sich gemäß den für das Argument $z=\alpha_1$ gültigen Relationen

$$f_1(\alpha_1)=0,\ \operatorname{sgn} f_2(\alpha_1)=-\operatorname{sgn} f_3(\alpha_1)$$

Digitized by Google

die Vorzeichen von $f_2(x)$ und $f_3(x)$ an der Stelle $x = \alpha_2$ durch resp.:

$$\operatorname{sgn} f_2(\alpha_2) = (-1)^p \cdot \operatorname{sgn} f_2(\alpha_1),\ \operatorname{sgn} f_3(\alpha_2) = (-1)^{q+1} \cdot \operatorname{sgn} f_2(\alpha_1).$$

Es gilt aber wegen $f_1(\alpha_2) = 0$ wiederum:

$$\operatorname{sgn} f_2(\alpha_2) = -\operatorname{sgn} f_3(\alpha_2)$$

oder

$$(-1)^{p+1} \operatorname{sgn} f_2(\alpha_1) = (-1)^{q+1} \operatorname{sgn} f_2(\alpha_1).$$

Die beiden in Frage stehenden Anzahlen

$$p = 0, 1, 2, \cdots \quad \text{und} \quad q = 0, 1, 2, \cdots$$

genügen mithin der Gleichung

$$(-1)^{q-p} = +1,$$

d. h. ihre Differenz $q - p$ ist stets eine gerade Zahl. q. e. d.

Zusatz 1: Besteht die Gleichheit der Vorzeichen von $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x)$ nur in einzelnen Teilen des reellen Zahlgebiets, so behält der Satz für jeden dieser Teile seine Richtigkeit.

Zusatz 2: Er besteht ferner gegenüber allen Folgen, welche aus der gegebenen A durch Löschung eines Paares und folglich beliebig vieler Paare benachbarter gleichnamiger Wurzeln hervorgehen.

2. *Folgerungen.* — Das gewonnene allgemeine Grundgesetz gestattet wichtige, die Komposition der Wurzelfolge $A = (\alpha, \beta, \gamma)_{a,b,c}$ aufdeckende Konsequenzen. — Um diese präziser aussprechen zu können, führe ich einige abkürzende Bezeichnungen ein. Es soll jede in A vorhandene ununterbrochene Aufeinanderfolge gleichnamiger Wurzeln

$$(\alpha)_{a_h} \text{ oder } (\beta)_{b_h} \text{ oder } (\gamma)_{c_h}.$$

a) bei gerader Anzahl solcher eine paare,

b) bei ungerader Anzahl eine unpaare

Stammfolge oder Stammgruppe,

ein aus m sich aneinanderreihenden Stammgruppen zweier oder aller drei Kategorien zusammengesetzter Bestandteil

$$(\alpha, \beta, \gamma)_{a_1,b_1,c_1} \equiv (\alpha)_{a'} < (\beta, \gamma)_{b',c'} < (\alpha)_{a''} < (\beta, \gamma)_{b'',c''} < \cdots < (\alpha)_{a^{(x)}} < (\beta, \gamma)_{b^{(x)},c^{(x)}}$$

$$\left((\beta, \gamma)\, r, s \equiv \begin{matrix} (\beta) r_1 \\ (\gamma) s_1 \end{matrix} < \begin{matrix} (\gamma) s_1 \\ (\beta) r_1 \end{matrix} < \begin{matrix} (\beta) r_2 \\ (\gamma) s_2 \end{matrix} < \begin{matrix} (\gamma) s_2 \\ (\beta) r_2 \end{matrix} < \cdots < \begin{matrix} (\beta) r_\varrho \\ (\gamma) s_\sigma \end{matrix} < \begin{matrix} (\gamma) s_\sigma \\ (\beta) r_\varrho \end{matrix} \right)$$

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_\varrho = r; \qquad s_1 + s_2 + \cdots + s_\sigma = s,$$

Digitized by Google

aber eine m-teilige Elementarfolge genannt werden. Man schließt ohne Mühe nacheinander die Sätze:

1. Eine paare Stammgruppe $(\alpha)_{2a'}$ kann sowohl zwischen zwei gleichnamigen als zwischen zwei ungleichnamigen, — eine unpaare Stammgruppe $(\alpha)_{2a'+1}$ aber nur zwischen zwei ungleichnamigen Stammfolgen stehen,

a) $(\beta)_{b'} < (\alpha)_{2a'} < (\beta)_{b''}$ bezw. $(\beta)_{b'} < (\alpha)_{2a'} < (\gamma)_{c'}$,

b) $(\beta)_{b'} < (\alpha)_{2a'+1} < (\gamma)_{c'}$ bezw. $(\gamma)_{c'} < (\alpha)_{2a'+1} < (\beta)_{b'}$.

2. Eine Elementarfolge zweier unpaaren Stammgruppen $(\beta)_{2b'+1} < (\gamma)_{2c'+1}$ steht allemal zwischen den gleichnamigen Gruppen $(\alpha)_{a'}$ und $(\alpha)_{a''}$, die analoge dreiteilige Folge $(\alpha)_{2a'+1} < (\beta)_{2b'+1} < (\gamma)_{2c'+1}$ also zwischen den anderen $(\gamma)_{c'} < \cdots < (\alpha)_{a''}$.

3. Setzt sich die Elementarfolge

$$(\alpha,\ \beta,\ \gamma)_{a_1, b_1, c_1} \equiv \cdots < (\alpha)_{a'} < (\beta,\ \gamma)_{b', c'} < (\alpha)_{a''} < (\beta,\ \gamma)_{b'', c''} < \cdots$$

aus durchgängig unpaaren Stammgruppen zusammen, so treten alle gleichnamigen Gruppen in periodischer Anordnung auf:

$$(\alpha,\ \beta,\ \gamma)_{a_1, b_1, c_1} \equiv \cdots < (\alpha)_{a'} < (\beta)_{b'} < (\gamma)_{c'} < (\alpha)_{a''} < (\beta)_{b''} < (\gamma)_{c''} < \cdots$$

4. Zwei aufeinanderfolgende gleichnamige Wurzeln oder deren Gruppen

$$\alpha_i < \alpha_{i+1}$$

sind allemal durch eine Elementarfolge der Typen getrennt:

a) $$\alpha_i < (\beta,\ \gamma)_{p,\ q} < \alpha_{i+1} \equiv$$

$$\alpha_i < (\beta)_{b'} < (\gamma)_{2c_1} < (\beta)_{2b_1} < (\gamma)_{2c_2} < (\beta)_{2b_2} < \cdots < (\beta)_{2b_k} < (\gamma)_{c'} < \alpha_{i+1},$$

a_1) $$p \equiv 0 \mod 2,\ q \equiv 0 \mod 2,$$

$$b' = 0,\ 2,\ 4, \cdots,\ p,\ c' = 0,\ 2,\ 4, \cdots,\ q;$$

a_2) $$p \equiv 1 \mod 2,\ q \equiv 1 \mod 2,$$

$$b' = 1,\ 3, \cdots,\ p,\ c' = 1,\ 3, \cdots,\ q.$$

b) $\alpha_i < (\beta)_{b'} < (\gamma)_{2c_1} < (\beta)_{2b_1} < (\gamma)_{2c_2} < (\beta)_{2b_2} < \cdots < (\gamma)_{2c_\varkappa} < (\beta)_{b''} < \alpha_{i+1}$

$$p \equiv 0 \mod 2,\ q \equiv 0 \mod 2;$$

b_1) $b' \equiv b'' \equiv 0 \mod 2$, b_2) $b' \equiv b'' \equiv 1 \mod 2$.

Ich definiere eine elementare Wurzelfolge

I. als neutral oder indifferent,

II. als konstituierend oder determinierend,

Digitized by Google

wenn sie durch sukzessive Löschung aller ursprünglich vorhandenen oder nachträglich entstehenden paaren Stammgruppen

I. völlig zum Verschwinden gebracht,

II. in eine irreduktible Folge unpaarer Stammgruppen verwandelt wird;

und ich unterscheide als Grundformen

I. Der neutralen:

1. Die paare Folge

$$[\alpha, \alpha, \beta, \beta, \gamma, \gamma] \equiv \cdots < (\alpha)_{2a_1} < (\beta)_{2b_1} < (\gamma)_{2c_1} < (\alpha)_{2a_2} < (\beta)_{2b_2} < (\gamma)_{2c_2} < \cdots.$$

2. Die gemischte Folge

$$[\alpha, \beta, \gamma, \gamma, \beta, \alpha]$$

$$\equiv \cdots < (\alpha)_{2a_1+1} < (\beta)_{2b_1+1} < (\gamma)_{2c_1+1} < (\gamma)_{2c_2+1} < (\beta)_{2b_2+1} < (\alpha)_{2a_2+1} < \cdots$$

II. Der konstituierenden:

1. Die vollständige Folge

$$\{\alpha, \beta, \gamma\}_m \equiv \alpha_1' < \beta_1' < \gamma_1' < \alpha_2' < \beta_2' < \gamma_2' < \cdots < \alpha_m' < \beta_m' < \gamma_m'.$$

2. Die unvollständigen Folgen:

a) $\{\alpha, \beta, \gamma\}_m < \alpha_{m+1}' < \beta_{m+1}'$ und $\beta_0' < \gamma_0' < \{\alpha, \beta, \gamma\}_m$,

b) $\{\alpha, \beta, \gamma\}_m < \alpha_{m+1}'$ und $\gamma_0' < \{\alpha, \beta, \gamma\}_m$.

Gemäß der völligen Gleichberechtigung der Buchstaben α, β, γ sondern sich die sechs Typen einer irreduktiblen Grundform II in drei Paare inverser Folgen,

1. die vollständigen in die Paare:

$$\{\alpha, \beta, \gamma\}_{m_1} \text{ inv. } \{\gamma, \beta, \alpha\}_{n_1},$$
$$\{\beta, \gamma, \alpha\}_{m_1} \text{ inv. } \{\alpha, \gamma, \beta\}_{n_1},$$
$$\{\gamma, \alpha, \beta\}_{m} \text{ inv. } \{\beta, \alpha, \gamma\}_{n_1};$$

2. die unvollständigen in die anderen:

a. $\{\alpha, \beta, \gamma\}_{m_1} < \alpha_1'' < \beta_1''$ inv. $\beta_2'' < \alpha_2'' < \{\gamma, \beta, \alpha\}_{n_1}$
$\{\beta, \gamma, \alpha\}_{m_1} < \beta_1'' < \gamma_1''$ inv. $\gamma_2'' < \beta_2'' < \{\alpha, \gamma, \beta\}_{n_1}$,
$\{\gamma, \alpha, \beta\}_{m_1} < \gamma_1'' < \alpha_1''$ inv. $\alpha_2'' < \gamma_2'' < \{\beta, \alpha, \gamma\}_{n_1}$;

b. $\{\alpha, \beta, \gamma\}_{m_1} < \alpha_1''$ inv. $\alpha_2'' < \{\gamma, \beta, \alpha\}_{n_1}$,
$\{\beta, \gamma, \alpha\}_{m_1} < \beta_1''$ inv. $\beta_2'' < \{\alpha, \gamma, \beta\}_{n_1}$,
$\{\gamma, \alpha, \beta\}_{m_1} < \gamma_1''$ inv. $\gamma_2'' < \{\beta, \alpha, \gamma\}_{n_1}$.

Digitized by Google

Man erkennt unmittelbar, daß die Zusammenziehung eines Paares inverser Folgen in eine einzige

1. bei Gleichheit der Indices, $m_1 = n_1$, zu einer gemischt neutralen Elementarfolge

$$\{\alpha, \beta, \gamma\}_m < \{\gamma, \beta, \alpha\}_m \equiv [\alpha, \beta, \gamma; \gamma, \beta, \alpha],$$

$$\{\alpha, \beta, \gamma\}_m < \alpha_1'' < \beta_1'' < \beta_2'' < \alpha_2'' < \{\gamma, \beta, \alpha\}_m \equiv [\cdots \alpha, \beta, \beta, \alpha \cdots],$$

$$\{\alpha, \beta, \gamma\}_m < \alpha_1'' < \alpha_2'' < \{\gamma, \beta, \alpha\}_m \equiv [\cdots \gamma, \alpha; \alpha, \gamma \cdots];$$

2. bei ungleichen Indices aber, $m_1 > n_1$ oder $m_1 < n_1$, stets wieder zu einer vollständigen determinierenden Grundform führt

$$\{\alpha, \beta, \gamma\}_{m_1 - n_1} \text{ oder } \{\gamma, \beta, \alpha\}_{n_1 - m_1}.$$

Zugleich zeigen die identischen Umformungen

$$\{\beta, \gamma, \alpha\}_m = \beta, \gamma, \{\alpha, \beta, \gamma\}_{m-1}, \alpha; \quad \{\alpha, \gamma, \beta\}_m = \alpha, \quad \{\gamma, \beta, \alpha\}_{m-1}, \gamma, \beta,$$

$$\{\gamma, \alpha, \beta\}_m = \gamma, \{\alpha, \beta, \gamma\}_{m-1}, \alpha, \beta; \quad \{\beta, \alpha, \gamma\}_m = \beta, \alpha, \{\gamma, \beta, \alpha\}_{m-1}, \gamma,$$

daß alle aufgestellten Grundformen — vollständige wie unvollständige — mittels eines einzigen Paares inverser $\{\alpha, \beta, \gamma\}_m$ und $\{\gamma, \beta, \alpha\}_m$ und deren Nebenformen sich zusammenfassend darstellen lassen durch die Schemata:

$$\widetilde{\beta, \gamma}^{1}) < \{\alpha, \beta, \gamma\}_m < \widetilde{\alpha, \beta} \text{ und } \widehat{\beta, \alpha} < \{\gamma, \beta, \alpha\}_m < \widehat{\gamma, \beta}.$$

3. *Die Reduktion der Wurzelfolge A auf ihre irreduktible Grundform.* — Nunmehr gehe ich dazu über, den invarianten Charakter der durch die Gleichungen $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = 0$, $f_3(x) = 0$ definierten Wurzelfolge $A = (\alpha, \beta, \gamma)_{a,b,c}$ d. h.: ihre irreduktible, im engeren Sinne determinierende Grundfolge abzuleiten.

Zu dem Ende streiche ich in A alle vorhandenen paaren Stammgruppen $(\alpha)_{2a_k}$, $(\beta)_{2b_k}$, $(\gamma)_{2c_k}$ und reduziere A dadurch auf eine vorerst durch Lücken unterbrochene Sukzession konstituierender Formen: $A_2 = C_1 < C_2 < C_3 < \cdots < C_r$. Indem man diese durch die inversen Grundfolgen ausdrückt $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ und $\{\gamma, \beta, \alpha\}$, erhält man für die zusammengesetzte Elementarreihe $C_1 < C_2$ wegen des sie beherrschenden Fundamentalgesetzes

---

1) Durch den Bogen wird die Vertauschbarkeit der unter ihm stehenden verschiedenen Buchstaben angedeutet.

Digitized by Google

I. falls C_1 und C_2 gleichartig sind —

1a) $\widetilde{\beta,\gamma} < \{\alpha,\beta,\gamma\}_{m_1} < \{\alpha,\beta,\gamma\}_{m_2} < \widetilde{\alpha,\beta} \equiv \widetilde{\beta,\gamma} < \{\alpha,\beta,\gamma\}_{m_1+m_2} < \widetilde{\alpha,\beta}$,

b) $\widetilde{\beta,\gamma} < \{\alpha,\beta,\gamma\}_{m_1} < \overset{\alpha}{\underset{\alpha,\beta}{}} < \overset{\beta,\gamma}{\underset{\gamma}{}} < \{\alpha,\beta,\gamma\}_{m_2} < \widetilde{\alpha,\beta} \equiv \widetilde{\beta,\gamma}$
$< \{\alpha,\beta,\gamma\}_{m_1+m_2+1} < \widetilde{\alpha,\beta}$;

2a) $\widetilde{\beta,\alpha} < \{\gamma,\beta\,\alpha\}_{n_1} < \{\gamma,\beta,\alpha\}_{n_2} < \widetilde{\gamma,\beta} \equiv \widetilde{\beta,\alpha} < \{\gamma,\beta,\alpha\}_{n_1+n_2} < \widetilde{\gamma,\beta}$;

b) $\widetilde{\beta,\alpha} < \{\gamma,\beta,\alpha\}_{n_1} < \overset{\gamma}{\underset{\gamma,\beta}{}} < \overset{\beta,\alpha}{\underset{\alpha}{}} < \{\gamma,\beta,\alpha\}_{n_2} < \widetilde{\gamma,\beta} \equiv \widetilde{\beta,\alpha}$
$< \{\gamma,\beta,\alpha\}_{n_1+n_2+1} < \widetilde{\gamma,\beta}$;

II. falls C_1 und C_2 ungleichartig sind —

$$\widetilde{\beta,\gamma} < \{\alpha,\beta,\gamma\}_{m_1} < \overset{\alpha}{\underset{\alpha,\beta}{}} < \overset{\alpha}{\underset{\beta,\alpha}{}} < \{\gamma,\beta,\alpha\}_{n_1} < \widetilde{\gamma,\beta},$$

welche durch Streichung der neutralen Zwischenfolge $\left[\begin{smallmatrix}\alpha,&\alpha\\ \alpha,&\beta,&\beta,&\alpha\end{smallmatrix}\right]$

a) für $m_1 > n_1$, b) für $m_1 = n_1$, c) für $m_1 < n_1$

sich zusammenzieht in resp:

a) $\widetilde{\beta,\gamma} < \{\alpha,\beta,\gamma\}_{m_1-n_1} < \widetilde{\gamma,\beta}$, b) $\widetilde{\beta,\gamma} < \widetilde{\gamma,\beta}$, c) $\widetilde{\beta,\gamma} < \{\gamma,\beta,\alpha\}_{n_1-m_1} < \widetilde{\gamma,\beta}$

und unter Benutzung des Symbols $\{\alpha,\beta,\gamma\}_{-m} = \{\gamma,\beta,\alpha\}_m$ einheitlich geschrieben werden kann $\widetilde{\beta,\gamma} < \{\alpha,\beta,\gamma\}_{m_1-n_1} < \widetilde{\gamma,\beta}$.

Hiernach wird die Zusammenziehung jeder Gruppe in A_1 aufeinanderfolgender — vollständiger wie unvollständiger — gleichartiger Konstituenten in eine Elementarfolge zu einer der Anordnungen führen:

1. $A_2 \equiv \widetilde{\beta,\gamma} < \{\alpha,\beta,\gamma\}_{m_1'} < \left[\begin{smallmatrix}\alpha,&\alpha\\ \alpha,&\beta,&\beta,&\alpha\end{smallmatrix}\right] < \{\gamma,\beta,\alpha\}_{n_1'} < \left[\begin{smallmatrix}\gamma,&\gamma\\ \gamma,&\beta,&\beta,&\gamma\end{smallmatrix}\right]$
$< \{\alpha,\beta,\gamma\}_{m_2'} < \cdots < \{\alpha,\beta,\gamma\}_{m_k'} < \widetilde{\alpha,\beta}$;

2. $A_2 \equiv \cdots < \{\alpha,\beta,\gamma\}_{m_k'} < \left[\begin{smallmatrix}\alpha,&\alpha\\ \alpha,&\beta,&\beta,&\alpha\end{smallmatrix}\right] < \{\gamma,\beta,\alpha\}_{n_k'} < \widetilde{\gamma,\beta}$,

welche nach Löschung der neutralen Zwischenfolgen unter Anwendung einer früheren Formel die irreduktible Form annehmen:

$$A_3 \equiv \widetilde{\beta,\gamma} < \{\alpha,\beta,\gamma\}_{\varrho} < \widetilde{\gamma,\beta}.$$

Der ganzzahlige Index ϱ ist aus der Reihe A_1 leicht abzulesen. — Bezeichnet nämlich μ die Anzahl der in letzterer benachbarten unvollständigen Folgen erster Art

$$\{\alpha,\beta,\gamma\}_{m_i} < \overset{\alpha}{\underset{\alpha,\beta}{}} < \overset{\beta,\gamma}{\underset{\gamma}{}} < \{\alpha,\beta,\gamma\}_{m_{i+1}},$$

ν die Anzahl benachbarter unvollständiger Folgen zweiter Art

$$\{\gamma,\beta,\alpha\}_{n_i} < \overset{\gamma}{\underset{\gamma,\beta}{}} < \overset{\beta,\alpha}{\underset{\alpha}{}} < \{\gamma,\beta,\alpha\}_{n_{i+1}},$$

Digitized by Google

so berechnet sich

$$\varrho = \sum_i (m_i) + \mu - \sum_i (n_i) - \nu .$$

Unabhängig von der Aufeinanderfolge der ausgeführten Löschungen definiert diese Zahl die Charakteristik der ursprünglichen Wurzelfolge

$$A = (\alpha, \beta, \gamma)_{a,b,c}.$$

Die noch vorhandene Mehrdeutigkeit des reduzierten Systems

$$A_3 \equiv \widetilde{\beta,\gamma},\ \{\alpha, \beta, \gamma\}_\varrho,\ \widetilde{\alpha,\beta}$$

hängt davon ab, wie viele und welche der drei Funktionen $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_3(z)$ geraden oder ungeraden Grades sind. — Indem man diesen Umstand gebührend in Rücksicht zieht, kann man die gewonnenen Ergebnisse zu dem Satze zusammenfassen:

II. Löscht man in der aus den reellen Wurzeln

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_a,\ \beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_b,\ \gamma_1 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_c$$

der drei Gleichungen $f_1(z) = 0$, $f_2(z) = 0$, $f_3(z) = 0$ gebildeten aufsteigenden Größenfolge $A = (\alpha, \beta, \gamma)_{a,b,c}$ successive alle ursprünglich vorhandenen und nachträglich auftretenden Paare benachbarter gleichnamiger Wurzeln $\alpha,\alpha,\ \beta,\beta,\ \gamma,\gamma$, so gelangt man zu einer ganz bestimmten, der reduzierten oder determinierenden Folge

$$\widetilde{\beta,\gamma}, \{\alpha, \beta, \gamma\}_\varrho, \widetilde{\alpha,\beta},$$

und zwar gemäß den vier unterschiedlichen Annahmen

1. $N_1 = 2N_1,\quad N_2 = 2N_2,\ N_3 = 2N_3$,
2. $N_1 = 2N_1 + 1,\ N_2 = 2N_2 + 1,\ N_3 = 2N_3 + 1$,
3. $N_1 = 2N_1 + 1,\ N_2 = 2N_2,\ N_3 = 2N_3$
4. $N_1 = 2N_1,\quad N_2 = 2N_2 + 1,\ N_3 = 2N_3 + 1$

in einer der typischen Formen:

1. $\{\alpha, \beta, \gamma\}_{\pm 2m}$, $\{\beta, \gamma, \alpha\}_{\pm 2m}$, $\{\gamma, \alpha, \beta\}_{\pm 2m}$,
2. $\{\alpha, \beta, \gamma\}_{\pm 2m+1}$, $\{\beta, \gamma, \alpha\}_{\pm 2m+1}$, $\{\gamma, \alpha, \beta\}_{\pm 2m+1}$,
3. $\{\alpha, \beta, \gamma\}_{2m}, \alpha$; $\quad \beta, \gamma, \{\alpha, \beta, \gamma\}_{2m+1}$;
   $\alpha, \{\gamma, \beta, \alpha\}_{2m}$; $\quad \{\gamma, \beta, \alpha\}_{2m+1}, \gamma, \beta$
4. $\beta, \gamma, \{\alpha, \beta, \gamma\}_{2m}$; $\quad \{\alpha, \beta, \gamma\}_{2m+1}, \alpha$;
   $\{\gamma, \beta, \alpha\}_{2m}, \gamma, \beta$; $\quad \alpha, \{\gamma, \beta, \alpha\}_{2m+1}$.

— $m = 0, 1, 2, \ldots$

Digitized by Google

Der Satz gewinnt besonderes Interesse durch seine Umkehrung:

III. Ordnet man die reellen Wurzeln

$$\beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_b \text{ und } \gamma_1 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_c$$

zweier Gleichungen

$$f_2(z) = 0 \text{ und } f_3(z) = 0$$

der nach dem Modul 2 kongruenten Grade

$$N_2 \text{ und } N_3$$

der Größe nach in eine einzige aufsteigende Folge

$$(\beta, \gamma)_{b,c}' \equiv \cdots < (\beta)_{b_i} < (\gamma)_{c_i} < (\beta)_{b_{i+1}} < (\gamma)_{c_{i+1}} < \cdots$$

und bringt diese in bekannter Weise auf ihre reduzierte Form

$$\text{a) } \beta_1' < \gamma_1' < \beta_2' < \gamma_2' < \cdots < \beta_m' < \gamma_m'$$

oder

$$\text{b) } \gamma_1' < \beta_1' < \gamma_2' < \beta_2' < \cdots < \gamma_m' < \beta_m',$$

so besitzt die dritte Gleichung $f_1(z) = 0$

1. für $N_1 \equiv N_2, N_3 \bmod 2$

gleichfalls mindestens m reelle Wurzeln $\alpha_1' < \alpha_2' < \cdots < \alpha_m'$, und zwar in einer der Anordnungen:

$$\text{a) } \{\alpha, \beta, \gamma\}_m, \{\beta, \alpha, \gamma\}_m, \{\beta, \gamma, \alpha\}_m;$$

$$\text{b) } \{\alpha, \gamma, \beta\}_m, \{\gamma, \alpha, \beta\}_m, \{\gamma, \beta, \alpha\}_m;$$

2. für $N_1 + 1 \equiv N_2, N_3 \bmod 2$

mindestens entweder $m-1$ oder $m+1$ reelle Wurzeln $\alpha_1' < \alpha_2' < \cdots < \alpha_{m\mp1}'$, und zwar in einer der Anordnungen:

$$\text{a) } \{\beta, \gamma, \alpha\}_{m-1}, \beta, \gamma \text{ oder } \{\alpha, \beta, \gamma\}_m, \alpha;$$

$$\text{b) } \{\gamma, \beta, \alpha\}_{m-1}, \gamma, \beta \text{ oder } \{\alpha, \beta, \gamma\}_m, \alpha.$$

Der Beweis folgt unmittelbar aus dem Fundamentalgesetz.

4. *Die Trennung der reellen Wurzeln der allgemeinen Gleichung n^{ten} Grades.* — Das Theorem III führt naturgemäß zu der Frage: Existieren im Rationalitätsbereich einer Gleichung n^{ten} Grades

$$f(z) = a_0 z^n - a_1 z^{n-1} + \cdots \mp a_n = 0$$

mit den reellen Wurzeln

$$w_1 < w_2 < \cdots w_\mu < 0 < w_{\mu+1} < w_{\mu+2} < \cdots < w_m$$

solche Paare von Gleichungen $(n-1)^{ten}$ oder niederen Grades

$$f_1(z) = 0 \text{ und } f_2(z) = 0$$

Digitized by Google

mit resp. den reellen Wurzeln

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_p \text{ und } \beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_q,$$

daß die durch letztere bestimmte determinierende Folge sämtliche reellen Wurzeln der ursprünglichen Gleichung gegeneinander isoliert?

Die für eine Bejahung der Frage erforderliche Eigenschaft des gesuchten Gleichungspaares läßt sich offenbar in die Bestimmungen zerlegen:

1. daß je zwei benachbarte reelle Wurzeln $w_h < w_{h+1}$ $(h = 1, 2, 3, \cdots, m-1)$ durch eine ungerade Zahl reeller Wurzeln α oder β getrennt sind,

2. daß eine Identität der oben charakterisierten Art vorhanden ist

$$-g_0 f(z) \equiv g_1 f_1(z) + g_2 f_2(z).$$

Der ersten Forderung genügt nach einem bekannten Satz von Rolle die aus der gegebenen durch einmalige Differentiation nach z abgeleitete Gleichung $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades

$$\frac{df(z)}{dz} = n a_0 z^{n-1} - (n-1) a_1 z^{n-2} + \cdots \pm a_{n-1} = f_{1,0}(z) = 0.$$

Die Ausführung der Division

$$\frac{nf(z)}{f_{1,0}(z)} = z + \frac{f_2(z)}{f_{1,0}(z)}$$

liefert

$$f_2(z) = -a_1 z^{n-1} + 2a_2 z^{n-2} - 3a_3 z^{n-3} + \cdots \pm n a_n = f_{0,1}(z),$$

und man erhält zwischen den ganzen rationalen Funktionen $f(z)$, $f_{1,0}(z), f_{0,1}(z)$ die Identität

$$nf(z) \equiv z f_{1,0}(z) + f_{0,1}(z).$$

Innerhalb jedes der Intervalle

$$0 < z < +\infty \text{ und } 0 > z > -\infty$$

zeigt diese aber die im Fundamentaltheoreme I vorausgesetzte Konstanz der Vorzeichen der drei Hilfsfunktionen

$$g_0 = -n,\ g_1 = z,\ g_2 = 1,$$

und es gelten daher für das eine wie für das andere Gebiet auch alle seine Konsequenzen, d. h. es bestehen die Sätze:

1. Je zwei benachbarte positive oder negative Wurzeln der Gleichung $f(z) = 0$ schließen eine ungerade Zahl entsprechender Wurzeln der anderen $f_{0,1}(z) = 0$ ein, und

2. die determinierenden Folgen der positiven und der negativen Wurzeln der Gleichungen $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades $f_{1,0}(z) = 0$ und

Digitized by Google

$f_{0,1}(z) = 0$ schränken resp. sämtliche positiven und sämtliche negativen Wurzeln der Gleichung n^{ten} Grades $f(z) = 0$ auf bestimmte außer einander liegende Intervalle ein.

Die Richtigkeit des ersten Satzes läßt sich auch direkt leicht nachweisen. — Zwei benachbarte Wurzeln gleichen Vorzeichens $w_\lambda < w_{\lambda+1}$ der Gleichung

$$f(z) = a_0 z^n - a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} - \cdots \pm a_n = 0$$

bestimmen nämlich ein Paar analoger Wurzeln $\frac{1}{w_{\lambda+1}} < \frac{1}{w_\lambda}$ der anderen

$$z'^n f\left(\frac{1}{z'}\right) = a_0 - a_1 z' + a_2 z'^2 - \cdots \pm a_n z'^n = F(z') = 0,$$

und diese schließen ihrerseits eine ungerade Zahl reeller Wurzeln $\frac{1}{\beta'_\lambda}, \frac{1}{\beta''_\lambda}, \frac{1}{\beta^{(\lambda)}_\lambda}$ der aus letzterer abgeleiteten Gleichung ein:

$$F'(z') = -a_1 + 2a_2 z' - 3a_3 z'^2 + \cdots \pm n a_n z'^{n-1} = 0.$$

Es liegen mithin die λ Wurzeln

$$\beta'_\lambda, \beta''_\lambda, \cdots \beta^{(\lambda)}_\lambda$$

der Gleichung $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades

$$z^{n-1} F\left(\frac{1}{z}\right) = -a_1 z^{n-1} + 2a_2 z^{n-2} - \cdots \pm n a_n = f_{0,1}(z) = 0$$

wie behauptet zwischen den Wurzeln w_λ und $w_{\lambda+1}$.

Im besonderen folgt mit Rücksicht auf die im negativen und im positiven Zahlgebiet vorhandenen kleinsten und größten Wurzeln $w_1 < w_\mu < 0 < w_{\mu+1} < w_m$ der Gleichung $f(z) = 0$ und die entsprechenden Wurzeln $\frac{1}{w_\mu} < \frac{1}{w_1} < 0 < \frac{1}{w_m} < \frac{1}{w_{\mu+1}}$ der anderen $F(z') = 0$, daß das Intervall

$$\frac{1}{w_1} < 0 < \frac{1}{w_m}$$

eine ungerade Zahl reeller Wurzeln von $F'(z') = 0$, und also das korrespondierende

$$w_1 > -\infty, \; +\infty > w_m$$

ebensoviele reelle Wurzeln der Gleichung $f_{0,1}(z) = 0$ enthält, während das Intervall

$$\frac{1}{w_\mu} > -\infty, \; +\infty > \frac{1}{w_{\mu+1}}$$

entweder auch nicht eine oder eine gerade Zahl von Wurzeln der Gleichung $F'(z') = 0$ und folglich das korrespondierende $w_\mu < 0 < w_{\mu+1}$ ebensoviele der anderen $f_{0,1}(z) = 0$ aufweist.

Digitized by Google

Aus letzterem Grunde gilt die den Funktionen $f(z)$ und $f_{0,1}(z)$ an der Stelle $z = 0$ zukommende Gleichheit der Vorzeichen

$$\operatorname{sgn} f(0) = \operatorname{sgn} f_{0,1}(0) = \operatorname{sgn} a_n$$

auch innerhalb des ganzen Bereiches

$$w_\mu + |\delta| < 0 < w_{\mu+1} - |\delta|$$
$$\lim \delta = 0,$$

und man hat für ein genügend kleines positives ε übereinstimmend die Beziehung:

$$\operatorname{sgn} f(w_{\mu+1} + \varepsilon) = \operatorname{sgn} f_{1,0}(w_{\mu+1} + \varepsilon) = -\operatorname{sgn} f_{0,1}(w_{\mu+1} + \varepsilon)$$

und

$$\operatorname{sgn} f(w_\mu - \varepsilon) = \operatorname{sgn}(w_\mu - \varepsilon) f_{1,0}(w_\mu - \varepsilon) = -\operatorname{sgn} f_{0,1}(w_\mu - \varepsilon).$$

Hierdurch werden aber die Annahmen, daß den Wurzeln $w_{\mu+1}$ und w_μ in den Intervallen

$$w_{\mu+1} < z < w_{\mu+2} \text{ und } w_\mu > z > w_{\mu-1}$$

zwei solche α_1' und $'\alpha_1$ der Gleichung $f_{1,0}(z) = 0$ benachbart seien, illusorisch. Denn diese würden an den Stellen

$$z = \alpha_1' + \varepsilon \text{ und } z = {}'\alpha_1 - \varepsilon$$

die mit der Identität

$$nf(z) \equiv z f_{1,0}(z) + f_{0,1}(z)$$

unvereinbaren Zeichenreihen bedingen

$$\operatorname{sgn} f(\alpha_1' + \varepsilon) = -\operatorname{sgn} f_{1,0}(\alpha_1' + \varepsilon) = -\operatorname{sgn} f_{0,1}(\alpha_1' + \varepsilon)$$

und

$$\operatorname{sgn} f({}'\alpha_1 - \varepsilon) = -\operatorname{sgn}({}'\alpha_1 - \varepsilon) f_{1,0}({}'\alpha_1 - \varepsilon) = -\operatorname{sgn} f_{0,1}({}'\alpha_1 - \varepsilon).$$

Damit ist die Reihenfolge der Wurzeln α, β nicht nur zwischen den Wurzelpaaren

$$w_{\mu+1} < w_{\mu+2} \text{ und } w_\mu > w_{\mu-1},$$

sondern auch zwischen allen weiteren Paaren benachbarter Wurzeln

$$w_k < z < w_{k+1} \text{ und } w_i > z > w_{i-1}$$
$$k = \mu+1, \mu+2, \ldots, m \qquad i = \mu, \mu-1, \ldots, 2$$

definitiv festgestellt, und zwar in den typischen Formen

$$w_k < \beta < [\cdots] < \alpha < w_{k+1} \text{ und } w_i > \beta > [\cdots] > \alpha > w_{i-1}.$$

Was schließlich die Anordnungen der Wurzeln α, β in den noch übrigen zwei Intervallen anlangt

$$1.\ w_\mu < 0 < w_{\mu+1} \text{ und } 2.\ w_1 > -\infty,\ +\infty > w_m,$$

Digitized by Google

so sind diese durch den ersten Hauptsatz typisch bestimmt und gemäß den unterschiedlichen Fällen

$$1.\ \operatorname{sgn} a_{n-1} = \pm \operatorname{sgn} a_n \text{ und } 2.\ \operatorname{sgn} a_1 = \pm \operatorname{sgn} a_0$$

dargestellt durch:

$$1a)\ \operatorname{sgn} a_{n-1} = \operatorname{sgn} a_n \qquad 2a)\ \operatorname{sgn} a_1 = \operatorname{sgn} a_0$$

$$w_\mu < \alpha < [\cdots] < \alpha < 0 < \alpha < \alpha < [\cdots] < \alpha < w_{\mu+1};$$

$$w_1 > \beta > [\cdots] > \beta > \beta > -\infty, \quad +\infty > \beta > [\cdots] > \beta > w_m.$$

$$1b)\ \operatorname{sgn} a_{n-1} = -\operatorname{sgn} a_n \qquad 2b)\ \operatorname{sgn} a_1 = -\operatorname{sgn} a_0$$

$$w_\mu < \alpha < [\cdots] < \alpha < \alpha < 0 < \alpha < [\cdots] < \alpha < w_{\mu+1};$$

$$w_1 > \beta\,[\cdots] > \beta > -\infty, +\infty > \beta > \beta > [\cdots] > \beta > w_m.$$

Nunmehr kann man zusammenfassend als Spezialfall der Theoreme II und III die bereits a. a. O. ohne Beweis aufgestellten jetzt wohlbegründeten Sätze formulieren:

Theorem IV: Besitzt eine Gleichung n^{ten} Grades $f(z) = 0$

1. m reelle und durchweg positive oder negative Wurzeln

$$0 \leqq w_1 \leqq w_2 \leqq \cdots \leqq w_m,$$

2. μ negative und $m - \mu$ positive Wurzeln

$$w_1 < w_2 < \cdots < w_\mu < 0 < w_{\mu+1} < w_{\mu+2} < \cdots < w_m,$$

so ordnen sich diese mit den reellen Wurzeln der beiden abgeleiteten Gleichungen $f_{1,0}(z) = 0$ und $f_{0,1}(z) = 0$, nämlich mit respektive

$$\alpha_1,\ \alpha_2, \cdots,\ \alpha_p \text{ und } \beta_1,\ \beta_2, \cdots,\ \beta_q$$

allemal zu einer Folge des Typus:

1. $0 \leqq \alpha' \leqq [\cdot\cdot] \leqq \alpha'' \leqq w_1 \leqq \bar{\beta}_1 \leqq [\cdot\cdot] \leqq \bar{\alpha}_1 \leqq w_2 \leqq \bar{\beta}_2 \leqq [\cdot\cdot] \leqq \bar{\alpha}_2 \leqq w_3$
$\leqq \cdots \leqq w_{m-1} \leqq \bar{\beta}_{m-1} \leqq [\cdot\cdot] \leqq \bar{\alpha}_{m-1} \leqq w_m \leqq \beta' \leqq [\cdot\cdot] \leqq \beta''$ [1]);

2. $\overbrace{-\infty, \bar{\beta}_1}' < \beta_1 < [\cdot\cdot] < ' \beta_2 < w_1 < \bar{\alpha}_1 < [\cdot\cdot] < \bar{\beta}_2 < w_2 < \bar{\alpha}_2$
$< [\cdots] < \bar{\beta}_3 < w_3 < \cdots < w_{\mu-1} < \bar{\alpha}_{\mu-1} < [\cdot\cdot] < \bar{\beta}_\mu < w_\mu$
$< w_\mu < ' \alpha_1 < [\cdot\cdot] < ' \alpha_2 < 0, \widetilde{\bar{\alpha}_\mu < \alpha_1'} < [\cdot\cdot] < \alpha_2' <$
$< w_{\mu+1} < \bar{\beta}_{\mu+1} < [\cdot\cdot] < \bar{\alpha}_{\mu+1} < w_{\mu+2} < \cdots < w_{m-1} < \bar{\beta}_{m-1} <$
$[\cdots] < \bar{\alpha}_{m-1} < w_m < \beta_1' < [\cdot\cdot] < \beta_2' < \overbrace{+\infty, \bar{\beta}_1}$,

1) Die veränderten Indizierungen der α und β dienen lediglich dazu, das Verteilungsgesetz der Wurzeln stärker hervorzuheben.

Digitized by Google

wo jede *eingeklammerte* Reihe $[\cdots, \alpha, \alpha, \cdots, \beta, \beta, \cdots]$ eine *neutrale* Folge von Wurzeln α, β darstellt.

Und umgekehrt:

V. Ordnet man die reellen Wurzeln

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p \text{ und } \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_q$$

der beiden abgeleiteten Gleichungen $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades $f_{1,0}(z) = 0$ und $f_{0,1}(z) = 0$ der Größe nach in eine einzige aufsteigende Folge, und *streicht* man in dieser sukzessive *alle* ursprünglich vorhandenen und nachträglich hervortretenden *Paare benachbarter, gleichnamiger Wurzeln, so resultiert schließlich notwendig eine der Anordnungen:*

1. — Bei nur positiven oder negativen Wurzeln

$$0 \leqq \bar{\beta}_1 \leqq \bar{\alpha}_1 \leqq \bar{\beta}_2 \leqq \bar{\alpha}_2 \leqq \cdots \leqq \bar{\beta}_{m-1} \leqq \bar{\alpha}_{m-1},$$

1a) — bei geradem n —

$$0 \leqq \alpha_1 \leqq \beta_1 \leqq \pm\infty$$

1b) — bei ungeradem n —

$$0 \leqq \pm\infty.$$

2. — Bei positiven und negativen Wurzeln —

$$\overbrace{-\infty, \bar{\beta}_1} < \bar{\alpha}_1 < \bar{\beta}_2 < \bar{\alpha}_2 < \bar{\beta}_3 < \cdots < \bar{\alpha}_{\mu-1} < \bar{\beta}_\mu < \widetilde{0, \bar{\alpha}_\mu}$$
$$< \bar{\beta}_{\mu+1} < \bar{\alpha}_{\mu+1} < \cdots < \bar{\beta}_{m-1} < \bar{\alpha}_{m-1} < \overbrace{+\infty, \bar{\beta}_1}.$$

Dann aber besitzt die Stammgleichung n^{ten} Grades

$$f(z) = 0$$

1. *genau m reelle und positive oder negative Wurzeln*

$$0 \leqq w_1 \leqq \bar{\beta}_1 \leqq \bar{\alpha}_1 \leqq w_2 \leqq \bar{\beta}_2 \leqq \bar{\alpha}_2 \leqq w_3 \leqq \bar{\beta}_3 \leqq \cdots \leqq \bar{\alpha}_{m-2} \leqq w_{m-1}$$
$$\leqq \bar{\beta}_{m-1} \leqq \bar{\alpha}_{m-1} \leqq w_m \leqq \pm\infty,$$

1a) *auch nicht eine* 1b) *eine einzige*

reelle Wurzel;

2. *genau μ negative und $m-\mu$ positive Wurzeln*

$$\overbrace{-\infty, \bar{\beta}_1} < w_1 < \bar{\alpha}_1 < \bar{\beta}_2 < w_2 < \bar{\alpha}_2 < \cdots < \bar{\beta}_\mu < w_\mu < \widetilde{0, \bar{\alpha}_\mu}$$
$$< \widetilde{0, \bar{\alpha}_\mu} < w_{\mu+1} < \bar{\beta}_{\mu+1} < \bar{\alpha}_{\mu+1} < w_{\mu+2} < \bar{\beta}_{\mu+2} < \cdots < \bar{\alpha}_{m-2} < w_{m-1}$$
$$< \bar{\beta}_{m-1} < \bar{\alpha}_{m-1} < w_m < \overbrace{+\infty, \bar{\beta}_1}.$$

Halle, den 20. Oktober 1905.

Digitized by Google

Zur Geometrie auf der Kugel.

Von R. Heger in Dresden.

I.

Wie Lexell[1]) gezeigt hat, werden die Hauptkreise eines Punktes P einer Kugel von einem Nebenkreise K so geschnitten, daß die Produkte der Tangenten der halben Bogen, die auf einem Hauptkreise von P bis an K reichen, einander gleich sind. Bei Gudermann[2]) tritt derselbe Satz in zwei bemerkenswerten anderen Formen auf; wenn ein Hauptkreis von P den K in A und B schneidet, so wird gezeigt, daß

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(PA+PB)}{\cos\frac{1}{2}(PA-PB)}, \text{ bezw. } \frac{\sin PA\cdot\sin PB}{\cos^2\frac{1}{2}AB}$$

von beständiger Größe sind. Zwischen den drei beständigen Größen findet der Zusammenhang statt

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(PA+PB)}{\cos\frac{1}{2}(PA-PB)}=\frac{1-\tan\frac{1}{2}PA\cdot\tan\frac{1}{2}PB}{1+\tan\frac{1}{2}PA\cdot\tan\frac{1}{2}PB},$$

$$\frac{\sin PA\cdot\sin PB}{\cos^2\frac{1}{2}AB}=1-\frac{\cos^2\frac{1}{2}(PA+PB)}{\cos^2\frac{1}{2}(PA-PB)}=\frac{4\tan\frac{1}{2}PA\cdot\tan\frac{1}{2}PB}{(1+\tan\frac{1}{2}PA\cdot\tan\frac{1}{2}PB)^2}.$$

Sind A' und B' die Gegenpunkte von A und B, also die Schnittpunkte des Hauptkreises PA mit dem Gegenkreise K' des K, so ist

$$\tan\tfrac{1}{2}PA'\cdot\tan\tfrac{1}{2}PB'=\frac{1}{\tan\frac{1}{2}PA\cdot\tan\frac{1}{2}PB},$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(PA'+PB')}{\cos\frac{1}{2}(PA'-PB')}=-\frac{\cos\frac{1}{2}(PA+PB)}{\cos\frac{1}{2}(PA-PB)},$$

$$\frac{\sin PA\cdot\sin PB}{\cos^2\frac{1}{2}AB}=\frac{\sin PA'\cdot\sin PB'}{\cos^2\frac{1}{2}A'B'}.$$

Im Hinblick auf die ebene Geometrie wird das Produkt $\tan\frac{1}{2}PA\cdot\tan\frac{1}{2}PB$ als die *sphärische Potenz* von P für K bezeichnet[3]); diese Bezeichnung ist aber nicht unter allen Umständen zweckmäßig. Denn wenn man bei geometrischen Untersuchungen auf der Kugel jede Figur mit ihrer Gegenfigur zusammen als eine Figureneinheit auffaßt, so wird man den Namen Potenz nur für eine Größe wählen, die für

1) Lexell, Acta Petrop. 1782, I, S. 65; vergl. auch Baltzer, Elem. d. Math., 2. Bd., 6. Aufl., Leipzig 1883, S. 327.

2) Gudermann, Nied. Sphärik, Münster 1835, § 255.

3) Baltzer, a. a. O.

Digitized by Google

K und K' in gleicher Weise gilt. Es empfiehlt sich alsdann, den zweiten Gudermannschen Quotienten

$$\frac{\sin PA \cdot \sin PB}{\cos^2 \frac{1}{2} AB}$$

mit dem Namen „Potenz" zu bezeichnen; man könnte übrigens diesen Namen auch für jede andere symmetrische Funktion von $\tan \frac{1}{2} PA \cdot \tan \frac{1}{2} PB$ und dem reziproken Produkte verwenden; die von Gudermann angegebene hat aber vor anderen eine einfache geometrische Deutung voraus.

Als Potenz eines Punktes P für einen Nebenkreis K verstehen wir also das Produkt der Sinus der auf einem Hauptkreise des P an den K reichenden Bogen, geteilt durch den Quadratcosinus des halben, innerhalb des K auf dem Hauptkreise enthaltenen Bogens. Die Potenz ist dieselbe für die Gegenkreise K und K'.

Wenn ein Bogen auf einem Hauptkreise des P bis an K, der andere bis an K' gerechnet wird, und zwar so, daß die Punkte auf K und K' nicht Gegenpunkte sind, so ist das *Verhältnis der Tangenten der Hälften dieser Bogen von beständiger Größe.* Ersetzt man in der Potenz B durch B', so erhält man

$$\frac{\sin PA \cdot \sin (180° - PB')}{\cos^2 \frac{1}{2} (180° - AB')} = \frac{\sin PA \cdot \sin PB'}{\sin^2 \frac{1}{2} AB'}.$$

Einem Nebenkreise als Punktgebilde entspricht der Kreis als Ort der Hauptkreise, die mit einem gegebenen Hauptkreise einen bestimmten Winkel bilden. Ist P ein Punkt eines Hauptkreises H, sind ferner A und B die Hauptkreise, die P mit einem Kreise $\mathfrak{K}$ gemein hat, und wird der von A und B begrenzte Kugelwinkel, der $\mathfrak{K}$ *nicht* enthält, von H in die Teile HA und HB zerlegt, so gilt der Satz, daß

$$\tan \tfrac{1}{2} HA \cdot \tan \tfrac{1}{2} HB,$$

und damit zugleich

$$\frac{\cos \frac{1}{2} (HA + HB)}{\cos \frac{1}{2} (HA - HB)}, \quad \text{sowie} \quad \frac{\sin HA \cdot \sin HB}{\cos^2 \frac{1}{2} AB}$$

für alle Punkte des H von beständiger Größe sind.[1]) Wir wollen die letzte Zahl als die *sphärische Potenz des Hauptkreises H für den*

1) Gudermann, Niedere Sphärik § 296 und 27. Auf S. 228 muß die dritte Zeile von unten lauten

$$\text{„}\frac{\sin u}{\sin r} = \frac{\sin \frac{1}{2} (\beta + \alpha)}{\sin \frac{1}{2} (\beta - \alpha)} \text{ und } \frac{\sin u}{\sin r} = \frac{\sin \frac{1}{2} (\beta' + \alpha')}{\sin \frac{1}{2} (\beta' - \alpha')}, \text{ also}\text{“};$$

ferner ist in § 297, Formel 2 „$\sin^2 \frac{1}{2} (\beta - \alpha)$" statt der ersten Potenz zu setzen.

Digitized by Google

Kreis $\mathfrak{K}$ bezeichnen; die Potenzen von H für die Gegenkreise $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ sind gleich.

Wird der Koordinatenbestimmung für Punkte und Hauptkreise auf der Kugel ein dreirechtwinkliges Dreieck XYZ zugrunde gelegt, und gelten als Koordinaten x, y, z eines Punktes P die *Sinus der sphärischen Abstände* des P von den Seiten YZ, ZX, XY, und als Koordinaten eines T die seines Poles, so ist die Gleichung des Kreises, der die Mitte abc und den sphärischen Halbmesser $\mathfrak{r}$ hat,

$$k \equiv ax + by + cz - r' = 0.^{1})$$

Der Gegenkreis hat die Gleichung

$$k' \equiv ax + by + cz + r' = 0.$$

Ist l der sphärische Abstand eines beliebigen Kugelpunktes P von der Mitte M des K, sind ferner, wie oben, A und B die Schnittpunkte irgend eines Hauptkreises des P mit dem K, so ist (Baltzer, a. a. O. S. 327)

$$\tan \tfrac{1}{2} PA \cdot \tan \tfrac{1}{2} PB = \frac{r' - l'}{r' + l'}.$$

Da nun

$$l' = ax + by + cz,$$

so hat man

$$\tan \tfrac{1}{2} PA \cdot \tan \tfrac{1}{2} PB = -\frac{k}{k'}.$$

Die Potenz p von P für K und K' ist daher

$$p = -\frac{4kk'}{(k-k')^2} = -\frac{(ax+by+cz)^2 - r'^2}{r'^2}.$$

Der Ort der Punkte gleicher Potenzen für die Kreise K und K_1 hat daher die Gleichung

$$\frac{(ax+by+cz)^2 - r'^2}{r'^2} = \frac{(a_1x+b_1y+c_1z)^2 - r_1'^2}{r_1'^2},$$

oder

$$\frac{1}{r'^2}(ax+by+cz)^2 - \frac{1}{r_1'^2}(a_1x+b_1y+c_1z)^2 = 0.$$

Faßt man die Gleichungen

$$k = 0,\ k' = 0$$

in die eine homogene Gleichung zusammen

$$K \equiv (ax+by+cz)^2 - r'^2(x^2+y^2+z^2) = 0,$$

1) Hauptkreisbogen und Winkel sphärischer Figuren sollen mit deutschen Buchstaben, ihre trigonometrischen Funktionen mit lateinischen bezeichnet und durch Akzente unterschieden werden:

$$\sin \mathfrak{r} = r,\ \cos \mathfrak{r} = r',\ \tan \mathfrak{r} = r''.$$

Digitized by Google

so erhält man für den *Ort der Punkte gleicher Potenzen*

$$L \equiv \frac{1}{r'^2} K - \frac{1}{r_1'^2} K_1 = 0.$$

Diese Gleichung stellt zwei Hauptkreise dar, die auf dem Hauptkreise der Mitten von K und K_1 senkrecht stehen und mit den beiden zu K und K_1 parallelen Hauptkreisen

$$ax + by + cz = 0 \quad \text{und} \quad a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0$$

in Harmonie sind.

Für je zwei der drei Kreispaare (oder kürzer Kreise)

$$K_1 = 0, \quad K_2 = 0, \quad K_3 = 0$$

sind die Gleichungen der Örter gleicher Punktpotenzen

$$L_3 \equiv \frac{1}{r_1'^2} K_1 - \frac{1}{r_2'^2} K_2 = 0,$$

$$L_1 \equiv \frac{1}{r_2'^2} K_2 - \frac{1}{r_3'^2} K_3 = 0,$$

$$L_2 \equiv \frac{1}{r_3'^2} K_3 - \frac{1}{r_1'^2} K_1 = 0,$$

woraus folgt

$$L_1 + L_2 + L_3 \equiv 0.$$

Dies ergibt: *Die drei Paare von potenzhaltenden Hauptkreisen für je zwei von drei Kreisen schneiden sich viermal zu je dreien in einem Punkte; diese vier Punkte haben für die drei Kreise gleiche Potenzen.*

Sind ferner abc die Koordinaten eines Grundkreises H, uvw die eines veränderlichen Hauptkreises T, so ist die Gleichung des Ortes der Hauptkreise, die mit H einen gegebenen Winkel $\mathfrak{r}$ bilden,

$$\mathfrak{K} \equiv (au + bv + cw)^2 - r'^2 = 0.$$

Die Koordinaten eines Hauptkreises, der für die Kreise

$$\mathfrak{K} = 0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{K}_1 = 0$$

gleiche Potenzen hat, erfüllen die Gleichung

$$\mathfrak{L} \equiv \frac{1}{r'^2} \mathfrak{K} - \frac{1}{r_1'^2} \mathfrak{K}_1 = 0.$$

Der Ort der Hauptkreise gleicher Potenzen für zwei Kreise besteht also aus zwei Punkten.

Diese Punkte, in denen sich die beiden äußeren und die beiden inneren gemeinsamen Tangenten von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$ schneiden, werden von

Digitized by Google

Gudermann (a. a. O. § 319) im Hinblicke auf die ebene Geometrie als Symmetralpunkte bezeichnet.

Wir ziehen die Bezeichnung *„potenzhaltende Punkte"* oder kürzer *„Potenzpunkte"* vor.

Die Gleichungen für die Potenzpunkte je zweier der drei Kreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$ sind

$$\mathfrak{L}_3 \equiv \frac{1}{r_1'^2}\mathfrak{K}_1 - \frac{1}{r_2'^2}\mathfrak{K}_2 = 0,$$

$$\mathfrak{L}_1 \equiv \frac{1}{r_2'^2}\mathfrak{K}_2 - \frac{1}{r_3'^2}\mathfrak{K}_3 = 0,$$

$$\mathfrak{L}_2 \equiv \frac{1}{r_3'^2}\mathfrak{K}_3 - \frac{1}{r_1'^2}\mathfrak{K}_1 = 0.$$

Aus der Identität

$$\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2 + \mathfrak{L}_3 \equiv 0$$

folgt: *Die drei Potenzpunktpaare je zweier von drei Kreisen liegen viermal zu je dreien auf einem Hauptkreise; diese drei Hauptkreise haben gleiche Potenzen für die drei Kreise.*

Diese vier potenzhaltenden Hauptkreise bezeichnet Gudermann (a. a. O. § 322) als *Symmetralen.*

Aus der Potenzeigenschaft der Schnittpunkte $\mathfrak{L}$ der inneren und der äußeren Tangenten zweier Kreise ergeben sich einige Sätze als unmittelbare, keines Beweises mehr bedürftige Folgerungen. Z. B. Jeder Hauptkreis T eines der Punkte $\mathfrak{L}$ schneidet $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$ unter gleichen Winkeln. Wenn ein Kreis $\mathfrak{R}$ die Kreise $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$ berührt, so geht der Hauptkreis der Berührungspunkte durch einen der Punkte $\mathfrak{L}$.

Diese beiden Sätze entsprechen dual den beiden folgenden: Von jedem Punkte eines der Hauptkreise von L aus reichen an die Kreise K und K_1 gleich lange Tangenten. Wenn ein Kreis R die Kreise K und K_1 berührt, so schneiden sich die gemeinsamen Tangenten auf einem Hauptkreise von L.

Einige Sätze, für die Gudermann Beweise beibringt, bedürfen nach der hier gegebenen Darstellung keines Beweises. Bezeichnet man zwei Kreise als reziprok, wenn die Punkte des einen die Pole der den anderen umhüllenden Hauptkreise sind, so folgt (Gudermann a. a. O. § 323): Die Potenzpunkte zweier Kreise sind die Pole der Potenzhauptkreise der beiden reziproken Kreise. Ebenso folgt (Gudermann a. a. O. § 324): Die vier Punkte gleicher Potenz für drei Kreise sind die Pole der Hauptkreise gleicher Potenz für die reziproken Kreise.

Die Zusammenfassung von Kreis und Gegenkreis zu einer Einheit und die Ausdehnung des Potenzbegriffs auf Hauptkreise rückt die *Be-*

Digitized by Google

rührungsaufgaben auf der Kugel in eine andere Beleuchtung; einige darauf bezügliche Bemerkungen dürften auch an dieser Stelle nicht überflüssig sein.

Sind zwei Gegenpunktpaare und ein Hauptkreis T gegeben, und liegen zwei Punkte A und B, die nicht Gegenpunkte sind, auf derselben Seite von T, so enthält ein durch die gegebenen Stücke bestimmter Kreis A und B, der Gegenkreis A' und B'; und wenn zwei Hauptkreise T und U und ein Punkt A gegeben sind, so kann eine Lösung nur in dem Kugelwinkel TU liegen, der A enthält. In jedem Falle kennt man eine Symmetrieachse der Lösung: das sphärische Mittellot von AB, bez. die Mittellinie des Kugelwinkels TU, und damit kennt man noch einen Hauptkreis U, bez. noch einen Punkt B, nämlich die symmetrisch entsprechenden zu T bez. A. Für die nun entstandene Aufgabe: Einen Kreis zu zeichnen, der zwei Punkte A und B enthält und zwei Hauptkreise T und U berührt, wenn A und B mit T und U gegen denselben Hauptkreis S symmetrisch liegen, gibt es zwei Lösungswege, die einander dual entsprechen.

Bestimme den Schnittpunkt C von AB und T. Zeichne einen beliebigen Kreis K durch A und B. Zeichne von C aus eine sphärische Tangente CD an K. Mache auf T die Bogen $CE_1 = CE_2 = CD$. E_1 und E_2 sind die Punkte, in denen T von den Lösungen berührt wird.

Bestimme den Hauptkreis V der Punkte TU und A. Zeichne einen beliebigen Kreis K, der T und U berührt. Zeichne im Schnitt von V und K eine sphärische Tangente an K. Zeichne in A die Hauptkreise W_1 und W_2, die mit V denselben Winkel bilden, unter dem K und V einander schneiden. W_1 und W_2 sind die Hauptkreise, die die Lösungen in A berühren.

Derselbe Dualismus gilt natürlich auch in der Ebene. Der Umstand, daß die für den Unterricht bestimmten Darstellungen der Planimetrie sich meist durch Ausschluß trigonometrischer Hilfsmittel ganz ohne Not beschränken, bedingt es, daß der Begriff der Potenz einer Geraden für einen Kreis (Gudermann a. a. O. § 297, 2. Anmerkung) dort noch keinen Eingang gefunden hat, und daher die rechts stehende Lösungsweise unter einem ganz anderen Gesichtspunkte, nämlich als Anwendung der Methode der ähnlichen Abbildung, behandelt zu werden pflegt.

Die beiden Aufgaben: *Einen Kreis zu zeichnen, der durch einen Kreis K und außerdem durch zwei Punkte A und B, oder durch zwei Hauptkreise T und U bestimmt ist*, entsprechen einander ebenfalls dual,

Digitized by Google

und lassen unter Verwendung der Punkt- und Hauptkreispotenzen dual entsprechende Lösungen zu.

Zeichne: Einen Kreis R durch A und B; einen Kreis S durch A und B'; den vollständigen Ort L der Punkte gleicher Potenzen für R und KK'; denselben Ort N für S und KK'; ferner Hauptkreise durch die Schnittpunkte des Hauptkreises AB mit den Hauptkreispaaren L und N, die den in Frage kommenden der Kreise K und K' berühren.

Die acht Berührungspunkte sind die Punkte, in denen K und K' von den acht Lösungen der Aufgabe berührt werden.

Zeichne: Zwei Kreise R und S, die zwei von T und U begrenzten Nebenwinkeln eingeschrieben sind; den vollständigen Ort L der Hauptkreise gleicher Potenzen für R und KK'; denselben Ort N für S und KK'; ferner die Hauptkreise des Punktes TU nach den Punktpaaren L und N.

Die Schnittpunkte dieser vier Hauptkreise mit dem in Frage kommenden der Kreise K und K' sind die Punkte, in denen diese Kreise von den acht Lösungen der Aufgabe berührt werden.

(Fortsetzung folgt.)

Über sternförmige Polygone, welche mit der Teilung der elliptischen Funktionen im Zusammenhange stehen.

Von P. Kokott in Neisse.

Von der Peripherie des kleineren zweier konzentrischen Kreise mache man einen Schritt gleich a nach dem größeren, von da aus zurück zum kleineren u. s. f.; es entsteht eine sternförmige Figur, die sich bei günstiger Wahl der Größen R, r und a schließen wird, und zwar ist es offenbar, daß, wenn die Figur sich einmal schließt, sie immer geschlossen ist, von welcher Stelle man auch ausgeht. Läßt man jetzt die Bedingung fallen, daß die Kreise konzentrisch sind, so entsteht eine Figur, welche ähnliche Eigenschaften in bezug auf die elliptischen Funktionen besitzt, wie sie der regelmäßige Stern in bezug auf die trigonometrischen Funktionen hat.

Herr Arnold Emch gibt in einer Arbeit, die von der University of Colorado im Dezember 1902 herausgegeben ist, für den Fall eines Drei- und Viersternes die Lösung, wenn a gleich dem Radius des kleineren Kreises gleich ist.

Im folgenden will ich das Problem in anderer Weise lösen und die Schließungsbedingungen bis zum Sechs- und Achtstern entwickeln; es

Digitized by Google

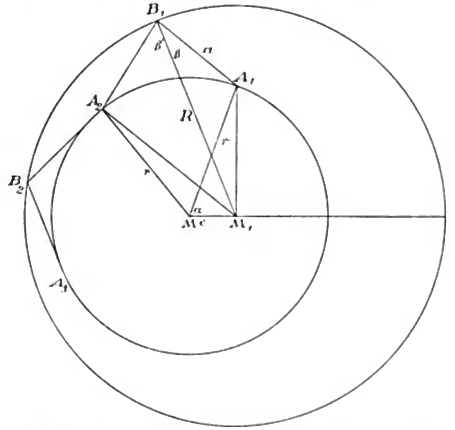
wird sich aus der Behandlung auch der algebraische Zusammenhang der Figuren mit den Ponceletschen Polygonen ergeben, auf den auch Herr Emch in geometrischem Sinne aufmerksam gemacht hat.

Drückt man A_1M_1 in doppelter Weise aus den Dreiecken A_1M_1M und $M_1A_1B_1$ nach dem Kosinussatze aus, so erhält man

$$2Ra\cos\beta = R^2 + a^2 - r^2 - e^2 + 2re\cos\alpha.$$

Ebenso

$$2Ra\cos\beta' = R^2 + a^2 - r^2 - e^2 + 2re\cos\alpha' \quad (\alpha' \text{ bestimmt } A_2).$$



Daraus folgt $Ra(\cos\beta' - \cos\beta) = re(\cos\alpha' - \cos\alpha)$ oder

$$Ra\sin\frac{\beta'+\beta}{2}\sin\frac{\beta'-\beta}{2} = re\sin\frac{\alpha'+\alpha}{2}\sin\frac{\alpha'-\alpha}{2}.$$

Nun ist aber aus den gleichschenkligen Dreiecken MA_1A_2 und $B_1A_1A_2$ erkennbar, daß $a\sin\frac{\beta'+\beta}{2} = r\sin\frac{\alpha'-\alpha}{2}$ ist, also ist auch $R\sin\frac{\beta'-\beta}{2} = e\sin\frac{\alpha'+\alpha}{2}$. Multipliziert man die beiden ersten Gleichungen, so entsteht

$$4R^2a^2\cos\beta\cos\beta' = G + HS + KP.$$

Hierin sind G, H und K Konstanten, $P = \cos\alpha'\cos\alpha$ und $S = \cos\alpha' + \cos\alpha$. Drückt man noch $2\cos\beta\cos\beta' = \cos(\beta'+\beta) +$

Digitized by Google

$\cos(\beta' - \beta)$ durch $\cos(\alpha' - \alpha)$ und $\cos(\alpha' + \alpha)$ aus, und setzt man $\sin\alpha' \sin\alpha = P'$, so erhält man

$$AP + BP' + CS = D, \tag{1}$$

wo $A = 2(R^2r^2 + a^2e^2 - 2r^2e^2)$, $B = 2(R^2r^2 - a^2e^2)$,

$C = -2re(R^2 - e^2 + a^2 - r^2)$, $D = (R^2 - e^2)^2 + (a^2 - r^2)^2 + 2r^2e^2 - 2a^2R^2$.

Die Gleichung (1) stellt die Abhängigkeit des Winkels α' von α dar und kann mit den elliptischen Funktionen in Zusammenhang gebracht werden, wenn es gelingt, den Koeffizienten von S zum Verschwinden zu bringen. Es soll nun gezeigt werden, daß dies immer möglich ist. Setzt man nämlich

$$\cos\alpha = \frac{\lambda - \cos\varphi}{\lambda\cos\varphi - 1}, \quad \cos\alpha' = \frac{\lambda - \cos\varphi'}{\lambda\cos\varphi' - 1}, \tag{2}$$

so geht die Gleichung (1) über in

$$\Pi(A - 2C\lambda - D\lambda^2) + \Pi' B(1 - \lambda^2) + \Sigma(C\lambda^2 - (A - D)\lambda + C) = D + 2C\lambda - A\lambda^2.$$

Hierin ist $\Pi = \cos\varphi\cos\varphi'$, $\Pi' = \sin\varphi\sin\varphi'$ und $\Sigma = \cos\varphi + \cos\varphi'$. Über die noch unbestimmte Größe λ verfügen wir so, daß

$$\lambda^2 - \frac{A - D}{C}\lambda + 1 = 0 \tag{3}$$

ist. Wir erhalten dann

$$\cos\varphi\cos\varphi' + \frac{B}{A - C\lambda}\sin\varphi\sin\varphi' = \frac{C\lambda + D}{A - C\lambda}. \tag{4}$$

Setzt man jetzt

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{B}{A - C\lambda} = \Delta(\omega, \varkappa), \quad \frac{C\lambda + D}{A - C\lambda} = \cos\omega, \\ &\varkappa^2 = \frac{(A - C\cos\omega)^2 - B^2}{(A + D)(A - D - 2C\lambda)} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{-A^2 + 2B^2 + 2C^2 - D^2}{(A + D)\sqrt{(A - D)^2 - 4C^2}}\right), \end{aligned}\right. \tag{5}$$

so entspricht (4) genau der Formel

$$\operatorname{cn} u \operatorname{cn} v + \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn}(u - v) = \operatorname{cn}(u - v),$$

und wir sehen daraus, daß die Differenz der Argumente, durch welche φ und φ' und damit auch α und α' bestimmt sind, konstant ist. Wir bezeichnen diese Konstante mit h. Aus der Gleichung (2) folgt

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\sqrt{\frac{1 + \lambda}{1 - \lambda}}. \tag{6}$$

Die Transformation ist also in allen Teilen reell, wenn $\lambda < 1$ ist. Die Gleichung (3) zeigt, daß eine Wurzel λ immer kleiner als Eins ist; hierbei muß vorausgesetzt werden, daß $4C^2 < (A - D)^2$ sei.

Gehen wir nun von irgend einem Punkte A_1, dessen Argument u ist, aus, so ist A_2 durch $u + h$, A_3 durch $u + 2h$, A_{n+1} durch

Digitized by Google

$u + nh$ bestimmt. Soll nun der letzte Punkt mit A_1 zusammenfallen, so muß $nh = 4K$ sein, wo $K = \int_0^1 \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$ ist. Daraus folgt, daß es gleichgültig ist, an welcher Stelle man anfängt, denn die Schließungsbedingung enthält nur die Konstante des Problems.

Eliminiert man in derselben Weise die Winkel α, so erhält man eine Gleichung für β' und β, welche dieselbe Form wie (1) hat. Die Koeffizienten dieser Gleichung unterscheiden sich nur dadurch, daß Ra durch re zu ersetzen ist, während alles bis auf das Zeichen des Koeffizienten von $\sin\beta \sin\beta'$ unverändert ist. Daraus ergibt sich, daß für die Winkel β die Beziehung $u' + v' = h'$ gilt.

Wir gehen nun daran, die Bedingungen des Schließens in Funktion der Größen R, r, e und a selbst anzugeben, und untersuchen zuerst das Sternviereck, das auf der Peripherie des kleinen und des großen Kreises je 4 Ecken besitzt. Da h dann den Wert K annimmt und $\operatorname{cn} K = 0$ ist, so erhalten wir entsprechend den Gleichungen (5): $-C\lambda = D$. Setzt man diesen Wert in (3) ein, so entsteht $C^2 + AD = 0$. Für das Dreieck ist die Gleichung zu benützen

$$\operatorname{cn} \tfrac{4}{3} K + \frac{\operatorname{cn} \frac{4}{3} K}{\operatorname{dn} \frac{4}{3} K} = -1$$

d. h.

$$C^2 + AB + AD + BC = 0.$$

Für das Sechseck ergibt die Elimination von λ aus der Gleichung (3) in Verbindung mit $\operatorname{cn} \frac{2}{3} K + \frac{\operatorname{cn} \frac{2}{3} K}{\operatorname{dn} \frac{2}{3} K} = 1$, die mit $\frac{C\lambda + D}{A - C\lambda} + \frac{C\lambda + D}{B} = 1$ identisch ist, $(AD + C^2)^2 = B^2((A - D)^2 - 4C^2)$.

In ähnlicher Weise hat man die Bedingungen für höhere Vielecke zu bilden. Betrachtet man die Konstanten der Gleichung (1) genauer, so sieht man, daß dieselben eine sehr einfache Gestalt annehmen, wenn $a = r$ gesetzt wird. Es wird nämlich $A = 2r^2$; $B = 2r^2$; $C = -2rc$; $D = R^2 - e^2 - 2r^2$, da durch den Faktor $R^2 - e^2$ gekürzt werden kann. Man erhält dann für das Dreieck $r = R$, für das Viereck $2r^2 = R^2 + e^2$, für das Sechseck $r^2(3r^2 - R^2) = e^2(R^2 + r^2)$, endlich für das Achteck $(R^2 - e^2)\{(2r + e)^2 - R^2\} \cdot \{(2r - e)^2 - R^2\} = (R^2 + e^2 - 2r^2)^2$. Die Größe e ist willkürlich, jedoch der Bedingung unterworfen, daß $2r - e > R$ ist.

Neisse, im September 1907.

Digitized by Google

Systeme korrelativer Bündel, welche eine gegebene F^2 erzeugen.

Von Wolfgang Vogt in Karlsruhe.

Ein umfassender Zyklus von Arbeiten der Herren Sturm, Hirst, Schubert[1]) beschäftigt sich mit der Frage nach der Anzahl projektiv bezogener Gebilde erster, zweiter und dritter Stufe, welche gewisse vorgegebene Bedingungen erfüllen. Die Bedingungen zerfallen in Lagebedingungen für die Träger und in Projektivitätsbedingungen. Die letzteren bestehen in Paaren konjugierter Elemente, das sind solche, die mit entsprechenden Elementen der gesuchten Projektivität inzident sein sollen.

Die vorliegende Arbeit untersucht Systeme von korrelativen Bündeln, welche eine gegebene Fläche zweiter Ordnung erzeugen und außerdem hinzutretende Bedingungen befriedigen.

1. Wir schicken *zwei Hilfsbetrachtungen* voraus. Die dem Hauptproblem analoge Frage für einstufige Gebilde, projektive Ebenenbüschel, lautet: gegeben ist eine Regelschar und eine Anzahl von Paaren *„konjugierter"* Punkte, gesucht projektive Ebenenbüschel, welche die Regelschar erzeugen und nach den konjugierten Punkten entsprechende Ebenen senden.

Ein Paar konjugierter Punkte A_1; A_2 legt in der Leitschar eine Projektivität „assoziierter" Strahlen fest, d. s. solche Strahlen o_1, o_2, welche als Achsen projektiver Ebenenbüschel obige Bedingungen befriedigen. Den einzigen einem beliebigen Strahl o_1 der Leitschar assoziierten Strahl o_2 finde ich, indem ich die Schnittgrade der Ebene $o_1 A_1$ mit der Regelschar mit A_2 durch eine Ebene verbinde und diese Ebene wieder mit der Leitschar schneide.

Für zwei Paar konjugierter Punkte A_1; A_2, B_1; B_2 gibt es zwei Paare assoziierter Strahlen. Denn die durch A_1; A_2 bzw. B_1; B_2 festgelegten Projektivitäten assoziierter Strahlen haben zwei Paare gemein.

Auch folgende Betrachtung wird nützlich: *Es liegt eine Fläche zweiter Ordnung F^2, ein Punkt O_1 und eine Ebene ω_2 vor.* Auf allen

---

1) Sturm, Math. Ann. **1**, 533; **6**, 513; **15**, 407. — **10**, 117. — **12**, 254. — Hirst, Proc. of Lond. Math. Soc. **5**, 40; **8**, 262. — **21**, 92. — Schubert, Kalkül der abzählenden Geometrie, Lpzg. 1879, §§ 28 bis 32. — Vgl. auch: W. Vogt, Korrelative Räume bei gegebener Punktkernfläche, Diss., Breslau, 1906.

Digitized by Google

Strahlen durch O_1 ist eine Projektivität bestimmt, in der die Schnittpunkte mit F^2 Koinzidenzpunkte, O_1 und der Schnittpunkt mit ω_2 entsprechende Punkte sind. *Der Ort der dem* $O_1 \equiv O_2'$ *entsprechenden Punkte ist eine Ebene* ω_1'; denn auf jedem Strahl durch $O_1 \equiv O_2'$ liegt genau ein Punkt, und $O_1 \equiv O_2'$ ist selbst unter diesen Punkten nicht enthalten, weil auf keinem Strahl Identität herrscht. Auf allen Strahlen von $O_1 \equiv O_2'$ nach dem Schnittstrahl der ω_2 mit der Polarebene von $O_1 \equiv O_2'$ bezüglich F^2 herrscht Involution, darum geht ω_1' durch diesen Strahl.

Denke ich mir zwei Räume Σ_1, Σ_2 und lasse jedem Punkte A_1 von Σ_1 den Punkt von Σ_2 entsprechen, der ihm auf seiner Verbindungsgraden mit $O_1 \equiv O_2'$ zugeordnet ist in der eben besprochenen Projektivität, so entsteht eine *ein-eindeutige, in beiderlei Sinne quadratische „zentrale" Verwandtschaft.*[1])

I. Problemstellung.

§ 1.

2. Zwei korrelative Bündel O_1, O_2 mögen vorliegen; ich denke sie mir in zwei verschiedenen Räumen Σ_1, Σ_2. Zwei Punkte A_1; A_2 und zwei Grade $\mathfrak{a}_1$; $\mathfrak{a}_2$ in Σ_1 und Σ_2 sollen *„konjugiert"* heißen in bezug auf die korrelativen Bündel, wenn sie mit polaren Elementen der beiden Bündel inzident sind, also wenn die Strahlen O_1A_1, O_2A_2 resp. die Ebenen $O_1\mathfrak{a}_1$, $O_2\mathfrak{a}_2$ in den Bündeln konjugiert sind. Einem Punkte A_1 sind somit alle Punkte der dem Strahle O_1A_1 entsprechenden Ebene konjugiert, einem Strahle $\mathfrak{a}_1$ alle Strahlen des Strahlengebüsches, das den der Ebene $O_1\mathfrak{a}_1$ entsprechenden Strahl zur Achse hat.

Auf jeder Graden des Raumes liegt eine Projektivität konjugierter Punkte. Der Ort der Koinzidenzpunkte, also *der Ort der sich selbst konjugierten Punkte im Raume ist die von den Bündeln erzeugte Fläche zweiten Grades* F^2.[2])

O_1 und O_2 liegen auf der F^2. Dem Strahl O_1O_2 entspricht in dem einen und anderen Bündel die Tangentialebene an F^2 in O_1 resp. O_2.

3. *Die Ausartungen erster Stufe*[3]) *der korrelativen Bündel sind die planare und axiale Bündelkorrelation.* Die *planare* besteht im wesentlichen aus zwei projektiven Strahlenbüscheln, jeder Strahl des einen

1) Zentrale und windschiefe Raumverwandtschaften, Jahresber. d. Schles. Ges. f. Vaterl. Kultur, 1906.

2) In jedem Strahlenbüschel liegt eine Projektivität konjugierter Strahlen. Ort der sich selbst konjugierten Strahlen ist ein Komplex zweiten Grades.

3) Vgl. Sturm, Math. Ann. **12**, 261, Schubert a. a. O. § 32, Hirst, Proc. of Lond. Math. Soc. **5**, 42.

Digitized by Google

entspricht allen Ebenen durch den entsprechenden des anderen. Die Projektivität konjugierter Punkte auf allen Strahlen des Raumes ist ausgeartet, die singulären Punkte sind die Schnittpunkte mit den singulären Ebenen der Bündel. Die erzeugte F^2 ist das Ebenenpaar.

Die *axiale Bündelkorrelation* besteht aus zwei projektiven Ebenenbüscheln, jede Ebene des einen entspricht allen Strahlen des Strahlenbüschels in der entsprechenden Ebene. Die erzeugte F^2 ist das Erzeugnis der projektiven Ebenenbüschel.

Fallen die Achsen zusammen, so besteht die erzeugte F^2 aus den Koinzidenzebenen der konjektiven Ebenenbüschel. Fallen die Achsen zusammen und wird die Projektivität der Ebenenbüschel Identität, so wird keine eigentliche F^2 erzeugt, alle Punkte des Raumes sind sich selbst konjugiert.

Gibt es bei vorliegenden korrelativen Bündeln O_1, O_2 außerhalb der erzeugten F^2 einen sich selbst konjugierten Punkt, so sind die Projektivitäten konjugierter Punkte auf allen Strahlen durch ihn Identitäten, alle Punkte des Raumes sind sich selbst konjugiert. Jeder Strahl jedes der beiden Bündel liegt ganz in seiner entsprechenden Ebene. Das ist nur möglich bei der speziellen axialen Korrelation mit gemeinsamer Achse und identischen Ebenenbüscheln. Ich kann daher sagen: sind bei vorgegebenen korrelativen Bündeln neun sich selbst konjugierte Punkte bekannt, so ist die durch diese bestimmte F^2 das Erzeugnis der korrelativen Bündel, es sei denn, daß die spezielle axiale Korrelation herrscht.

Sind 10 nicht in einer F^2 liegende sich selbst konjugierte Punkte bekannt, so herrscht notwendig die spezielle axiale Bündelkorrelation.

4. *Wir wollen das System korrelativer Bündel untersuchen, welche eine gegebene F^2 zum Erzeugnis haben.*

Eine allgemeine F^2 wird durch 5 Bündelkorrelationen erzeugt; denn die beiden Scheitel sind auf F^2 selbst willkürlich, und nehme ich sie fest, so gibt es noch ∞^1 Korrelationen. Einem Strahle a_1 von O_1, der F^2 noch in $\mathfrak{A}$ schneidet, entspricht in diesen je eine Ebene des Ebenenbüschels $O_2\mathfrak{A}$. Nehme ich eine von ihnen als α_2 fest, so ist damit die Korrelation eindeutig bestimmt. Einem weiteren Strahle b_1 von O_1, der F^2 noch in $\mathfrak{B}$ schneidet, entspricht die Ebene durch O_2, $\mathfrak{B}$ und den von $\mathfrak{A}$ verschiedenen Schnittpunkt der Ebene $O_1a_1b_1$ mit dem Kegelschnitt $(\alpha_2 F^2)$.[1])

Zur Festlegung einer endlichen Anzahl von Bündelkorrelationen werden wir noch 5 einfache Bedingungen oder mehrfache in äquivalenter

1) Schröter, Oberfl. zweiter Ordnung, Lpzg. 1880, S. 461.

Digitized by Google

Menge hinzufügen können. Als solche werden wir die folgenden benutzen, in denen wir über den Rahmen der von Sturm und Schubert behandelten hinausgehen.

Wir bezeichnen nach Schuberts Beispiel[1]) jede Bedingung symbolisch durch einen Buchstaben, eine Anzahl von Bedingungen durch das symbolische Produkt der zugehörigen Buchstaben. Eine Summe von Symbolen bezeichnet die Bedingung, daß einer *oder* ein anderer der symbolischen Summanden erfüllt sein soll. Schließlich soll ein symbolischer Ausdruck, der die zur Festlegung einer endlichen Anzahl von Bündelkorrelationen nötige Dimension hat, zugleich die Zahl der Lösungen bezeichnen.

6. Soll O_1 auf einer Ebene, einer Graden liegen, oder ein gegebener Punkt sein, so ist das eine einfache (p_1), zweifache (p_1^2), dreifache Bedingung (p_1^3), wobei die beiden letzten sich als Produkte der ersten denken lassen.

Analoge Bedingungen für O_2 sind p_2, p_2^2, p_2^3.

Da nun in unserem Falle die Scheitel stets auf F^2 liegen müssen, so kommen p_1^3 und p_2^3 gar nicht in Betracht, und p_1^2 und p_2^2 verlangen, daß O_1 resp. O_2 einer der beiden Schnittpunkte der gegebenen Graden mit F^2 ist. Obgleich es hier übersichtlicher erscheint, eine feste Lage für den Scheitel auf F^2 als Bedingung einzuführen, bleibe ich doch bei dieser Symbolik, weil nur so die zweifache Bedingung sich als Potenz der einfachen darstellen läßt, und das zur Aufstellung der Tabelle praktisch ist.

Außer diesen *Lagebedingungen* für die Scheitel nehmen wir folgende elementare Bedingungen für die Korrelation, die aber, wenn sie die Vielfachheit 9 erreichen, auch Lagebedingungen für die Scheitel abgeben.

Einfache Projektivitätsbedingungen sind ein Paar konjugierter Punkte $[A_1; A_2] = \mu$, ein Paar konjugierter Graden $[\mathfrak{a}_1; \mathfrak{a}_2] = \nu$.

Lege ich von der dem Strahle von O_1 nach einem festen Punkte A_1 entsprechenden Ebene α_2 nicht nur, wie in μ, einen Punkt, sondern eine Grade $\mathfrak{a}_2$, oder gar sie selbst fest, so ist das eine zweifache, dreifache Bedingung: $[A_1; \mathfrak{a}_2] = \bar{\mu}_1$, $[A_1; \alpha_2] = \mu_1$, analog: $[\mathfrak{a}_1; A_2] = \bar{\mu}_2$, $[\alpha_1; A_2] = \bar{\mu}_2$.

Aus der Bedingung ν gewinne ich drei verschiedene zweifache Bedingungen: Ich verlange von dem der Ebene von O_1 nach einem festen Strahle $\mathfrak{a}_1$ entsprechenden Strahle: 1. Er soll durch einen Punkt A_2 gehen — diese Bedingung ist identisch mit $[\mathfrak{a}_1; A_2] = \bar{\mu}_2$. 2. Er soll in einer Ebene α_2 liegen: $[\mathfrak{a}_1; \alpha_2] = \bar{\nu}_2$. 3. Er soll zwei Grade $\mathfrak{a}_2'$, $\mathfrak{a}_2''$

1) Schubert, a. a. O. S. 3.

Digitized by Google

schneiden, d. h. ich gebe zu $\mathfrak{a}_1$ zwei konjugierte Graden: $[\mathfrak{a}_1; \mathfrak{a}_2', \mathfrak{a}_2''] = \nu_1$. Durch Raumvertauschung entstehen die Bedingungen: $[A_1; \mathfrak{a}_2] = \mu_1$, $[\alpha_1; \mathfrak{a}_2] = \overline{p}_1$, $[\mathfrak{a}_1', \mathfrak{a}_2''; \mathfrak{a}_2] = \overline{\nu}_2$.

Ferner gewinne ich aus ν zwei dreifache Bedingungen, indem ich von dem der Ebene von O_1 nach einem festen Strahl $\mathfrak{a}_1$ entsprechenden Strahle verlange, 1. daß er einem Strahlenbüschel angehört: $[\mathfrak{a}_1; (A_2, \alpha_2)] = \nu_1$, 2. daß er drei Strahlen $\mathfrak{a}_2', \mathfrak{a}_2'', \mathfrak{a}_2'''$ schneidet, d. h. ich gebe drei konjugierte Strahlen zu $\mathfrak{a}_1$: $[\mathfrak{a}_1; \mathfrak{a}_2', \mathfrak{a}_2'', \mathfrak{a}_2'''] = \nu_1'$. Durch Raumvertauschung ergeben sich: $[(A_1, \alpha_1); \mathfrak{a}_2] = \nu_2$ und $[\mathfrak{a}_1', \mathfrak{a}_1'', \mathfrak{a}_1'''; \mathfrak{a}_2] = \nu_2'$.

Schließlich erhalte ich eine vierfache Bedingung, wenn ich jenen Strahl selbst festlege: $[\mathfrak{a}_1; a_2] = \nu_1$, durch Raumvertauschung: $[a_1; \mathfrak{a}_2] \equiv \nu_2$.

7. Es ist bereits gesagt, daß eine F^2 durch ∞^5 Bündel-Korrelationen erzeugt wird: 14 einfache Bedingungen legen eine endliche Anzahl von korrelativen Bündeln fest, die F^2 ist nach (**3**) mit neun sich selbst konjugierten Punkten äquivalent, es bleiben also fünf Bedingungen frei.

Danach könnte man glauben, daß die hier gefundenen Resultate, so weit sie sich sonst auf *dieselben Bedingungen beziehen*, sich von denen der Sturm-Schubertschen Arbeiten bei Bedingungsgruppen, welche μ^9 enthalten, nicht unterscheiden werden. Dem ist aber nicht so. Zum Beispiel ist bei jenen $p_1^3 p_2^3 \mu^9 = 3$[1]), während hier bei gegebenem F^2 $p_2^3 p_2^2$ gleich 0 ist, weil O_1 nicht in dem durch p_1^3 dargestellten Punkte außerhalb F^2 liegen kann. Der Grund dazu liegt in folgendem:

8. In dem System fünfter Stufe von Bündel-Korrelationen sind *planare Korrelationen*, die ja ihr Ebenenpaar zum Erzeugnis haben, garnicht enthalten. *Axiale* können in zwei Gestalten auftreten. Erstens können die beiden Achsen einer der beiden Scharen der F^2 angehören, die Scheitel sind auf ihnen willkürlich, die projektiven Ebenenbüschel erzeugen die andere Schar. Dieser Art gibt es in dem System ∞^4, welche bei imaginären Scharen der F^2 sämtlich imaginär sind.

Ferner aber hat jede spezielle axiale Bündel-Korrelation mit zusammengefallenen Achsen und identischen Ebenenbüscheln alle Punkte des Raumes zu sich selbst konjugierten, erzeugt also auch die gegebene F^2. Die Achse kann ∞^4 Lagen im Raume haben, die beiden Scheitel sind auf jeder noch willkürlich. Es gibt ∞^6 spezielle axiale Bündel-Korrelationen, also eine höhere Mannigfaltigkeit, als es allgemeine Bündel-Korrelationen gibt, welche F^2 erzeugen. Diese Anomalie, welche zunächst die Abzählung mittels der Ausartungen erster Stufe unmöglich macht, bewirkt den obengenannten Unterschied zwischen

1) Schubert a. a. O. S. 291; dort steht p für p_1, p' für p_2.

Digitized by Google

meinen Resultaten und den *Sturm-Schubert*schen. In dem Beispiele $p_1^3 p_2^2$ gibt es zwar keine lösende allgemeine, aber ∞^1 spezielle axiale Bündel-Korrelationen; die Achse ist frei in dem Strahlenbüschel um den durch p_1^3 dargestellten Punkt nach der durch p_2^2 dargestellten Graden hin, O_1 ist jedesmal jener Punkt, O_2 der Schnittpunkt mit dieser Graden.

In das Kontinuum der allgemeinen Bündel-Korrelationen gehen nur diejenigen speziellen axialen Korrelationen mit zusammengefallenen Achsen und identischen Ebenenbüscheln ein, welche ihre Bündelscheitel in den Schnittpunkten der Achse mit F^2 liegen haben. Deren gibt es ∞^4.

Die einfache Bedingung, daß eine gesuchte Korrelation eine Ausartung der speziellen axialen Art sein soll, will ich mit ψ, die Bedingung, daß sie eine axiale Korrelation sein soll, welche durch ihre projektiven Ebenenbüschel wirklich F^2 erzeugt, will ich mit ψ' bezeichnen.

II. Punktbedingungen.

9. Wir wenden uns zur Behandlung solcher Bedingungsgruppen, die außer Lagebedingungen für die Scheitel nur Paare konjugierter Punkte enthalten.

Zwei Punkte O_1, O_2, welche die Scheitel von korrelativen Bündeln sind, die den auferlegten Bedingungen genügen, sollen *„assoziierte"* Punkte heißen.

§ 1.

10. Es ist F^2 und ein Paar konjugierter Punkte $[A_1; A_2] = \mu$ gegeben.

O_1, O_2, seien zwei beliebige Punkte der F^2, Strahl $O_1 A_1$ schneide F^2 noch in $\mathfrak{A}$. Die dem Strahle $O_1 A_1$ entsprechende Ebene ist durch die Punkte O_2, $\mathfrak{A}$, A_2 eindeutig bestimmt und mit ihr die ganze Korrelation der Bündel.[1]) Schneiden sich die Graden $O_1 O_2$, $A_1 A_2$, so liegt der Strahl $O_1 A_1$ ganz in seiner entsprechenden Ebene, ohne doch der F^2 anzugehören, darum herrscht die spezielle axiale Korrelation mit zusammengefallenen Achsen und Ebenenbüscheln.

Die Korrelation ist nur dann nicht eindeutig bestimmt, wenn die Punkte O_2, $\mathfrak{A}$, A_2 in einer Graden liegen, wenn also die Strahlen $O_1 A_1$ und $O_2 A_2$ sich in einem Punkte der F^2 schneiden. In diesem Falle haben alle ∞^1 korrelativen Bündel mit den Scheiteln O_1, O_2, welche F^2 erzeugen, die Punkte A_1, A_2 zu konjugierten. Zu jedem Punkte O_1 gibt es genau einen assoziierten, der mit ihm in dieser besonderen Beziehung

1) Schröter, Oberfl. zweiter Ordnung. S. 461.

Digitized by Google

steht; man erhält ihn, indem man die Grade $O_1 A_1$ mit F^2 noch in $\mathfrak{A}$, die Grade $A_2 \mathfrak{A}$ mit F^2 noch in O_2 schneidet.

Jedem Punkte O_1 ist jeder Punkt O_2 — beide auf F^2 gelegen — assoziiert, die korrelativen Bündel sind im allgemeinen eindeutig bestimmt. Nur ein Punkt O_2 ist in ausgezeichneter Weise assoziiert, sodaſs die korrelativen Bündel unbestimmt sind. Dasselbe gilt natürlich, wenn man von einem Punkte O_2 ausgeht. Symbolisch kann ich schreiben

$$p_1^2 p_2^2 \mu = 4 .$$

11. Läuft O_1 auf einem Kegelschnitt (ω_1), so läuft sein ausgezeichnet assoziierter ebenfalls auf einem Kegelschnitt (ω_2). Denn $\mathfrak{A}$ läuft auf dem Kegelschnitt (α), welchen der Kegel von A_1 nach (ω_1) noch in F^2 einschneidet, und O_2 auf demjenigen, den der Kegel von A_2 nach (α) noch in F^2 einschneidet. Durchläuft O_1 eine Grade o_1 der F^2, so $\mathfrak{A}$ die zweite Schnittgrade $\mathfrak{a}$ der Ebene $o_1 A_1$ mit F^2, und O_2 die zweite Schnittgrade o_2 der Ebene $A_2 \mathfrak{a}$ mit F^2. Daraus geht hervor, daß *die ein-eindeutige Beziehung der ausgezeichnet assoziierten Punkte ein Ausschnitt einer räumlichen Kollineation ist*[1]), welche die F^2 in sich selbst überführt, sodaß jede ihrer Regelscharen in sich selbst übergeht.[2])

Der Kegelschnitt der F^2 in jeder Ebene durch $A_1 A_2$ geht ersichtlich auch in sich selbst über. Die Kollineation hat also einen Büschel von sich selbst entsprechenden Ebenen mit der Achse $A_1 A_2$. Der dadurch mitbedingte Strahl von sich selbst entsprechenden Punkten ist die Polare von $A_1 A_2$ nach F^2, wie man leicht daran erkennt, daß ihre Schnittpunkte mit F^2 nach der oben angegebenen Konstruktion sich selbst ausgezeichnet assoziiert sind. Die ∞^1 korrelativen Bündel, deren Scheitel in einem dieser Punkte zusammengefallen sind, sind spezielle axiale und haben je eine der Tangenten der F^2 in diesem Punkte zur gemeinsamen Achse.

Die Kollineation ruft in jeder Regelschar eine Projektivität von Strahlen hervor. Entsprechende Strahlen sind Achsenpaare je einer in dem System enthaltenen axialen Korrelation vom Typus ψ'. Die Projektivität ist dieselbe, wie die nach (1) durch die konjugierten Punkte $A_1; A_2$ hervorgerufene Projektivität assoziierter Strahlen.

(Fortsetzung folgt.)

1) v. Staudt, Beiträge z. Geom. d. Lage. 1856. S. 6.

2) „Auf die erste Art“. Sturm, Mathem. Ann. **26**, 467.

Digitized by Google

Einige Sätze über die räumliche Hyperbel.

Von G. Majcen in Agram.

Die räumliche Hyperbel nimmt unter den vier Arten der Raumkurven dritter Ordnung insofern eine Ausnahmestellung ein, als viele für sie geltende Eigenschaften nicht zugleich auf die anderen drei Arten reell übertragbar sind. In den mir bekannten, einschlägigen Arbeiten von Loria, Sturm, Mehmke, Reye, Schröter, Geisenheimer, Timerding, Krüger, Duporcq u. a., in welchen auch metrische Eigenschaften behandelt werden, ist von diesen, insbesondere für die räumliche Hyperbel geltenden, teils projektiven, teils metrischen Sätzen und Konstruktionen nichts enthalten.

Ich führe hier diese Sätze[1]) und zwar ohne Beweise an, weil ich der Meinung bin, daß es vielleicht einfacher sein dürfte, diese Beweise zu führen, als die Sätze selbst zu bemerken.

Die drei in dem Eckpunkt O zusammenstoßenden Kanten OB, OD, OG eines Parallelepipeds seien die Koordinatenachsen x, y, z eines räumlichen Koordinatensystems. Die der Ecke O diagonal gegenüberliegende Ecke des Parallelepipeds sei E, und EA, EH, EF die drei zu x, y, z parallelen Kanten im negativen Sinne der Koordinaten gemessen. Die drei windschiefen Kanten AE, BF, OG seien die Asymptoten $a_\infty, b_\infty, c_\infty$ einer räumlichen Hyperbel, welche also durch die Angabe dieser Asymptoten bereits bestimmt ist. Die Kantenlängen des Parallelepipeds auf den drei Asymptoten seien bzw. a, b, c.

Die Hyperbel h^3_4 erhält man als einen Teil des Schnittes zweier Zylinder

$$xy - ay - bx = 0 \quad \text{und} \quad yz - bc = 0.$$

Die Restgerade des Schnittes ist unendlich fern.

1. Es sei Q irgend ein Punkt der Kurve. Legt man durch Q eine Ebene parallel zu den beiden Asymptoten b_∞ und c_∞, so schneidet diese die dritte Asymptote a_∞ in einem Punkte Q_a. Man erhält in derselben Weise auf den beiden anderen Asymptoten die Punkte Q_b und Q_c. Die Ebene $(Q_a\, Q_b\, Q_c) \equiv V$ *enthält den Punkt* Q und *diejenige Diagonale* DH des Parallelepipeds, welche *keine* der drei Asymptoten schneidet. Die

1) Zum Teil sind diese Sätze in den Berichten der südsl. Akademie der Wissenschaften und Künste (Agram), mathem.-naturwissensch. Klasse, Bd. 165, 1906, samt Beweisen enthalten.

Digitized by Google

Diagonale DH ist eine uneigentliche zweipunktige Sehne der Kurve. Für die beiden imaginären Schnittpunkte erhält man

$$y = \frac{b}{2}(1 \pm i\sqrt{3}).$$

Man kann diese Eigenschaft zu einer bequemen *Konstruktion* der Kurve k_4^3 benützen, wenn deren drei Asymptoten gegeben sind. Das Parallelepiped ist durch die drei Asymptoten bestimmt. Durch die Diagonale, welche keine der drei Asymptoten schneidet, lege man irgend eine Ebene V_i. Diese schneidet die Asymptoten in den Punkten Q_a, Q_b, Q_c. Die drei Ebenen, welche durch diese Punkte parallel zu den bezüglichen Asymptotenpaaren gelegt werden, haben ihren gemeinsamen Schnittpunkt Q_i in der Ebene V_i. Dieser Punkt gehört also der Kurve k_4^3 an, und es können auf demselben Wege beliebige weitere Kurvenpunkte ermittelt werden.

2. Die durch einen Kurvenpunkt P zur Asymptote a, gezogene Parallele schneidet die Ebene yOz und die parallele Fläche des Parallelepipeds in den Punkten D_1 und H_2; die durch P zu b, gezogene Parallele gibt mit xOz und mit der parallelen Fläche die Schnittpunkte H_4 und D_3; die Parallele zu c, durch P schneidet schließlich die Ebene xOy und die zu dieser parallele Fläche in den Punkten D_5 und H_6. Man hat die Beziehung:

$$\overline{D_1P} \cdot \overline{D_3P} \cdot \overline{D_5P} = \overline{H_2P} \cdot \overline{H_4P} \cdot \overline{H_6P} = |abc|.$$

Man bemerke, daß die drei Punkte D_1, D_3, D_5 in denjenigen Seitenflächen des Parallelepipeds liegen, welche im Eckpunkt D der ausgezeichneten Diagonale DH zusammenstoßen. Die Punkte H_2, H_4, H_6 liegen in den Flächen, welche den Eckpunkt H zum Schnittpunkt haben.

Der Punkt P bestimmt mit den Punkten $D_i\,(i = 1, 3, 5)$ ein Tetraeder, mit den Punkten $H_i\,(i = 2, 4, 6)$ ein zweites Tetraeder. Die Inhalte beider Tetraeder sind *einander* (absolut) *gleich*. Ein jedes ist *ein Sechstel* des Inhaltes des *Parallelepipeds*.

3. Die drei asymptotischen Ebenen von k_4^3 seien α, β, γ. Man ziehe durch irgend einen Punkt P der Kurve drei Parallelen zu den drei Asymptoten. Die Parallele zu a, schneidet β, und γ, in den Punkten P_β, P_γ; die Parallele zu b, trifft α, und γ, in P'_α, P'_γ; die Parallele zu c, gibt mit α, und β, die Durchstoßpunkte P''_α, P''_β.

Man bekommt dann wieder die Gleichheiten:

$$\overline{PP'_\alpha} \cdot \overline{PP''_\beta} \cdot \overline{PP_\gamma} = \overline{PP''_\alpha} \cdot \overline{PP_\beta} \cdot \overline{PP'_\gamma} = -abc.$$

Die Inhalte beider Tetraeder $PP'_\alpha P''_\beta P_\gamma$ und $PP''_\alpha P_\beta P'_\gamma$ sind einander *gleich*; jedes ist *ein Sechstel* des Inhalts des Parallepipeds.

Digitized by Google

Legt man wieder durch irgend einen Kurvenpunkt S drei Ebenen, deren jede mit je einer asymptotischen Ebene parallel ist, so schneidet die zu α_s parallele Ebene die Asymptoten b_s und c_s in den Punkten S_b'', S_c'', die zu β_s parallele Ebene a_s und c_s in den beiden Punkten S_a', S_c', schließlich die zu γ_s parallele Ebene die Asymptoten a_s und b_s in den Punkten S_a und S_b. Es entstehen also auf den drei Asymptoten die Strecken $\overline{S_a S_a'}$, $\overline{S_b'' S_b}$, $\overline{S_c'' S_c'}$. Werden diese Strecken in dem angegebenen Sinne gemessen, so bekommt man das *konstante Produkt*

$$\overline{S_a S_a'} \cdot \overline{S_b'' S_b} \cdot \overline{S_c'' S_c'} = + a b c.$$

Wir haben weiter den Satz: „Das Produkt aus den drei *Entfernungen* eines Kurvenpunktes von den drei *asymptotischen Ebenen* ist eine *konstante Größe*."

4. Es seien ξ, η, ζ Koordinaten irgend eines Punktes P von k_h^3 mit Bezug auf das angenommene Koordinatensystem; trägt man auf die Asymptoten a_s, b_s, c_s von den Punkten A, B, bzw. O die Strecken $3\xi - a$, $3\eta - b$, $3\zeta - c$ auf, so ist die durch die drei gewonnenen Endpunkte A_s, B_s, C_s bestimmte Ebene die *Schmiegungsebene* im Punkte P.

Man kann die Schmiegungsebene eines jeden Punktes im Zusammenhange mit der im Art. **1** gegebenen Konstruktion der Kurvenpunkte einfacher auf die folgende Weise erhalten.

Die drei asymptotischen Ebenen $\alpha_s, \beta_s, \gamma_s$ bilden bekanntlich ein Prisma, dessen Kanten folgendermaßen bezeichnet werden mögen:

$$(\alpha_s \beta_s) \equiv c_0, \quad (\alpha_s \gamma_s) \equiv b_0, \quad (\beta_s \gamma_s) \equiv a_0.$$

Legt man durch irgend einen Kurvenpunkt P drei Ebenen, deren jede mit je zwei Asymptoten parallel ist, so schneidet die zu a_s und b_s parallel gelegte Ebene die Kante c_0 in einem Punkte C', die zu a_s und c_s parallele Ebene die Kante b_0 im Punkte B', schließlich die zu b_s und c_s parallele Ebene die Kante a_0 im Punkte A'. Die durch A', B', C' bestimmte Ebene enthält P und ist die *Schmiegungsebene* im Punkte P.

Die Schmiegungsebene in irgend einem Kurvenpunkte schneidet die drei Asymptoten in einem Dreieck T' und die drei asymptotischen Ebenen in einem Dreiseit T''. Die *Fläche* des Dreiecks T' ist *zweimal so groß* wie die Fläche von T''.

Die beiden Dreiecke T' und T'' sind *affine* Figuren; das erstere Dreieck ist dem letzteren eingeschrieben.

5. Eine beliebige Ebene σ schneidet die drei asymptotischen Ebenen in einem Dreieck T'''. Ein jedes diesem eingeschriebene, mit ihm affine Dreieck T_i' wird nach einem bekannten Satze einen zweimal so großen Flächeninhalt haben wie das Dreieck T'', wobei die Richtung

Digitized by Google

der Affinitätsstrahlen eine beliebige ist. Der Schwerpunkt P_i eines solchen Dreiecks T_i' kann als ein Punkt einer kubischen Hyperbel betrachtet werden, welche die angenommenen drei asymptotischen Ebenen hat und für welche die Ebene σ die dem Punkte P_i zugehörige Schmiegungsebene ist. Die in den asymptotischen Ebenen liegenden Eckpunkte des betreffenden Dreiecks T_i' sind Punkte auf den entsprechenden Asymptoten der Hyperbel. Man kann zur Bestimmung der Kurve noch eine zweite beliebige Schmiegungsebene τ wählen. Wird hier das Schnittdreieck mit dem asymptotischen Prisma mit $\mathfrak{T}''$ bezeichnet, so kann ein diesem affines und eingeschriebenes Dreieck $\mathfrak{T}_1'$ so ermittelt werden, daß der Schwerpunkt P_1 von $\mathfrak{T}_1'$ der letzten im Art. 3 angegebenen Bedingung genügt.

Weil die Eckpunkte von $\mathfrak{T}_1'$ wieder auf den betreffenden Asymptoten liegen, so sieht man, daß die Kurve bestimmt ist. Denn je zwei in den asymptotischen Ebenen liegende Eckpunkte von T_i' und $\mathfrak{T}_1'$ geben je eine Asymptote, und die beiden Kurvenpunkte P_i und P_1 sowie deren zugehörige Schmiegungsebenen σ und τ stehen zu den Asymptoten in den für die Kurve notwendigen Beziehungen.

Weitere Punkte der Kurve können auch mittels der durch P_i und P_1 gelegten Ebenen π_j erhalten werden. Eine jede solche Ebene schneidet die drei Asymptoten in einem Dreieck, dessen Schwerpunkt bekannt ist. Der dritte in der gelegten Ebene liegende Kurvenpunkt wird mittels dieses Schwerpunktes auf bekannte Weise ermittelt.

6. Die Tangente in einem Punkte D der Kurve sei t. Diese kann auf die folgende Weise konstruiert werden. Man nehme die Koordinaten ξ und η des Berührungspunktes doppelt, und lege in der Entfernung 2ξ eine Ebene parallel zu yOz, eine zweite Ebene wieder in der Entfernung 2η parallel zu xOz. Diese letztere schneidet die Ebene xOy (welche die Asymptote b_s enthält) in einer Geraden b_i'; die erstere von den parallelen Ebenen schneidet die zu xOy parallele Fläche des Parallelepipeds (in welcher a_s liegt) in einer Geraden a_i'. Die durch D gelegte Gerade, welche a_i' und b_i' schneidet, ist die *Tangente* in D. Diese Tangente kann auch mittels der beiden übrigen Flächenpaare, welche je eine der Asymptoten b_s und a_s zu Schnittlinien haben, auf dieselbe Weise wie oben ermittelt werden.

Die drei Punkte, in welchen die Tangente t die drei asymptotischen Ebenen $\alpha_s, \beta_s, \gamma_s$ schneidet, seien A_t, B_t, C_t. Ist der Punkt A_t durch das Paar B_t, C_t von D getrennt, und werden die entsprechenden Strecken mit den zugehörigen Vorzeichen genommen, so hat man die Gleichung:

$$\frac{B_tA_t}{B_tD} + \frac{C_tA_t}{C_tD} = 3.$$

Digitized by Google

Man bildet auf gleiche Weise die beiden Gleichungen, wenn D von B_t oder C_t getrennt ist.

Zwischen den drei Strecken $\overline{DA}_t$, $\overline{DB}_t$, $\overline{DC}_t$ auf irgend einer Tangente bestehen die Beziehungen (mit Berücksichtigung der entsprechenden Vorzeichen):

$$\overline{DA}_t^2 (DB_t + DC_t) = \overline{DB}_t^2 (DA_t + DC_t) = \overline{DC}_t^2 (DA_t + DB_t).$$

7. Man kann durch einen Punkt P der Kurve k_4^3 drei Geraden ziehen, deren jede je zwei der drei Asymptoten schneidet. Die eine von diesen Geraden trifft b_s und c_s in den Punkten B_1^* bzw. C_1^*, die zweite bestimmt mit c_s und a_s die Schnittpunkte C_2^* und A_2^*, die dritte trifft a_s und b_s in den Punkten A_3^*, B_3^*. Auf den Asymptoten entstehen drei Strecken von *konstanter* Größe:

$$A_3^* A_2^* = 2a, \quad B_3^* B_1^* = 2b, \quad C_2^* C_1^* = 2c.$$

Nimmt man etwa auf der Asymptote b_s irgendwo die Strecke $2b$ so, daß im positiven Sinne der Koordinaten $B_1^* B_3^* = +2b$ wird, so kann ein Kurvenpunkt P folgendermaßen konstruiert werden. Man lege die Ebene (B_3^*, a_s) und die Ebene (B_1^*, c_s). Die Schnittlinie p_2 dieser Ebenen ist stets eine *einpunktige* Sehne der Hyperbel k_4^3. Die erstere Ebene schneidet die Diagonale DH des Parallelepipeds in einem Punkte P_a, die zweite trifft DH in einem Punkte P_c. Legt man durch P_a eine Ebene parallel zu b_s und c_s, durch P_c eine Ebene parallel zu a_s und b_s, so treffen beide Ebenen die Sehne p_2 in *demselben Punkte*, welcher der *Hyperbel* angehört.

8. Die oben bestimmten Punkte $A_2^*, A_3^*, \ldots, C_2^*$ können mit dem Punkte P in folgende zwei Gruppen eingeteilt werden:

$$PA_2^* B_3^* C_1^*, \quad PA_3^* B_1^* C_2^*.$$

Die durch beide Gruppen bestimmten Tetraeder sind *inhaltsgleich*. Ein jedes hat *zwei Drittel* vom Inhalte des Parallelepipeds, welches durch die drei Asymptoten bestimmt wird.

Die *Produkte* der drei in jedem Tetraeder durch P hindurchgehenden Kanten sind (absolut) *gleich*, d. h. man hat die Beziehung:

$$\frac{PA_2^*}{PA_3^*} \cdot \frac{PB_3^*}{PB_1^*} \cdot \frac{PC_1^*}{PC_2^*} = -1.$$

Für eine gleichseitige räumliche Hyperbel hat man überdies noch die Gleichheiten:

$$PA_2^* = PA_3^*, \quad PB_3^* = PB_1^*, \quad PC_2^* = PC_1^*.$$

Digitized by Google

9. Mit Rücksicht auf die Bezeichnungen im **Art. 6** können für die Punkte D, A_t, B_t, C_t Doppelverhältnisse mit D als einem und je einem der übrigen Punkte als zweitem Grundpunkte gebildet werden. Mittels der Asymptotentransversalen durch D können diese *Doppelverhältnisse* durch *einfache Verhältnisse* ausgedrückt werden, und zwar in den drei möglichen Fällen ($P \equiv D$):

$$\frac{DB_1^*}{DC_1^*} = \frac{C_tA_t}{C_tD} : \frac{B_tA_t}{B_tD},$$

$$\frac{DA_2^*}{DB_2^*} = \frac{B_tC_t}{B_tD} : \frac{A_tC_t}{A_tD},$$

$$\frac{DC_3^*}{DA_3^*} = \frac{A_tB_t}{A_tD} : \frac{C_tB_t}{C_tD}.$$

Berücksichtigt man ein negatives Vorzeichen in einem der drei linksstehenden Verhältnisse, so kann man bemerken, daß das Produkt zweier rechtsstehender Doppelverhältnisse dem reziproken dritten mit verändertem Vorzeichen gleich ist.

Für irgend einen Punkt der Hyperbel k_3^3 hat man zwischen den Abschnitten auf den Asymptotentransversalen die Gleichung:

$$\frac{\overline{PB_1^*}^2 + \overline{PC_1^*}^2}{PB_1^* \cdot PC_1^*} + \frac{\overline{PA_2^*}^2 + \overline{PC_2^*}^2}{PA_2^* \cdot PC_2^*} + \frac{\overline{PA_3^*}^2 + \overline{PB_3^*}^2}{PA_3^* \cdot PB_3^*} = 3,$$

wo die Strecken mit den entsprechenden Vorzeichen zu nehmen sind.

Agram, den 30. Dezember 1906.

Die involutorischen konformen Punkttransformationen des Raumes.

Von Eugen Meyer in Charlottenburg.

Nach einem bekannten Satze von Liouville läßt jede konforme Punkttransformation des Raumes alle Kugeln invariant, und umgekehrt ist jede Punkttransformation, die Kugeln in Kugeln verwandelt, konform. Die genannten Transformationen fallen also mit den räumlichen Kreisverwandtschaften zusammen. Die folgenden Zeilen haben den Zweck, alle *involutorischen* Transformationen, die unter ihnen vorkommen, aufzustellen, und zu ermitteln, welche Kugeln bei jeder einzelnen Art invariant bleiben.

Jede konforme Punkttransformation des Raumes, die nicht eine einfache Ähnlichkeitstransformation ist, läßt sich auf eindeutige Weise

Digitized by Google

als Aufeinanderfolge einer Ähnlichkeitstransformation und einer solchen Transformation durch reziproke Radien darstellen, bei welcher das konstante Produkt je zweier entsprechenden Radienvektoren gleich 1 ist.[1]) Ist $\mathbf{C}$ die konforme Transformation, so läßt sich also setzen: $\mathbf{C} \equiv \mathbf{A} \cdot \mathbf{R}$, wenn $\mathbf{A}$ die Ähnlichkeitstransformation, $\mathbf{R}$ die genannte Inversion mit der Potenz 1 ist.

Soll nun $\mathbf{C}$ involutorisch sein, so muß $\mathbf{A}$ das Zentrum O_R der Inversion in sich überführen. Wäre dies nämlich nicht der Fall, und würde $\mathbf{A}$ den Punkt O_R nach O_R' und $\mathbf{R}$ den Punkt O_R' nach O_R'' bringen, so wären O_R' und O_R'' im Endlichen gelegene, von O_R verschiedene reelle Punkte. Umgekehrt würde O_R'' von $\mathbf{A}$ nach dem endlichen reellen Punkte O_R'' gebracht, und dieser könnte daher durch $\mathbf{R}$ nicht nach O_R zurückgeführt werden. Es muß also das Ähnlichkeitszentrum O_A derselbe Punkt sein wie O_R; er heiße kurz O.

Wenn nun $\mathbf{A}$ den Punkt P nach P_A, $\mathbf{R}$ den Punkt P_A nach P_R überführt, und der konstante Quotient $\frac{OP}{OP_A}$ gleich q gesetzt wird, so ist, weil $OP_A \cdot OP_R = 1$ ist, $OP \cdot OP_R = q$. Bezeichnet man mit $\mathbf{R}_1$ diejenige Inversion, für die O das Zentrum und q die Potenz ist, so kann man $\mathbf{C} \equiv \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{R}_1$ setzen, wo $\mathbf{A}_1$ eine bestimmte Ähnlichkeitstransformation bedeutet. Diese vertauscht die Strahlen des Bündels O unter sich, läßt aber die Abstände aller Punkte von O invariant, ändert deshalb überhaupt die Längen der Strecken nicht und ist folglich eine kongruente Transformation.

Soll nun $\mathbf{C}$ involutorisch sein, so muß $\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_1$ jeden Strahl des Bündels O, also auch jeden Punkt des Raumes in sich überführen, d. h. $\mathbf{A}_1$ muß eine involutorische kongruente Transformation sein. Solcher Transformationen gibt es aber, da eine involutorische Kollineation entweder eine Perspektivität (Homologie) oder eine Kollineation mit Achsen (gescharte Kollineation) ist, außer der identischen nur 3 Arten: die Spiegelung an einem Punkt, die Spiegelung an einer Ebene und die Spiegelung an einer Geraden.

Sind aber $\mathbf{C}$, $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{R}_1$ sämtlich involutorisch, so sind $\mathbf{A}_1$ und $\mathbf{R}_1$ vertauschbar[2]), sodaß man auch $\mathbf{C} \equiv \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{A}_1$ setzen kann. Also erhalten wir:

Es gibt nur 4 verschiedene Arten von involutorischen konformen Punkttransformationen des Raumes, die nicht einfache Ähnlichkeitstrans-

1) Lie-Scheffers, Geometrie der Berührungstransformationen I. Leipzig 1896. S. 425.

2) H. Wiener, Ber. d. Kgl. Sächs. Ges. d. W. 1890. S. 264. Reye, Die Geometrie der Lage. 3. Aufl. II. S. 108.

Digitized by Google

formationen sind. Eine solche Transformation kann nämlich sein: 1. eine Inversion mit reeller Grundkugel, 2. eine solche Inversion in Verbindung mit einer Spiegelung an dem Zentrum dieser Inversion, 3. eine solche Inversion in Verbindung mit einer Spiegelung an einer durch das Zentrum gehenden Ebene, 4. eine solche Inversion in Verbindung mit einer Spiegelung an einer durch das Zentrum gehenden Geraden. Die Reihenfolge der beiden Transformationen in jeder dieser Verbindungen ist gleichgültig.

Fragen wir nun nach den Kugeln, die bei einer jeden dieser 4 Arten von Transformationen in sich übergehen. Bei der *ersten* Art bleiben außer der Grundkugel mit dem Radius r alle Kugeln invariant, für welche das Zentrum O der Inversion eine äußere Potenz gleich r^2 hat, d. h. die ∞^3 zur Grundkugel orthogonalen Kugeln.

Ist für die *zweite* Art $-r^2$ das konstante Produkt zweier von O ausgehenden entsprechenden Radienvektoren, so bleiben bei ihr alle Kugeln invariant, für die O eine innere Potenz gleich r^2 hat. Das sind aber alle ∞^3 Kugeln durch irgend einen von denjenigen ∞^2 Kreisen, deren Zentrum O und deren Radius r ist.

Ist bei der *dritten* Art E die durch das Zentrum O gehende Ebene, und schneidet diese die Grundkugel im Kreise $\mathfrak{K}$, so werden zunächst offenbar alle durch $\mathfrak{K}$ gehenden Kugeln durch die Transformation in sich übergeführt. Jede nicht durch $\mathfrak{K}$ gehende invariant bleibende Kugel K muß von jeder sie schneidenden, durch O gehenden und zu E normalen Ebene E_1 in einem Kreise $\mathfrak{K}_2$ getroffen werden, der gleichfalls invariant bleibt. Dieser Kreis muß, wegen der Art der Transformation, sowohl Punkte innerhalb als außerhalb der Grundkugel, sowohl solche auf der einen wie auf der andern Seite von E haben. Schneidet E_1 die Grundkugel in $\mathfrak{K}_1$, so treffen sich $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ in zwei Punkten, die zu E symmetrisch liegen. K muß also ihren Mittelpunkt in E haben, und da folglich die Potenz von O in bezug auf K gleich r^2 ist, so bleiben außer den genannten ∞^1 durch $\mathfrak{K}$ gehenden Kugeln nur noch diejenigen ∞^2 invariant, die zur Grundkugel orthogonal sind und ihren Mittelpunkt in E haben.

Für die *vierte* Art endlich sei g die ausgezeichnete Gerade; sie treffe die Grundkugel in A und B. Dann gehen zunächst offenbar alle durch A und B gehenden Kugeln in sich über. Jede andere invariant bleibende Kugel muß die Grundkugel in einem reellen Kreise schneiden, und da alle durch g gehenden Ebenen in sich übergehen, so müssen die Punkte dieses Kreises paarweise zu g symmetrisch liegen. Die Kugel hat also ihren Mittelpunkt auf g, und da folglich die Potenz von O in bezug auf diese Kugel gleich r^2 ist, so ist sie zur Grundkugel orthogonal.

Digitized by Google

Mit Benutzung der von Herrn Reye eingeführten Bezeichnungen[1]) können wir zusammenfassend sagen:

Bei der ersten und zweiten Art bleibt jede Kugel desjenigen Kugelgebüsches, das mit der betreffenden Inversion das gleiche Zentrum und die gleiche Potenz hat, und keine andere invariant; bei der dritten und vierten Art bleiben alle Kugeln je eines bestimmten Kugelbüschels und alle Kugeln des zu ihm orthogonalen Kugelbündels und keine anderen invariant. Die ausgezeichnete Ebene der dritten Art ist die Potenzebene des invarianten Kugelbüschels, die ausgezeichnete Gerade der vierten Art ist die Potenzachse des invarianten Kugelbündels.

Involutorische konforme Punkttransformationen des Raumes werden schon von Möbius gelegentlich der Behandlung der Aufgabe betrachtet: Zu einem System von Punkten im Raume ein kreisverwandtes derart zu bestimmen, daß erstens drei beliebige feste Punkte des Systems mit den ihnen im andern Systeme entsprechenden Punkten identisch sind, und daß zweitens eine beliebig gewählte durch die drei Punkte gehende Kugelfläche K in dem andern System sich selbst zur entsprechenden hat.[2]) Möbius findet drei diesen Bedingungen genügende und dem gegebenen involutorisch entsprechende Systeme. Von den dort als erster, zweiter und dritter Fall bezeichneten Systemen gehört das erste und dritte zu unserer ersten Art; sie unterscheiden sich bei Möbius dadurch, daß K (bei Möbius: s) in seinem dritten Fall die Grundkugel der Inversion, im ersten aber eine zur Grundkugel orthogonale ist; sein zweiter Fall gehört zu unserer dritten Art. Unsere zweite und vierte Art konnte bei Möbius nicht auftreten, da bei der zweiten kein reeller Punkt, bei der vierten nur zwei reelle Punkte invariant bleiben, aber nicht drei Punkte, wie die Möbiussche Aufgabe verlangt.

Charlottenburg, März 1907.

1) Reye. Synthetische Geometrie der Kugeln und linearen Kugelsysteme. Leipzig 1879. Nr. 11. 45. 49.

2) Möbius. Die Theorie der Kreisverwandtschaft in rein geometrischer Darstellung. § 38 c). Abhandl. der K. Sächs. Ges. d. W. Bd. 2. = Werke Bd. 2. S. 296.

Digitized by Google

Über Formen, die vollständige Potenzen sind.

Von JOSEF KÜRSCHÁK in Budapest.

1. Herr David Hilbert hat bereits im 27. Bande der Mathematischen Annalen in eleganter Weise die Bedingungen ausgedrückt, unter welchen eine binäre Form oder die entsprechende ganze rationale Funktion $f(x)$ als eine vollständige μ-te Potenz darstellbar ist. Hingegen scheint es bisher unbemerkt geblieben zu sein, daß damit die Bedingungen einer sochen Darstellung auch für die ganzen rationalen Funktionen von mehreren Veränderlichen bestimmt sind, indem der folgende Satz gilt:

Die ganze rationale Funktion $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ vom Grade $n = \mu\nu$ ist nur dann und dann immer die μ-te Potenz einer rationalen ganzen Funktion vom Grade ν, wenn

$$f(x_1 + \lambda y_1,\ x_2 + \lambda y_2,\ \ldots,\ x_m + \lambda y_m),$$

bloß als Funktion von λ betrachtet, eine vollständige μ-te Potenz ist.

Daß $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ nur unter dieser Bedingung als eine vollständige μ-te Potenz dargestellt werden kann, ist selbstverständlich. Daß aber diese notwendige Bedingung auch eine hinreichende ist, ergibt sich aus den folgenden Überlegungen.

Es bedeute $g(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ die Summe derjenigen Glieder von $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, die genau vom n-ten Grade sind, und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ seien solche Zahlen, für die $g(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) = 1$. Es ist dann in

$$F(\lambda) = f(x_1 + \lambda\alpha_1,\ x_2 + \lambda\alpha_2,\ \ldots,\ x_m + \lambda\alpha_m)$$

der Koeffizient von λ^n gleich 1. Die Koeffizienten der übrigen Potenzen von λ sind ganze rationale Funktionen der Parameter $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Wenn nun

$$f(x_1 + \lambda y_1,\ x_2 + \lambda y_2,\ \ldots,\ x_m + \lambda y_m),$$

bloß als Funktion von λ betrachtet, für jeden Wert der Parameter x und y als vollständige μ-te Potenz darstellbar ist, so gilt dies auch dann, wenn $y_1 = \alpha_1,\ y_2 = \alpha_2,\ \ldots,\ y_m = \alpha_m$. Somit ist im betrachteten Falle $F(\lambda)^{\frac{1}{\mu}}$ eine rationale ganze Funktion von λ. Entwickeln wir diese Funktion nach absteigenden Potenzen von λ, so kann dies so geschehen, daß wir

$$F(\lambda) = \lambda^{\mu\nu}\left[1 + \vartheta\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]$$

Digitized by Google

setzen, in der Reihe

$$F(\lambda)^{\frac{1}{\mu}} = \lambda^{\nu}\left[1 + \vartheta\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]^{\frac{1}{\mu}} = \lambda^{\nu}\left[1 + \binom{\frac{1}{\mu}}{1}\vartheta\left(\frac{1}{\lambda}\right) + \cdots\right]$$

die einzelnen Glieder nach den absteigenden Potenzen von λ entwickeln, endlich diejenigen Glieder, welche dieselbe Potenz von λ enthalten, zusammenziehen. In $\vartheta\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, also auch in der für $F(\lambda)^{\frac{1}{\mu}}$ erhaltenen Reihe, sind die Koeffizienten ganze rationale Funktionen von $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Außerdem wird die Reihe mit der nullten Potenz von λ abbrechen, weil $F(\lambda)^{\frac{1}{\mu}}$ eine ganze rationale Funktion von λ ist.

Bezeichnen wir die rationale ganze Funktion von $x_1, x_2, \ldots, x_m$, mit welcher die nullte Potenz von λ in der für $\Phi(\lambda) = F(\lambda)^{\frac{1}{\mu}}$ erhaltenen Reihe multipliziert ist, mit $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, so folgt aus der Gleichung $F(\lambda) = \Phi(\lambda)^{\mu}$ für $\lambda = 0$ unmittelbar $f = \varphi^{\mu}$.

2. Wir wollen uns bei der Anwendung des gefundenen Satzes auf homogene Funktionen beschränken.

Sind $a_x^n = b_x^n = \cdots$ Symbole einer homogenen Form f der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_m$, so ist f dann und nur dann die vollständige n-te Potenz einer linearen Form, wenn $(a_x + \lambda a_y)^n$, als Funktion von λ betrachtet, eine vollständige n-te Potenz ist. Dafür ist aber bekanntlich das identische Bestehen von

$$(1) \qquad (a_x b_y - a_y b_x)^2 (a_x + \lambda a_y)^{n-2} (b_x + \lambda b_y)^{n-2} = 0$$

die notwendige und hinreichende Bedingung. Diese Bedingungsgleichung läßt sich noch durch die einfachere Gleichung

$$(2) \qquad (a_x b_y - a_y b_x)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2} = 0$$

ersetzen. Denn schreiben wir $x_i - \lambda y_i$ in (1) anstatt x_i, oder $x_i + \lambda y_i$ in (2) anstatt x_i, so gehen die Gleichungen (1) und (2) in einander über.

3. In ähnlicher Weise erhalten wir für jeden Wert von μ und ν die gesuchte Bedingung, daß $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ die μ-te Potenz einer homogenen Form von ν-tem Grade darstelle, wenn wir in der von Hilbert für binäre Formen gefundenen Bedingungsgleichung anstatt der symbolischen Faktoren von der Gestalt (ab) die entsprechenden Faktoren $a_x b_y - a_y b_x$ setzen.

Wie aus den Untersuchungen über das von Clebsch aufgestellte Übertragungsprinzip bekannt ist, kommt es auf dasselbe heraus, wenn wir statt (ab) und a_x überall $(abvw \ldots)$ resp. $(auvw \ldots)$ setzen.

Budapest, den 27. Jänner 1908.

Digitized by Google

Sur un mode de génération de la cubique gauche;

Par Lucien Godeaux, à Liége.

Dans cette note, nous donnons un procédé de génération de la cubique gauche que nous croyons nouveau. Nous en montrons quelques applications à l'étude de certaines congruences de cubiques gauches.

1. Soient A_1, A_2 deux points quelconques fixes; α_1, α_2 deux plans fixes et a_1, a_2 deux droites fixes.

Le troisième côté d'un triangle dont les deux premiers passent chacun par un des points A_1, A_2 s'appuie nécessairement sur la droite A_1A_2.

Désignons par Q le système de droites s'appuyant sur a_1, a_2 et A_1A_2. Ces droites marquent généralement sur α_1, α_2 des coniques ε_1, ε_2. Projetons ε_1 de A_1 et ε_2 de A_2. Les cônes ainsi obtenus ont en commun la droite A_1A_2 et une cubique gauche $\varkappa_3$ passant par A_1, A_2 et s'appuyant en deux points sur la droite (α_1, α_2), ces points étant précisément ceux où cette droite rencontre le système réglé Q. On a donc:

Si un triangle se déforme de telle manière que deux sommets décrivent les plans α_1, α_2, tandis que les côtés opposés passent par les points A_1, A_2 et que le troisième côté décrit un système de génératrices d'une quadrique passant par la droite A_1A_2, le troisième sommet décrira une cubique gauche passant par A_1, A_2 et rencontrant deux fois la droite (α_1, α_2).

Ce théorème permet de construire facilement une cubique gauche donnée par six points, par exemple, mais nous allons nous en servir ici pour engendrer quelques congruences de cubiques gauches.

2. Par la droite (α_1, α_2) et par la cubique gauche $\varkappa_3$ passent toutes les quadriques d'un faisceau.

Chacune de ces quadriques peut être engendrée de la manière suivante:

Si un triangle se déforme de telle manière que deux de ses sommets décrivent deux plans α_1, α_2 tandis que les côtés opposés passent par les points A_1, A_2 et que le troisième côté s'appuie sur deux droites a et A_1A_2, le troisième sommet décrira une quadrique passant par A_1, A_2 et par la droite (α_1, α_2).

Nous avons établi ce théorème sous une forme plus générale dans une note "*Sur la génération de quelques surfaces algébriques*" qui paraîtra sous peu.

Nous nous servirons de ce théorème dans la suite.

Digitized by Google

3. Supposons que la droite a_1 décrive un faisceau-plan de sommet P_1 et de plan π_1. De même, faisons décrire à la droite a_2 un faisceau-plan (P_2, π_2).

Nous obtenons de la sorte ∞^2 systèmes Q. Les cubiques gauches correspondantes engendrent une congruence ϱ_1.

On voit immédiatement que les points A_1 et A_2 sont des points fondamentaux et que la droite (α_1, α_2) est une droite fondamentale de la congruence ϱ_1.

Recherchons l'ordre de ϱ_1, c'est-à-dire le nombre de cubiques gauches de la congruence passant par un point X.

Par le point X menons les droites $x_1 \equiv (A_1, X)$ et $x_2 \equiv (A_2, X)$. La droite x qui joint les points (α_1, x_1) et (α_2, x_2) s'appuie évidemment sur la droite $A_1 A_2$. Le point (x_1, π_1) détermine une droite du faisceau (P_1, π_1) et le point (x_2, π_2) une droite du faisceau (P_2, π_2). Les droites qui s'appuient sur ces deux droites et sur $A_1 A_2$ engendrent un système Q comprenant x. A ce système Q correspond une cubique gauche passant par X, donc la congruence ϱ_1 est du premier ordre.

Recherchons maintenant la classe de ϱ_1.

Soit y une droite. Projetons la droite y des points A_1 et A_2 respectivement en y_1 et y_2 sur α_1 et α_2. Aux points de y correspondent les droites s'appuyant sur y_1, y_2 et $A_1 A_2$. La classe de la congruence ϱ_1 est évidemment égale au nombre de systèmes Q qui ont deux droites en commun avec le système correspondant à y. Le principe de Chasles permet de vérifier aisément que ce nombre est quatre. Donc la congruence ϱ_1 est de classe quatre.

Nous avons dit plus haut que la congruence ϱ_1 possédait deux points fondamentaux A_1, A_2 et une corde fondamentale (α_1, α_2). Les cubiques gauches de la congruence sont encore assujetties à d'autres conditions que nous allons énumérer.

Aux droites qui s'appuient sur $A_1 A_2$ et sur une droite du faisceau (P_1, π_1) correspondent les points d'une quadrique. Lorsque cette dernière droite décrit le faisceau, on a un faisceau de quadriques qui passent toutes par A_1, A_2 et (α_1, α_2). Recherchons les autres points communs à toutes les quadriques de ce faisceau.

Les congruences aux droites desquelles correspondent les points des quadriques ont en commun deux faisceaux-plans. Le premier a pour sommet $(A_1 A_2, \pi_1)$ et pour plan π_1, le second a pour sommet P_1 et pour plan $P_1 A_1 A_2$.

Tous les systèmes Q envisagés dans la question qui nous occupe ont une droite située dans chacun de ces faisceaux-plans, donc les lignes qui correspondent à ces faisceaux sont des lignes singulières de ϱ_1.

Digitized by Google

Aux droites du premier faisceau correspondent les points d'une droite qui s'appuie sur (α_1, α_2) et aux droites du second les points d'une conique passant par A_1, A_2, s'appuyant sur (α_1, α_2) et sur la droite trouvée ci-dessus.

On aurait la même chose en considérant le faisceau (P_2, π_2)

En résumé: *La congruence ϱ_1 est d'ordre un et de classe quatre, elle possède deux points fondamentaux et une droite fondamentale; les lignes singulières sont deux droites s'appuyant sur la corde fondamentale et deux coniques non co-planaires passant par les points fondamentaux et par les points singuliers situés dans leur plan.*

4. Soient φ_1 et φ_2 deux faisceaux de complexes linéaires.

Prenons pour la droite a_1 la conjuguée de la droite $A_1 A_2$ par rapport à un complexe du faisceau φ_1 et pour la droite A_2 la conjuguée de la même droite, mais par rapport à un complexe du faisceau φ_2.

Les droites a_1 et a_2 sont en nombre ∞^1, on a donc ∞^2 systèmes Q et par conséquent une congruence ϱ_2 de cubiques gauches.

Aux droites qui s'appuient sur $A_1 A_2$ et sur une droite a_1 correspondent les points d'une quadrique passant par A_1, A_2 et (α_1, α_2). Lorsque la droite a_1 varie suivant la règle indiquée plus haut, il est aisé de constater que la quadrique décrit un faisceau ψ_1 dont la base est formée par la droite (α_1, α_2) et par une cubique gauche c_1 bisécante de (α_1, α_2) et passant par A_1 et A_2.

On obtient de même avec a_2 un faisceau ψ_2 et une courbe c_2.

On en conclut que les cubiques gauches de la congruence ϱ_2 sont les intersections partielles des quadriques de deux faisceaux ψ_1 et ψ_2.

De là: *La congruence ϱ_2 est bilinéaire et possède deux points et une corde fondamentaux. Elle possède deux cubiques gauches singulières telles que chaque cubique de la congruence s'appuie deux fois sur chacune de ces lignes singulières.*

Cette congruence est un cas particulier d'une congruence de M. Veneroni *(Sopra alcuni sistemi di cubiche gobbe. Rendiconti di Palermo. 1902, tome XVI).* M. Stuyvaert fera paraître avant peu un mémoire sur un système plus général. On peut aussi consulter de ce dernier Géomètre deux Mémoires où il expose une théorie complète des congruences de variétés algébriques *(C. R. novembre 1905; Journal de Crelle, 1907 — tome 132).*

Liége, 27 Janvier 1908.

Digitized by Google

Rezensionen.

J. Thomae. Grundriß einer analytischen Geometrie der Ebene. Leipzig 1906, B. G. Teubner.

Der Grundriß bietet eine in langjähriger Erfahrung bewährte Auswahl von Eigenschaften der Gebilde ersten und zweiten Grades mit gleichmäßiger Berücksichtigung der projektiven und der metrischen Richtung.

Er beginnt einleitungsweise mit den Begriffen der Kollineation und des Doppelverhältnisses, die zuerst ohne geometrische Deutung nur algebraisch eingeführt werden. Sodann folgt zuerst die Geometrie in der Geraden und im Strahlbüschel. Hieran reiht sich die Lehre von den Punkt- und Linienkoordinaten in der Ebene, worauf in größerer Ausführlichkeit die Geometrie des Kreises geboten wird. Nach Entwicklung der Hauptsätze über zwei- und dreireihige Determinanten folgt die Theorie der Kegelschnitte, die in fünf Abschnitten nach den verschiedensten Richtungen ausgeführt wird. Ein Abschnitt über die Kollineation in der Ebene und ein Abschnitt vermischten Inhaltes bilden den Schluß.

Der reiche theoretische Inhalt des Buches wird durch Konstruktionen und Aufgaben in anregender Weise ergänzt. Bei der sorgfältigen und klaren Darstellung wird das Buch den Studierenden ein willkommener Leitfaden sein.

Wenn ich einige Stellen herausgreife, um sie mit kurzen Zusätzen zu versehen, so mag dies nur das Interesse kennzeichnen, das mir selbst durch das Buch erweckt worden ist.

I. Zu § 18, S. 16 würde sich leicht ein *elementarer Beweis* eines Hauptsatzes über vereinigt gelegene projektive Punktreihen anschließen lassen, der vielleicht neben dem *auf die symbolische Darstellung der Invarianten* gegründeten (Clebsch-Lindemann, Geometrie der Ebene, 1. Aufl. S. 200, 2. Aufl. S. 397) nicht unwillkommen sein dürfte.

Ist in gemeinen Koordinaten x, x' auf der Punktreihe die Gleichung einer projektiven Beziehung:

$$Axx' + Bx + Cx' + D = 0, \tag{1}$$

so sind die beiden sich selbst entsprechenden Punkte oder Doppelpunkte:

$$e_1 = \frac{-(B+C)+\sqrt{E}}{2A}, \quad e_2 = \frac{-(B+C)-\sqrt{E}}{2A}, \tag{2}$$

wo:

$$E = (B+C)^2 - 4AD = (B-C)^2 - 4(AD-BC) \tag{3}$$

nicht verschwinde.

Digitized by Google

Nun ist für $A \neq 0$ die linke Seite von (1):

$$Axx' + \frac{B+C}{2}(x+x') + \frac{B-C}{2}(x-x') + D$$

$$= A\left\{xx' + \frac{B+C}{2A}(x+x') + \frac{\sqrt{E}}{2A}(x-x') + \frac{D}{A} + \frac{B-C-\sqrt{E}}{2A}(x-x')\right\}$$

$$= A\left\{\left(x + \frac{B+C-\sqrt{E}}{2A}\right)\left(x' + \frac{B+C+\sqrt{E}}{2A}\right) + \frac{B-C-\sqrt{E}}{2A}(x-x')\right\}.$$

Nach (2) besteht daher die *identische Gleichung*:

$$(4)\quad Axx' + Bx + Cx' + D = A\left\{(x-e_1)(x'-e_2) + \frac{B-C-\sqrt{E}}{2A}(x-x')\right\}.$$

Das Vorzeichen von $\sqrt{E}$ ist in (2) und (4) überall dasselbe; mit Änderung dieses Vorzeichens vertauschen sich e_1 und e_2. Demnach kann die Gleichung (1) für $A \neq 0$ in jeder der beiden Formen dargestellt werden:

$$(x-e_1)(x'-e_2) = -\frac{B-C-\sqrt{E}}{2A}(x-x'),$$

$$(x-e_2)(x'-e_1) = -\frac{B-C+\sqrt{E}}{2A}(x-x').$$

Hieraus folgt durch Division:

$$(5)\quad \frac{(x-e_1)(x'-e_2)}{(x-e_2)(x'-e_1)} = \frac{B-C-\sqrt{E}}{B-C+\sqrt{E}},$$

also:

In zwei vereinigt gelegenen projektiven Punktreihen ist das Doppelverhältnis zweier entsprechenden Punkte x und x' zu den beiden Doppelpunkten e_1 und e_2 konstant.

Für $A = 0$, $B + C \neq 0$ hat man statt (2) die Doppelpunkte:

$$(6)\quad e_1 = e = -\frac{D}{B+C}, \quad e_2 = \infty;$$

statt der Identität (4):

$$(7)\quad \begin{aligned} Bx + Cx' + D &= (B+C)\left\{(x-e) + \frac{C}{B+C}(x'-x)\right\} \\ &= (B+C)\left\{(x'-e) + \frac{B}{B+C}(x-x')\right\} \end{aligned}$$

und statt (5):

$$(8)\quad \frac{x-e}{x'-e} = -\frac{C}{B}.$$

II. In der sorgfältig durchgeführten *Transformation der Parabel auf die kanonische Gleichungsform* § 88, S. 87 und den zugehörigen Determinantensätzen § 85, S. 85 wäre vielleicht eine weitere Ergänzung in der Richtung zu machen, daß die Stellung der *Parabel* einerseits im *Hauptachsen-* und andererseits im *Mittelpunktsproblem* deutlicher hervortritt, und zugleich die Determinantensätze § 85, S. 85 als die *notwendige* Grundlage zur Geltung kommen. Dazu mögen die folgenden Bemerkungen dienen.

Digitized by Google

1. Die Determinantensätze über das Verschwinden von A_{33}. Für die symmetrische Determinante des Kegelschnittes:

$$(1) \qquad g(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}:$$

$$(2) \qquad A = |a_{kl}|; \quad k, l = 1, 2, 3,$$

deren Unterdeterminanten mit A_{kl} bezeichnet seien, ist unbedingt:

$$(3) \quad A_{22}A_{33} - A_{23}^2 = Aa_{11}, \quad A_{33}A_{11} - A_{31}^2 = Aa_{22}, \quad A_{23}A_{31} - A_{12}A_{33} = Aa_{12}.$$

Wenn daher:

$$(4) \qquad A_{33} = 0$$

wird, so folgt:

$$(5) \qquad -A_{23}^2 = Aa_{11}, \quad -A_{13}^2 = Aa_{22}, \quad A_{23}A_{13} = Aa_{12}.$$

Setzt man daher zur Abkürzung:

$$(6) \qquad A'_{33} = a_{11} + a_{22},$$

so gibt die Addition der beiden ersten Gleichungen (5):

$$(7) \qquad -(A_{13}^2 + A_{23}^2) = AA'_{33}.$$

Bei reellen a_{kl} sind daher die Bedingungen (die der Parabel):

$$(8) \qquad A_{33} = 0, \quad A_{13} \text{ und } A_{23} \text{ nicht beide } 0$$

gleichbedeutend mit:

$$(9) \qquad A_{33} = 0, \quad AA'_{33} \neq 0.$$

Es folgt unter diesen Bedingungen auch aus (5):

$$(10) \qquad A_{13} : A_{23} = -a_{12} : a_{11} = a_{22} : -a_{12}.$$

2. Allgemeine Transformation des rechtwinkligen Koordinatensystems. Die auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem Oxy bezogene Gleichung (1) werde durch die Substitution:

$$(11) \qquad x = x_0 + \alpha_1\xi + \alpha_2\eta, \quad y = y_0 + \beta_1\xi + \beta_2\eta$$

auf ein neues rechtwinkliges System $\Omega\xi\eta$ transformiert, dessen Anfangspunkt Ω die Koordinaten x_0, y_0 und dessen Achsen ξ und η die Richtungskosinus α_1, β_1 und α_2, β_2 haben. Man erhält für das neue System die Gleichung:

$$(12) \qquad a'_{11}\xi^2 + 2a'_{12}\xi\eta + a'_{22}\eta^2 + 2a'_{13}\xi + 2a'_{23}\eta + a'_{33} = 0,$$

wo die Koeffizienten die Werte haben:

$$(13) \quad \begin{cases} a'_{11} = a_{11}\alpha_1^2 + 2a_{12}\alpha_1\beta_1 + a_{22}\beta_1^2, & a'_{22} = a_{11}\alpha_2^2 + 2a_{12}\alpha_2\beta_2 + a_{22}\beta_2^2, \\ a'_{12} = a_{11}\alpha_1\alpha_2 + a_{12}(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + a_{22}\beta_1\beta_2, \end{cases}$$

$$(14) \quad a'_{13} = g_1^0\alpha_1 + g_2^0\beta_1, \; a'_{23} = g_1^0\alpha_2 + g_2^0\beta_2, \; a'_{33} = g^0 = g(x_0, y_0) = g_1^0x_0 + g_2^0y_0 + g_3^0$$

Digitized by Google

und zur Abkürzung gesetzt ist:

$$(15)\qquad \begin{aligned} g_1^0 = g_1(x_0, y_0) = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}, \quad g_2^0 = a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}, \\ g_3^0 = a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}. \end{aligned}$$

3. Hauptachsenrichtungen und Hauptachsenkoeffizienten. Die Koeffizienten (13) hängen nicht von $\Omega = x_0, y_0$, sondern nur von den Richtungen $\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2$ ab. Man kann diese in bekannter Weise so bestimmen, daß $a'_{12} = 0$ wird, und die Gleichung (12) die Form erhält:

$$(16)\qquad \lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + 2a'_{13}\xi + 2a'_{23}\eta + a'_{33} = 0.$$

Es sind dann λ_1, λ_2 die stets reellen Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$(17)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - A'_{33}\lambda + A_{33} = 0,$$

und die Achsenrichtungen $\alpha_i, \beta_i (i = 1, 2)$ bestimmen sich aus

$$(18)\qquad \begin{cases} (a_{11} - \lambda_i)\alpha_i + a_{12}\beta_i = 0, \\ a_{21}\alpha_i + (a_{22} - \lambda_i)\beta_i = 0, \\ \alpha_i^2 + \beta_i^2 = 1 \end{cases}$$

bis auf die Pfeilspitzen eindeutig, wenn λ_1 und λ_2 verschieden sind. Diese werden aber nur gleich für $a_{11} - a_{22} = 0$, $a_{12} = 0$.

Immer dann und nur dann, wenn:

$$(19)\qquad A_{33} = 0, \quad A'_{33} \neq 0,$$

ist eine der beiden Wurzeln 0, *ohne daß es die andere ist, etwa*:

$$(20)\qquad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = A'_{33}.$$

Die Gleichung (16) wird dann, ohne Rücksicht auf die Wahl von Ω:

$$(21)\qquad A'_{33}\eta^2 + 2a'_{13}\xi + 2a'_{23}\eta + a'_{33} = 0.$$

Die Richtungskosinus der ξ-Achse werden gleichzeitig nach (18) mit $\lambda_i = \lambda_1 = 0$:

$$(22)\qquad \alpha_1 : \beta_1 = -a_{12} : a_{11} = a_{22} : -a_{12}.$$

4. Mittelpunkt. Jeder Punkt mit den homogenen Koordinaten x_0, y_0, t_0, der den Gleichungen:

$$(23)\qquad \begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}t_0 = 0, \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}t_0 = 0 \end{cases}$$

genügt, ist ein *„Mittelpunkt"* der Kurve. Er ist ein *einziger*:

$$x_0 : y_0 : t_0 = A_{13} : A_{23} : A_{33},$$

wenn A_{13}, A_{23}, A_{33} nicht alle drei verschwinden. Er ist dann für $A_{33} \neq 0$ *endlich*, für $A_{33} = 0$ *unendlich fern* in der Richtung (vgl. meine „Analytische Geometrie", 1905, § 22, (13)):

$$(24)\qquad \alpha_1 : \beta_1 = A_{13} : A_{23}.$$

Digitized by Google

Immer dann und nur dann gibt es einen einzigen unendlich fernen Mittelpunkt, wenn die Bedingungen (8) *erfüllt sind.*

Infolge der Determinantensätze (10) sind nun die Richtungen (22) und (24) dieselben.

Die Richtung nach dem unendlich fernen Mittelpunkt stimmt mit der Richtung der der Wurzel $\lambda_1 = 0$ entsprechenden Hauptachse (der Hauptachse der Parabel) überein.

5. Herstellung der Scheitelgleichung. Der Scheitel der Parabel ist ein Punkt x_0, y_0 der Kurve, dessen Normale die Richtung der Hauptachse hat. Er ist also definiert durch die Gleichungen:

$$g^0 = 0 \qquad g_1^0 : g_2^0 = A_{13} : A_{23}. \tag{25}$$

Mit einem Proportionalitätsfaktor ϱ gibt die Proportion:

$$\begin{cases} g_1^0 + \varrho A_{13} = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} + \varrho A_{13} = 0, \\ g_2^0 + \varrho A_{23} = a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} + \varrho A_{23} = 0. \end{cases} \tag{26}$$

Nun ist für $A_{33} = 0$:

$$\begin{aligned} a_{11}A_{13} + a_{21}A_{23} (+ a_{31}A_{33}) &= 0, \\ a_{12}A_{13} + a_{22}A_{23} (+ a_{32}A_{33}) &= 0, \\ a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} (+ a_{33}A_{33}) &= A. \end{aligned}$$

Daher folgt aus (26) durch Multiplikation mit A_{13} und A_{23} und Addition:

$$A + \varrho (A_{13}^2 + A_{23}^2) = 0,$$

also nach (7):

$$\varrho = \frac{1}{A'_{33}}. \tag{27}$$

Der Scheitelpunkt ist daher durch die erste Gleichung (25) *in Verbindung mit:*

$$\begin{cases} U_1 = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} + \dfrac{A_{13}}{A'_{33}} = 0, \\ U_2 = a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} + \dfrac{A_{23}}{A'_{33}} = 0 \end{cases} \tag{28}$$

dargestellt.

Beide Gleichungen (28) *stellen,* weil identisch $A_{13}U_1 + A_{23}U_2 = 0$ ist, *dieselbe Gerade dar, die Hauptachse der Parabel.* (Thomae S. 88, Z. 16 v. o.).

Die Richtungskosinus der Hauptachse ξ sind nach (24):

$$\alpha_1 = \frac{A_{13}}{\sqrt{A_{13}^2 + A_{23}^2}}, \quad \beta_1 = \frac{A_{23}}{\sqrt{A_{13}^2 + A_{23}^2}}, \tag{29}$$

wo durch Verfügung über das Vorzeichen der Wurzel die Pfeilspitze der ξ-Achse bestimmt wird (meine Anal. Geom. § 12, 7). Sind α_2, β_2 die Richtungskosinus der η-Achse, so ist:

$$\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 = 0. \tag{30}$$

Digitized by Google

Führt man nun in (21) als Anfangspunkt $\mathfrak{Q}$ den Scheitelpunkt ein, so wird nach (14) mit Rücksicht auf (26) und die erste Gleichung (25):

$$a'_{13} = -\varrho(A_{13}\alpha_1 + A_{23}\beta_1), \quad a'_{23} = -\varrho(A_{13}\alpha_2 + A_{23}\beta_2), \quad a'_{33} = 0$$

oder nach (29), (30) und (27), (7):

$$a'_{13} = -\varrho\sqrt{A_{13}^2 + A_{23}^2} = -\frac{\sqrt{-AA'_{33}}}{A'_{33}}, \quad a'_{23} = 0, \quad a'_{33} = 0.$$

Die Gleichung der Parabel wird daher aus (21):

$$\eta^2 - 2\frac{\sqrt{-AA'_{33}}}{A'^2_{33}}\xi = 0. \tag{31}$$

Die Wurzel ist nach (7) *reell*; ihr *Vorzeichen* ist dasselbe wie in (29). Mit positiven Zeichen beider Wurzeln bezeichnet daher die Richtung (29) diejenige Hauptachsenrichtung, nach der die Parabel offen ist, weil dann die Gleichung (31) nur positive Werte von ξ zuläßt. Nach (9) ist der Parameter stets endlich und von 0 verschieden.

6. Die Koordinaten des Scheitels. Die Koordinaten des Scheitels müssen sich auch so darstellen lassen, daß *ihre Bestimmtheit allein aus der Voraussetzung* (9) *hervorgeht.*

Man schreibt dazu die erste Gleichung (25) mittels (26) in der Form:

$$g^0 = g_1^0 x_0 + g_2^0 y_0 + g_3^0 = -\varrho(A_{13}x_0 + A_{23}y_0) + g_3^0$$
$$= \left(a_{31} - \frac{A_{13}}{A'_{33}}\right)x_0 + \left(a_{32} - \frac{A_{23}}{A'_{33}}\right)y_0 + a_{33} = 0.$$

Man hat daher mit Hinzunahme von (26) die Gleichungen:

$$a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} + \varrho A_{13} = 0,$$
$$a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} + \varrho A_{23} = 0,$$
$$\left(a_{31} - \frac{A_{13}}{A'_{33}}\right)x_0 + \left(a_{32} - \frac{A_{23}}{A'_{33}}\right)y_0 + a_{33} = 0.$$

Da diese Gleichungen in x_0, y_0, 1, ϱ linear und homogen sind, verhalten sich diese vier Größen wie die Unterdeterminanten der Matrix der Koeffizienten (meine Anal. Geom. S. 421, (14)). Die dritte dieser Unterdeterminanten hat aber den Wert: $-2AA'_{33}$. Daher ist der *Scheitelpunkt*:

$$(32)\quad x_0 = -\frac{1}{2AA'_{33}}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & A_{13} \\ a_{22} & a_{23} & A_{23} \\ a_{32} - \frac{A_{32}}{A'_{33}} & a_{33} & 0 \end{vmatrix}, \quad y_0 = \frac{1}{2AA'_{33}}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & A_{13} \\ a_{21} & a_{23} & A_{23} \\ a_{31} - \frac{A_{31}}{A'_{33}} & a_{33} & 0 \end{vmatrix}.$$

Er ist somit unter der Voraussetzung (9) ein bestimmter endlicher Punkt.

III. In § 106, S. 110 ist Z. 8 v. o. die lineare und Z. 7 v. u. die numerische Exzentrizität mit e bezeichnet. Vielleicht würden die Formeln S. 110 überhaupt besser ohne die Wurzelzeichen zu übersehen sein.

Geht nämlich wie üblich die x-Achse nach rechts und bezeichnet man mit $2a$ die Hauptachsenlänge, mit $F = e$, 0 und $F = -e$, 0 die Koordinaten

Digitized by Google

des rechten und linken Brennpunktes der Ellipse und Hyperbel und mit $r = \overline{FP}$ und $r' = \overline{F'P}$ die *absoluten Entfernungen* des Kurvenpunktes $P = x, y$ von F und F', so ist für

die Ellipse: $r = a - \frac{e}{a}x, \quad r' = a + \frac{e}{a}x;$

den rechten Hyperbelzweig: $r = -a + \frac{e}{a}x, \quad r' = a + \frac{e}{a}x;$

den linken Hyperbelzweig: $r = a - \frac{e}{a}x, \quad r' = -a - \frac{e}{a}x.$

Ebenso sind § 170, S. 168 die *relativen* (nach der positiven x-Achse orientierten, meine Analyt. Geom. § 1, 4; 8) *Entfernungen* des Punktes P von der rechten und linken Direktrix:

$$d = x - \frac{a^2}{e}, \quad d' = x + \frac{a^2}{e}.$$

Daher ist für

die Ellipse: $r + \frac{e}{a}d = 0, \quad r' - \frac{e}{a}d' = 0;$

den rechten Hyperbelzweig: $r - \frac{e}{a}d = 0, \quad r' - \frac{e}{a}d' = 0;$

den linken Hyperbelzweig: $r + \frac{e}{a}d = 0, \quad r' + \frac{e}{a}d' = 0.$

Wie die *Brennpunktseigenschaft* der Ellipse und Hyperbel *auf der Identität:*

$$-a^2(a^2 - e^2)\left\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - e^2} - 1\right\} = \left\{a^2 - \left(\frac{r + r'}{2}\right)^2\right\}\left\{a^2 - \left(\frac{r - r'}{2}\right)^2\right\}$$

beruht, so liegt die *Brennpunkt-Direktrixeigenschaft in der Identität:*

$$(a^2 - e^2)\left\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - e^2} - 1\right\} = r^2 - \frac{e^2}{a^2}d^2 = r'^2 - \frac{e^2}{a^2}d'^2$$

begründet.

IV. Die harmonische Kovariante zweier Kegelschnitte § 164, S. 163 dürfte vielleicht angemessener und ohne größere Schwierigkeit mit *Dreieckskoordinaten* zu behandeln sein.

Rostock, Juli 1906. O. Staude.

Federico Amodeo. Lezioni di geometria proiettiva dettate nella R. Università di Napoli, terza edizione (I^a. ed. tipografica) migliorata e aumentata, con 420 figure intercalate nel testo e molti esercizi, di pagine XIV e 451, Luigi Pierro 1905.

Nachdem das vorliegende Werk bereits in zwei autographierten Ausgaben aus den Jahren 1896 und 1902 herausgegeben war, erscheint es jetzt mit wesentlich reicherem Inhalt zum ersten Mal in eigentlicher Buchform.

Es enthält eine systematische Darstellung der projektiven Geometrie bis zur Lehre von den Kegelschnitten.

Ein *einleitendes Kapitel* bringt zunächst die Grundlegung der projektiven Geometrie. Nachdem auf Grund eines Systems von Postulaten die

Digitized by Google

Grundgebilde der verschiedenen Stufen eingeführt (§ 1) und im einzelnen beschrieben und benannt worden sind (§ 2), wird der Euklidsche Raum dem projektiven untergeordnet (§ 3). Sodann werden die Operationen des Projizierens und Schneidens (§ 4) und der Begriff der geometrischen Figuren (§ 5) eingeführt. Hieran schließt sich die Definition der perspektiven Beziehung der Grundgebilde (§ 6) und des Prinzips der Dualität (§ 7) und des Sinnes der einförmigen Grundgebilde (§ 8). An die Theorie der harmonischen Gebilde (§ 9) reiht sich zuletzt die allgemeine Erklärung der projektiven Verwandtschaften mit ihren beiden Formen der Kollineation (Homographie) und Korrelation (§ 10).

Der *erste Hauptteil* behandelt nunmehr die Gebiete erster Ordnung. In *Kapitel I* werden zunächst die Grundgebilde erster Stufe besprochen. Es beginnt mit der Einführung der Doppelverhältniskoordinate $\lambda = A_\infty B_0 B_1 B_\lambda$ des Punktes B_λ in der Geraden (des Strahles und der Ebene im Büschel), bezogen auf die drei Fundamentalpunukte $A_\infty B_0 B_1$, und der homogenen projektiven Koordinaten x_1, x_2 $(x_1 : x_2 = \lambda)$ und läßt daraus als spezielle Fälle die verschiedenen metrischen Koordinaten hervorgehen (§ 1). Nach der allgemeinen Erklärung der projektiven Beziehung zweier Grundgebilde erster Stufe (§ 2) wird sodann die bilineare Gleichung zwischen den Koordinaten λ und λ' entsprechender Elemente, sowie die lineare Substitution als Ausdruck der Koordinatentransformation einerseits und der projektiven Verwandtschaft andererseits besprochen (§ 3). Hierauf folgt die Untersuchung vereinigt gelegener projektiver Punktreihen, ihre Unterscheidung als hyperbolische, parabolische und elliptische und Anwendungen auf das Pascalsche Sechseck, ferner die Bildung von Produkten und Zyklen von Kollineationen (§ 4). Weiter wird die Kollineationsachse zweier in einer Ebene liegender projektiver Punktreihen eingeführt und darauf die Konstruktion solcher Reihen gegründet (§ 5). Daran schließt sich die besondere Behandlung projektiver Reihen und Büschel im Euklidschen Raume (§ 6), die Theorie der Involutionen, ihre analytische Darstellung und ihre Konstruktion, sowie ihr Vorkommen beim vollständigen Viereck (§ 7), und endlich die ausgearteten Formen der projektiven Beziehungen (§ 8). Das *II. Kapitel* ist der Theorie der imaginären Elemente im von Staudtschen Sinne gewidmet. Es handelt von der Transformation einer Kollineation mit einer anderen und der Vertauschbarkeit zweier Kollineationen (§ 1); von dem zu einem Punktepaare gehörigen Büschel von Kollineationen und der gleichzeitig zugehörigen Involution, im Anschluß daran von der Darstellung imaginärer Elemente (§ 2); von der Transformation einer Kollineation in ihre Inverse und von den Kollineationen und Involutionen, die untereinander harmonisch sind (§ 3), endlich von dem gemeinsamen Paare entsprechender Elemente zweier Involutionen oder vereinigt gelegener Kollineationen (§ 4). *Im III. Kapitel* werden die zwei- und dreiförmigen Grundgebilde untersucht. Zuerst werden die Bestimmungstücke und Bestimmungsweisen der Kollineationen und Korrelationen in der Ebene, im Büschel und im Raume und ihre besonderen Fälle besprochen (§ 1), sodann die Dreiecks- und Tetraederkoordinaten eingeführt und die Gleichungen der Kollineationen in allgemeiner und kanonischer Form aufgestellt (§ 2), endlich die Fundamentalpunkte der Kollineation durch die betreffende kubische oder biquadratische Gleichung bestimmt (§ 3). Eingehend werden die

Digitized by Google

besonderen Formen der Kollineationen im Euklidschen Raume behandelt (§ 4). Dann folgen die involutorischen Formen der Kollineation und Korrelation (§ 5) und die Einteilung der Polarsysteme der Ebene und des Büschels im Euklidschen Raume (§ 6), endlich die Einführung der imaginären Punkte und Geraden in der Ebene, Strahlen und Ebenen im Bündel (§ 7). *Der zweite Hauptteil* behandelt die Gebilde zweiter Ordnung. Im *I. Kapitel* werden die projektiven Eigenschaften der Kegelschnitte entwickelt. Die letzteren werden zuerst als Erzeugnisse projektiver Punktreihen oder Strahlbüschel, sodann als Fundamentalkurven einer Polarverwandtschaft eingeführt (§ 1). Sodann wird die weitere Einteilung in bezug auf die unendlich ferne Gerade vorgenommen und die besonderen Eigenschaften von Ellipse, Hyperbel und Parabel, Kreis und gleichseitiger Hyperbel besprochen, die Newtonsche Erzeugung der Kegelschnitte und endlich die Arten der Zylinder und Kegel im Euklidschen Raume (§ 2). Daran schließen sich die Sätze von Pascal und Brianchon mit ihren Folgerungen, die Sätze von Maclaurin und Braikenridge und über die Ponceletschen Polygone (§ 3), weiter das Theorem von Desargues und seine Anwendungen (§ 4), endlich die Arten der Berührung zweier Kegelschnitte und der Krümmungskreis. Das *II. Kapitel* gilt der Polarentheorie der Kegelschnitte. Von dem ebenen Polarsystem aus wird zu den Polareigenschaften der Kegelschnitte übergegangen, sodann die Bestimmung eines Kegelschnittes durch polare Beziehungen und die polarreziproken Figuren besprochen (§ 1), ferner die Konstruktion der Kegelschnitte aus reellen und konjugiert imaginären Elementen (§ 2). Eingehend werden die reellen und idealen Sehnen, konjugierten Durchmesser, umbeschriebene Parallelogramme und Sätze über den Flächeninhalt der Kegelschnitte, insbesondere auch der Kreis und die gleichseitige Hyperbel untersucht (§ 3), ebenso die auf die Brennpunkte bezüglichen Eigenschaften (§ 4). Daran schließen sich die Sätze über Fokallinien und Kreisschnittebenen beim Kegel zweiter Ordnung (§ 5). Das *III. Kapitel* beschäftigt sich mit den projektiven Verwandtschaften zweiter Ordnung. Hier werden zuerst die projektiven Beziehungen der Punkte und Tangenten zweier Kegelschnitte, sowie projektive Punktreihen und Involutionen auf demselben Kegelschnitt betrachtet (§ 1). Diese Betrachtungen werden zur Lösung von Fundamentalaufgaben über die Doppelelemente projektiver Punktreihen, zur Konstruktion der Schnittpunkte einer geraden Linie mit dem durch fünf Punkte gegebenen Kegelschnitt, der durch drei Punkte und zwei Tangenten gegebenen Kegelschnitte und zu anderen Aufgaben verwertet (§ 2). Hieran reiht sich die Unterscheidung der verschiedenen Lagebeziehungen zweier Kegelschnitte und die Behandlung von Aufgaben dritten Grades, darunter die Dreiteilung des Winkels mit Hilfe von kongruenten ungleichsinnigen Strahlbüscheln (§ 3). Den Schluß bilden die Hauptsätze über Büschel und Scharen von Kegelschnitten mit den Folgerungen über den Kegelschnitt der neun Punkte und den Feuerbachschen Kreis (§ 4).

Das Werk ist durch eine klare Darstellung und durchsichtige Anordnung des Stoffes ausgezeichnet. Besondere Beachtung verdient die sorgfältige Grundlegung der projektiven Geometrie, das beständige Zurückgehen von der projektiven auf die Euklidsche Geometrie und die Durchdringung der synthetischen Methoden mit der Anwendung der projektiven Koordinaten.

Digitized by Google

Am Ende eines jeden Kapitels sind zahlreiche Übungsaufgaben eingeschaltet. Zahlreiche Figuren begleiten den Text, die vom Verfasser mit Sorgfalt entworfen sind und nur hie und da unter der Kleinheit der eingefügten Buchstaben leiden, die manchmal kaum noch erkennbar sind z. B. S. 84, Fig. 96; S. 346, Fig. 321; S. 409, Fig. 379 (hier fehlt auch bei dem einen T der Akzent).

Rostock, Oktober 1906. O. Staude.

Felix Müller. Karl Schellbach, Rückblick auf sein wissenschaftliches Leben. Nebst zwei Schriften aus seinem Nachlaß und Briefen von Jacobi, Joachimsthal und Weierstraß. Mit einem Bildnis Karl Schellbachs. 86 S. Leipzig 1905, B. G. Teubner. Preis ℳ 2,80.

Das an wissenschaftlichen und pädagogischen Erfahrungen reiche Leben Schellbachs, seine energische Tätigkeit, die auf so vielen Gebieten befruchtend gewirkt hat, wird ausführlich geschildert. Jedem, der diesen vom Werte der Mathematik durchdrungenen Idealisten kannte, den für ihre Ausbreitung zu wirken nie aufhörenden, wird die Lektüre des Buches teure Erinnerungen bringen, der jungen Generation aber, die den Meister nicht mehr persönlich sah, kann die Schilderung dieses vorbildlichen Lebens nicht genug empfohlen werden.

Der beigegebene „Plan zur Gründung eines mathematischen Instituts“ und die „Rede über Wert und Bedeutung der Mathematik“ verdienen, nicht der Vergessenheit anheimzufallen. Von den Mitteilungen an Schellbach behandelt die von Jacobi die Aufgabe, den Inhalt eines Vierecks aus den Seiten und einem Winkel zu berechnen. Die abgeleitete Formel ist elegant, die Berechnung danach aber nicht sehr praktisch (Druckfehler: $c = 24$ statt $e = 24$, $\sqrt{\frac{kl}{fg}}$ statt $\sqrt{\frac{nl}{fg}}$).

Die Arbeiten von Joachimsthal über die Wellenfläche und über die Konstruktion der Brennlinie sind gleichfalls sehr schön. (Druckfehler: S. 78 unten ox statt xy, S. 79 Zl. 10: streiche „so daß“, Z. 17: „reflektierten“ statt „gebrochenen“).

Weierstraß beweist einen Satz, den Steiner der Akademie 1860 vorgelegt hatte. Dieser Satz rührt aber von Binet (1811) her (Enzykl. IV 1 S. 306 Anm.) und würde in der Sprache der Mechanik heißen: Die Ebenen konstanten planaren Trägheitsmomentes umhüllen die Flächen einer konfokalen Flächenschar 2. Grades. Der Beweis wäre mit Ebenenkoordinaten in drei Zeilen zu erledigen. Steiner hatte sicher einen synthetischen Beweis. Die letzte Mitteilung von Weierstraß löst das von Newton aufgestellte Problem des Körpers vom kleinsten Widerstande unter der Bedingung gegebenen Volumens und bildet eine wertvolle Ergänzung des in den Vorlesungen über Variationsrechnung behandelten allgemeineren Problems, das als unlösbar bewiesen wurde.

Charlottenburg. H. Samter.

Digitized by Google

A. Garbasso. Vorlesungen über theoretische Spektroskopie. Leipzig 1906, J. A. Barth. *M* 8.

Der Inhalt des Buches gliedert sich in eine Einleitung, in einen Abschnitt über mechanische und zwei Abschnitte über elektrische Theorien der Spektroskopie. In der Einleitung bespricht der Verfasser die Hauptergebnisse der Spektralanalyse, die durch die Theorien erklärt werden sollen. Schon hier wird mancher sich mit der Anordnung und Auswahl nicht einverstanden erklären, so ist z. B. das Zeemansche Phänomen erstens sehr kurz und zweitens nicht einmal korrekt behandelt. Das muß um so mehr Wunder nehmen, als die Bedeutung gerade dieses Phänomens für die Spektroskopie außer jedem Zweifel steht. Sodann bespricht der Verfasser die Theorie der selektiven Absorption und Dispersion, wobei er namentlich auf die durch Resonatorengitter erzielte Reproduktion dieser Erscheinung bei elektrischen Wellen eingeht. Doch kann ich nicht sagen, daß ich mit der Darstellung des Verfassers vom pädagogischen Standpunkt aus einverstanden wäre. Die schöne Theorie der Dispersion und Reflexion wird in dieser Einleitung mit folgenden Worten erledigt: „Wie es einleuchtend ist und wie es sich nachher theoretisch leicht feststellen läßt, sind selektive Reflexion und Absorption, sowie die Dispersion selbst als lauter Resonanzwirkungen zu betrachten." Der Verfasser hat an dieser Stelle selbst das Bedürfnis gehabt auf spätere Vorlesungen zu verweisen, wahrscheinlich in dem dunklen Gefühl, daß dies doch nicht so ganz „einleuchtend" sei. Der Lernende hat aber auf diese Weise meiner Ansicht nach nichts oder nur wenig von dieser Einleitung. Wenn sie doppelt oder dreimal so lang wäre, könnte sie viel mehr nützen, als sie es jetzt vermag. Damit hängt es auch zusammen, daß manche wichtige Arbeiten garnicht oder nur flüchtig erwähnt werden. Der Verfasser bemerkt zwar im Vorwort bezüglich dieses Punktes, daß einige wertvolle und beachtungswerte Arbeiten aus Mangel an Zeit und Raum unberücksichtigt geblieben sind; ich lasse es dahingestellt, ob man dies für einen stichhaltigen Grund halten will oder nicht.

Im zweiten Abschnitt, der die mechanischen Theorien der Emission behandelt, bespricht der Verfasser einige Bilder für die Spektren zusammengesetzter Körper. Er geht dabei von der bekannten Tatsache aus, daß zwei gekoppelte Pendel, die ursprünglich gleiche Schwingungsdauer besaßen, nach der Koppelung zwei verschiedene Perioden aufweisen. Er stellt dies in Analogie zu den Linienverschiebungen, die im Spektrum manchmal eintreten, wenn das freie Atom eines Elementes eine Verbindung eingeht, d. h. mit anderen Atomen gekoppelt wird. Ähnliche Gedankengänge finden sich auch in den späteren Abschnitten über elektrische Theorien. Denn zwei aufeinander abgestimmte Schwingungskreise verhalten sich ebenso wie zwei identische Pendel, wenn sie gekoppelt werden: Jeder der beiden Schwingungskreise führt dann eine komplizierte Oszillation mit zwei, von der ursprünglichen verschiedenen, Perioden aus. Dabei habe ich indessen folgenden, meines Erachtens sehr notwendigen Hinweis vermißt: Es kann auch der Fall eintreten, daß zwei gekoppelte Schwingungskreise nur eine einzige Periode besitzen. Dieser Fall tritt nämlich dann ein, wenn nicht der eine Schwingungskreis den anderen erregt, wodurch ja eine Asymmetrie in das System hineinkommt, sondern wenn beide Schwingungskreise gleichmäßig von einem dritten, symmetrisch zu ihnen beiden liegenden Kreise angeregt

Digitized by Google

werden. Nach meiner persönlichen Auffassung dürfte gerade dieser letztere Fall bei den leuchtenden Flammen vorliegen; doch ist das, wie ich zugebe, vorläufig noch Sache des Geschmacks. Immerhin wäre es notwendig gewesen, auf diese Einschränkung, durch die ja die ganze Theorie unter Umständen zu Fall gebracht werden kann, hinzuweisen.

Ein weiterer der Verbesserung dringend bedürftiger Punkt ist die Behandlung der deutschen Sprache. Man merkt es jedem Satze an, daß ein Ausländer das Buch geschrieben hat, und so mag der Verfasser manche Behauptung anders gemeint haben, als sie jetzt gedruckt dasteht. Nachdem ich diese Mängel hervorgehoben habe, möchte ich nicht unterlassen, darauf hinzuweisen, daß der Leser in diesem Buche vieles Gute, Wertvolle und Interessante finden wird. Doch erscheinen mir die Mängel nicht so geringfügig, daß ich es rückhaltlos empfehlen könnte.

Breslau. Cl. Schaefer.

G. de Metz. La double réfraction accidentelle dans les liquides. Sammlung Scientia, Nr. 26. Paris 1906, Gauthier-Villars.

Das vorliegende Bändchen bietet eine Zusammenfassung der Arbeiten über die künstliche Doppelbrechung in Flüssigkeiten, die durch Bewegung fester Körper in denselben erzeugt wird. Der Verfasser stellt diese Erscheinung in Parallele mit der elektrischen Doppelbrechung (dem sog. Kerrschen Phänomen) und der von Majorana und Schmauß untersuchten Doppelbrechung im Magnetfelde. Da eine Theorie der Erscheinungen nicht existiert und auch das experimentelle Material sehr lückenhaft ist, wie der Verfasser häufig hervorhebt, erscheint es mir etwas verfrüht, über diesen Gegenstand eine Monographie zu schreiben, die denselben Umfang hat, wie z. B. die derselben Sammlung angehörige, aus der Feder Poincarés stammende Darstellung über „La Théorie de Maxwell et les oscillations hertziennes; Télégraphie sans fil." Dazu sind die beiden Gebiete wirklich zu ungleichwertig. Immerhin kann das Büchlein jemandem, der auf diesem Gebiete arbeiten will, von Nutzen sein.

Breslau. Cl. Schaefer.

J. J. Thomson. Elektrizität und Materie. Autorisierte Übersetzung von G. Siebert. (Die Wissenschaft, Sammlung naturwissenschaftlicher und mathematischer Monographien. Drittes Heft.) Mit 19 eingedruckten Abbildungen. VIII u. 100 S. Braunschweig 1904, Friedrich Vieweg und Sohn.

In diesem Buche wird der Inhalt einer Reihe von Vorlesungen wiedergegeben, die im Jahre 1903 als Silliman-Lectures an der Yale-Universität in New-Haven gehalten wurden. Auf Grund der neueren Forschungen über Kathoden- und Röntgenstrahlen sowie über die Erscheinungen der Radioaktivität erörtert der Verfasser die Beziehungen zwischen Elektrizität und Materie.

Im ersten Kapitel wird zunächst die Theorie der elektrischen Kraftlinien und Kraftröhren in ihren Grundzügen entwickelt. Die Anwendung dieser Theorie auf das Verhalten einer mit Geschwindigkeit begabten ge-

Digitized by Google

ladenen Kugel zeigt, daß die Bewegung der Kraftröhren eine bestimmte Bewegungsgröße besitzt. Aus ihr ergibt sich weiterhin der Begriff der elektromagnetischen Masse, die als Masse des von den Faradayschen Röhren „gebundenen" Äthers aufgefaßt wird. Im dritten Kapitel wird der Fall behandelt, daß die Faradayschen Röhren Beschleunigungen erleiden; ein elektrisches Teilchen, von dem solche Röhren ausgehen, wird dann zum Zentrum einer elektromagnetischen Strahlung, wie sie als Röntgenstrahlung in die Erscheinung tritt. Hierauf werden die Tatsachen besprochen, die uns zur Auffassung einer atomistischen Struktur der Elektrizität nötigen, insbesondere das Verhalten isolierter elektrischer Teilchen (Ionen und Elektronen) in Gasen. Als Resultat ergibt sich eine unitarische Deutung der Elektrizität: es gibt nur *ein* wahres elektrisches „Fluidum"; dieses ist atomistisch konstituiert und identisch mit der *negativen* Elektrizität; die sogenannten *positiven* Ladungen eines Körpers kommen demgemäß nur in der Weise zustande, daß Elektronen, d. h. Atome der wahren Elektrizitätssubstanz, aus ihm entweichen.

Die Tatsache, daß jene Elektronen oder Korpuskeln — wie sie von Thomson gewöhnlich genannt werden — stets von gleicher Beschaffenheit sind, einerlei, aus welcher Quelle sie stammen, hat neuerdings die alte Hypothese, daß die Atome aller chemischen Elemente aus gemeinsamen, einfacheren Bestandteilen aufgebaut seien, zu neuem Leben erweckt. Es liegt nahe, die Elektronen als die elementaren Bausteine der Materie anzusehen. Auf dieser Grundlage haben Lord Kelvin und der Verfasser Theorien über die Konstitution der Atome aufgestellt, die im fünften Kapitel ausführlich geschildert werden. Es wird ferner gezeigt, wie solche Vorstellungen imstande sind, von wichtigen physikalischen und chemischen Kennzeichen der verschiedenen Atome Rechenschaft zu geben. Im Anschlusse hieran werden dann im letzten Kapitel die Erscheinungen der Radioaktivität gedeutet, also das Strahlungsvermögen und die spontane Umwandlung der radioaktiven Substanzen.

Durch die geistreiche und elegante Form, in der der Verfasser sein Thema behandelt, wird das Studium dieses Buches zu einer genußreichen und ungemein anregenden Lektüre.

Die deutsche Übersetzung ist sachgemäß, wenn auch nicht immer frei von sprachlichen Härten.

Berlin. E. Aschkinass.

Karl Frhr. von Papius. Das Radium und die radioaktiven Stoffe. Gemeinverständliche Darstellung nach dem gegenwärtigen Stande der Forschung mit Einflechtung von experimentellen Versuchen und unter besonderer Berücksichtigung der photographischen Beziehungen. Mit 36 Abbildungen. VIII u. 90 S. Berlin 1905, Gustav Schmidt.

Eine formal und inhaltlich recht gut geschriebene, gemeinverständliche Übersicht über unsere derzeitigen Kenntnisse von den Erscheinungen der Radioaktivität. Als erste Einführung in das Studium dieses neuen Forschungszweiges ist das Büchlein bestens zu empfehlen.

Berlin. E. Aschkinass.

Digitized by Google

Paul Besson. Le Radium et la Radioactivité. Propriétés générales. Emplois médicaux. Avec une préface du Dr. A. d'Arsonval. VII u. 170 S. Paris 1904, Gauthier-Villars.

Die wichtigsten Eigenschaften der radioaktiven Substanzen werden in dieser Schrift, von der inzwischen auch eine deutsche Übersetzung erschienen ist, in enger, bisweilen freilich etwas kritikloser Anlehnung an die Originalliteratur im großen und ganzen übersichtlich dargestellt. Der Verfasser — technischer Direktor der Société centrale de produits chimiques, in deren Fabrik zuerst die Extraktion der radium- und poloniumhaltigen Bestandteile aus der Pechblende ausgeführt wurde — wendet sich vornehmlich an medizinische Kreise, sodaß von einem tieferen Eindringen in die physikalischen Prinzipien des Gegenstandes abgesehen wurde. So findet denn auch die Rutherfordsche Umwandlungstheorie kaum Erwähnung. Störend wirken, wie so oft in französischen Werken, die vielen Fehler in der Schreibweise der Namen ausländischer Autoren. Auch sachlichen Irrtümern begegnet man nicht selten.

Berlin. E. Aschkinass.

J. Zenneck. Elektromagnetische Schwingungen und drahtlose Telegraphie. Mit 802 in den Text gedruckten Figuren. XXVIII u. 1019 S. Stuttgart 1905, Ferdinand Enke.

Der Begriff der elektromagnetischen Schwingung wird in diesem umfangreichen Werke in seinem weitesten Sinne genommen. Die Darstellung erstreckt sich demgemäß auf Oszillationen jeglicher Frequenz; sie umfaßt insbesondere auch die Wechselströme der Technik. Von diesen langsamen elektromagnetischen Schwingungen geht der Verfasser aus; auf den Gesetzmäßigkeiten, die in ihrem Bereiche gelten, werden dann allmählich die Sätze für die schnelleren Schwingungen aufgebaut unter steter Betonung der Änderungen, welche die zuerst gewonnenen Beziehungen durch die Erhöhung der Wechselzahl erfahren. Im Gebiete der schnellen Schwingungen werden mit besonderer Ausführlichkeit diejenigen Erscheinungen besprochen, die für die drahtlose Telegraphie von Bedeutung sind. Die physikalischen Grundlagen dieses Zweiges der Technik klarzustellen, wird vom Verfasser als Hauptzweck seines Buches bezeichnet.

Die einzelnen Kapitel tragen folgende Überschriften:

I. *Die Beziehungen des elektromagnetischen Feldes.* II. *Allgemeines über elektromagnetische Schwingungen.* III. *Erzeugung langsamer elektromagnetischer Schwingungen (Wechsel- und Drehstrommaschinen).* IV. *Der quasistationäre Wechselstromkreis geringer Wechselzahl.* V. *Der magnetische Kreis geringer Wechselzahl.* VI. *Der technische Transformator.* VII. *Leistung mechanischer Arbeit durch Wechsel- und Ströme.* VIII. *Wechselstromkreise mit Kondensatoren.* IX. *Die Eigenschwingungen von Kondensatorkreisen.* X. *Der quasistationäre Wechselstromkreis hoher Wechselzahl.* XI. *Der magnetische Kreis hoher Wechselzahl.* XII. *Die Eigenschwingungen offener Sender.* XIII. *Wirkung einer ungedämpften Schwingung auf einen Oszillator.* XIV. *Gekoppelte Systeme. Extrem lose Koppelung.* XV. *Gekoppelte Systeme. Allgemeiner Fall.* XVI. *Fortpflanzung magnetischer Wellen in Eisenzylindern.* XVII. *Elektromagnetische Wellen längs Drähten.* XVIII. *Erzeugung elektro-*

Digitized by Google

magnetischer Wellen in der Luft. XIX. *Indikatoren für elektromagnetische Wellen.* XX. *Die Sender der drahtlosen Telegraphie.* XXI. *Die Empfänger der drahtlosen Telegraphie.* XXII. *Die Eigenschaften elektromagnetischer Wellen.*

Das Verständnis der behandelten Erscheinungen wird dadurch wesentlich gefördert, daß zur Erläuterung der abgeleiteten Sätze allenthalben sehr instruktive Versuche beschrieben werden. Die experimentellen Anordnungen, die zur Ausführung dieser Versuche dienen, werden in vorzüglichen Figuren wiedergegeben. Überhaupt ist das Buch außerordentlich reich mit Figuren ausgestattet. Es wird zweifellos einem jeden, der auf dem einschlägigen Gebiete technisch oder wissenschaftlich zu arbeiten hat, von großem Nutzen sein.

In mathematischer Beziehung werden lediglich elementare Kenntnisse vorausgesetzt: auf die Verwendung der Infinitesimalrechnung hat der Verfasser vollständig verzichtet. Demgemäß mußte in vielen Fällen von einer exakten Beweisführung abgesehen werden. Dafür finden sich dann am Schluß des Buches theoretische Anmerkungen, in denen die strenge Ableitung der in Frage kommenden Sätze ausgeführt oder angedeutet ist oder wenigstens Literaturhinweise gegeben werden. Es kann bezweifelt werden, ob es zweckmäßig war, sich in mathematischer Hinsicht derartige Beschränkungen aufzuerlegen, zumal ein so ausführliches Werk über ein Spezialgebiet der technischen Physik wohl kaum auf einen Leserkreis zu rechnen hat, der nicht mit den Elementen der höheren Mathematik vertraut wäre.

Berlin. E. Aschkinass.

H. Maurer. Methodisch geordnete Sammlung geometrischer Aufgaben in bildlicher Darstellung. 3360 Aufgaben in 4 Bänden zum Selbststudium und zum Unterricht an höheren Lehranstalten. I. Bd. Aufgaben 1—840. Zürich 1906, Speidel. Preis *M* 2,50.

„Während die bis jetzt vorhandenen Aufgabensammlungen der Geometrie die Aufgaben in Worte kleiden, sieht die vorliegende Sammlung gänzlich von einem Texte ab und stellt die Aufgaben durch Figuren dar.

Aus diesen ersieht der Lernende sofort, was gegeben und was gesucht ist. Der große Vorteil dieser Methode besteht darin, daß durch ihre Anschaulichkeit jede Aufgabe schnell und richtig aufgefaßt wird."

Außer einigen Zeichenerklärungen und 12 Musteraufgaben enthält die Sammlung im wesentlichen kein Wort weiter sondern nur Figuren. Der vorliegende erste Band enthält die Aufgaben über Linien und Winkel, über Dreieck, Viereck und Kreis.

Im allgemeinen ist die Sammlung, wie der Titel besagt, so geordnet, daß von leichteren zu schwereren Aufgaben fortgeschritten wird; im einzelnen allerdings läßt sich über die Anordnung streiten. So würde ich die Aufgaben, die mit dem Zeichnen des Winkels von 90^0 und 60^0 zusammenhängen (Nr. 138 ..., Nr. 186 ...), vor Aufgaben stellen wie: ein rechtwinkliges Dreieck aus einem spitzen Winkel und seiner Halbierungslinie (Nr. 102) zu zeichnen.

Das Buch ist zu Repetitionen in der Schule, aber auch, und zwar dem Titel nach an erster Stelle, zum Selbststudium bestimmt. Dazu wäre natürlich nötig, daß wirklich ein Schüler ohne Hilfe aus der Figur immer die Aufgabe abliest; dies ist nicht immer der Fall. So soll (Nr. 295) der ein-

Digitized by Google

geschriebene Kreis eines gegebenen Dreiecks gezeichnet werden; das Dreieck ist aber nicht anders gezeichnet wie in den meisten übrigen Aufgaben die *gesuchten* Dreiecke.

In vielen Fällen ist die doppelt unterstrichene und dadurch als gegeben gekennzeichnete Größe nur der Größe, in anderen auch der Lage nach gegeben. Ferner geben die Figuren durch besondere Lage der dargestellten Punkte und Linien vielfach zu Mißverständnissen Anlaß. In Nr. 528 liegt der Mittelpunkt des gegebenen Kreises auf der Halbierungslinie des gegebenen Winkels; ich glaube aber, daß diese spezielle Lage nicht beabsichtigt ist. Nr. 31 ist so gezeichnet, daß der eine gesuchte Kreis durch den Mittelpunkt des einen gegebenen geht und den anderen gegebenen Kreis berührt. Zufällig ist diese Aufgabe als Musteraufgabe in Worte gekleidet vorhanden, und daraus erkennt man, daß diese spezielle Lage gar nicht verlangt wird. Diesen kleinen Mängeln ließe sich bei einer neuen Auflage leicht abhelfen; es bleibt aber die Frage, ob das so durchgeführte Prinzip wirklich zu empfehlen ist.

Durch ihre Anschaulichkeit wird, wie der Verfasser sagt, jede Aufgabe rasch erfaßt. Die Aufgaben sind zu zählen, in denen wirklich nur eine Figur gezeichnet ist, aus der der Text hervorgeht. So Nr. 419: Einen Kreis zu zeichnen, der eine gegebene Gerade in einem bestimmten Punkte und einen gegebenen Kreis berührt. Ich glaube aber nicht, daß die geistige Arbeit aus der gezeichneten Figur diese Aufgabe zu erfassen geringer ist als die, aus dem obigen Texte die Figur sich vorzustellen.

In den weitaus meisten Fällen genügt die Figur allein gar nicht, sondern es müssen Größenangaben oder andere Bemerkungen über verschiedene in der Figur enthaltene Strecken und Winkel der Aufgabe beigefügt werden, wodurch entweder die Erkennung der Aufgabe erheblich erschwert wird, z. B. Nr. 436, oder wodurch die gezeichnete Figur eigentlich überflüssig wird, wie Nr. 234. Dort ist ein Dreieck gezeichnet, dessen eine Seite a als gegeben bezeichnet ist, und darunter steht: (gegeben) $b + c$, $\beta - \gamma$. Hat hier die Figur irgend welchen Zweck? Zum Verständnisse der Aufgabe trägt sie nicht bei und zur Lösung verhilft sie auch nicht.

Die sämtlichen Dreieckaufgaben würden vielleicht den zehnten Teil oder noch weniger Raum beanspruchen und genau ebenso anschaulich sein, wenn statt der rund 150 Dreiecke ein einziges vorhanden wäre, in dem vielleicht von einer Ecke die Höhe, von einer anderen die Mittellinie und in der dritten die Halbierungslinie des Winkels gezeichnet wäre. In ähnlicher Weise ließe sich bei Viereck- und Kreisaufgaben die Zahl der Figuren und damit der Umfang und Preis des Buches wesentlich vermindern; das hier besprochene Viertel des ganzen Werkes umfaßt schon über 13 Bogen.

So wie das Buch vorliegt, kann ich demnach in ihm einen wesentlichen Fortschritt gegen andere Sammlungen nicht erblicken.

Berlin. P. Schafheitlin.

O. Schellhorn. Planimetrische Beweise mit Anhang: Algebraische Regeln. Essen 1906, Baedeker. Preis geb. ℳ 1,60.

„Ein jedes Lehrbuch muß, wenn es Anspruch auf Existenzberechtigung machen will, einem fühlbaren Mangel abzuhelfen suchen. — An der Hand

Digitized by Google

dieses Buches soll es auch dem schwächsten Schüler möglich werden, durch häuslichen Fleiß sich das zu eigen zu machen, was er in der Klasse nicht verstehen konnte." So sehr ich dem ersten dieser beiden aus dem Vorworte entnommenen Sätze zustimmen kann, so wenig bin ich in der Lage, den zweiten zu unterschreiben. Der Verfasser gibt in seinem Buche das planimetrische Pensum bis Untersekunda und die wichtigsten arithmetischen Regeln. Es wird vom Verfasser bemängelt, daß in manchen Büchern über die Beweise mit Bemerkungen wie: „Der Beweis folgt aus § 46 mit Hinzuziehung von § 33" hinweggegangen wird. In den gebräuchlichen Büchern aber werden höchstens Umkehrungen, Zusätze etc. mit solchen Wendungen abgetan, die Hauptsätze aber werden eingehend, wenn auch möglichst kurz bewiesen. Hier dagegen werden alle Sätze mit derselben Breite behandelt, häufig werden drei und vier Beweise für einen kleinen Satz (für den vom Kreisviereck sogar 5!) angegeben, während der Satz des Pythagoras sich mit einem begnügen muß. Trotz der Ausführlichkeit der Beweise ist natürlich der Hinweis auf frühere Sätze nicht zu vermeiden; er wird dadurch bewirkt, daß neben der Paragraphenzahl mehrere §§ angegeben werden, die für den betreffenden Satz zu wiederholen sind z. B. § 49 (wdh. § 38 u. 44). Hierdurch wird gegen das vom Verfasser gerügte Verfahren nichts gewonnen, im Gegenteil, während bei der gebräuchlichen Art auf einen bestimmten Satz hingewiesen wird, steht der Schüler hier einer ganzen Reihe von Sätzen (in § 38 deren sechs) gegenüber, aus denen er sich erst den passenden auswählen muß.

Die Anordnung ist nicht immer einwandfrei; in § 27 wird die Einteilung der Dreiecke nach den Winkeln gegeben, während erst in § 30 der Satz über die Winkelsumme folgt, der diese Einteilung verständlich macht. Beim Beweise über die Länge der Mittellinie eines Trapezes wird ein Satz benutzt, der erst am Schlusse des betreffenden Paragraphen als Folgerung aufgeführt wird.

Durch die Ausführlichkeit der Beweise soll erreicht werden, daß „sich der Schüler einen korrekten Ausdruck aneignet". Dazu ist vor allen Dingen nötig, daß das Lehrbuch sich durch korrekten Ausdruck auszeichnet; unklare und flüchtige Wendungen kommen hier sehr häufig vor, z. B. „Ein Parallelogramm ist ein Viereck mit parallelen Seiten". „Zu gleichen Sehnen gehören gleiche Zentriwinkel". „Ungleiche Potenzen können weder addiert noch subtrahiert werden". Daneben finden sich direkt falsche Angaben: „Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie übereinstimmen in drei unabhängigen Stücken". Der „schwächste Schüler" soll folgenden Satz begreifen: „Eine Wurzel oder Potenz mit gebrochenem Exponenten ist gleich der Wurzel aus einer Potenz und zwar so, daß der Zähler seine Funktion beibehält."

Die Beweise sind „die landläufigsten und noch einige neue". Zu diesen gehört der Beweis des Satzes über das Verhältnis von Rechtecken mit gleichen Höhen, wenn die Grundseiten inkommensurabel sind (§ 112), der aber wohl besser weggeblieben wäre, ebenso wie der in § 114; es mag erwähnt werden, daß die Gleichungen $a^0 = 1$ und $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ *bewiesen* werden.

Leider ist das Buch auch mit vielen Druckfehlern behaftet; so hat der Druckfehlerteufel jedesmal Radikant entstehen lassen.

Berlin. P. Schafheitlin.

Digitized by Google

Koppe-Dieckmann's Geometrie zum Gebrauche an höheren Unterrichtsanstalten. (23. Auflage.) Ausgabe für Reallehranstalten. I. Teil. 7. Auflage der neuen Bearbeitung besorgt von Knops. Essen 1906, Baedeker. Preis geb. ℳ 2,40.

Der neue Herausgeber des bekannten Buches hat nur wenig am Inhalte geändert; im wesentlichen beschränken sich die Änderungen auf die Behandlung der Geraden und der Kongruenzsätze. In sprachlicher Beziehung sind dagegen vielfache Verbesserungen vorgenommen worden.

Berlin. P. Schafheitlin.

Gabriel Zahikjanz. Die Theorie, Berechnung und Konstruktion der Dampfturbinen. Mit 23 Abb. 179 S. Berlin 1906, M. Krayn.

Das Werk stellt eine Erweiterung einer Reihe von Artikeln dar, welche der Verfasser im ersten Jahrgange der Zeitschrift „Die Turbine" 1904/05 veröffentlicht hat. In dem Titel dürfte das Wort „Konstruktion" für manche etwas irreführend sein, insofern, als von wirklichen konstruktiven Ausführungen, d. h. baulichen Einzelheiten, in dem Buche nichts enthalten ist. Dagegen beschäftigt sich Verfasser in sehr eingehender Weise mit der Theorie und Berechnung der Turbinen und weicht dabei fast durchweg von den üblichen Theorien und Berechnungsweisen vollständig ab. Fesselnd ist es z. B., daß Verfasser nicht nur im allgemeinen neue Wege einschlägt, sondern stellenweise sogar neue Begriffsbezeichnungen einführt, um die Theorie und Berechnung von Dampfturbinen für Konstruktionszwecke möglichst einheitlich und einfach systematisch zusammenzufassen. So bildet Verfasser für das Produkt Masse mal Geschwindigkeit das neue Wort „Schwung" an Stelle des bisher wohl allgemein üblichen „Bewegungsgröße", und es scheint mir in der Tat, als wenn dieser Ausdruck recht glücklich gewählt sei, denn es ist erstaunlich, wie sich aus diesem Begriffe „Schwung" und dem darauf aufgebauten „Grundgesetz der Schwungübertragung bei allen materiellen Wechselwirkungen in der Natur" eine Reihe von Vorgängen und Gesetzen in einfacher und natürlicher Form erklären lassen. Unter anderem werden z. B. die Formeln für den Stoß zweier Massen nicht aus dem Satze von der Erhaltung der Energie entwickelt, sondern es ergibt sich umgekehrt das Gesetz von der Erhaltung der Energie als eine Folge des Grundgesetzes der Schwungübertragung in allen Bewegungsformen der Materie.

Die Sprache und Darstellungsweise des Verfassers zeichnet sich durch große Klarheit aus. Namentlich die vielfach eingeschalteten Zahlenbeispiele und die rechnerisch durchgeführten Vergleiche verschiedener Turbinengattungen werden dem Leser recht willkommen sein. Zu bedauern ist nur, daß die zeichnerischen Darstellungen, welche sonst zu einem guten Verständnisse beitragen könnten, stellenweise an großer Unübersichtlichkeit leiden. Liniengewirre, wie Fig. 9, 10, 15 mit den übermäßig stark hervortretenden Hilfslinien und Buchstabenbezeichnungen erschweren das Lesen mehr, als daß sie es fördern.

Das Werk kann allen, welche sich mit Theorie und Berechnung der Turbinen eingehend bekannt machen wollen, angelegentlich empfohlen werden.

Grunewald. R. Vater.

Digitized by Google

Alfred Wachtel. Anwendung der Graphostatik im Maschinenbau, mit besonderer Berücksichtigung der statisch bestimmten Achsen und Wellen. Mit 194 Abb. 146 S. Hannover 1906, Dr. Max Jänecke.

Unter Ausschluß statisch unbestimmter Aufgaben und Beschränkung des Stoffes auf die wichtigsten in der Praxis vorkommenden Fälle hat Verfasser mit der vorliegenden Arbeit ein Buch geschrieben, welches namentlich Studierenden und in der Praxis stehenden Technikern recht willkommen sein dürfte. Der Vorzug des Buches besteht einmal in der großen Zahl vollständig durchgerechneter Aufgaben und dann vor allen Dingen in den zahlreichen, durchweg vorzüglichen und (was ja gerade in der Graphostatik ebenso wichtig, wie schwierig ist) sehr übersichtlichen Abbildungen.

Grunewald. R. Vater.

Hermann Wilda. Die Dampfturbinen, ihre Wirkungsweise und Konstruktion. Mit 89 Abb. 164 S. Leipzig 1906, Sammlung Göschen.

Das trotz seiner Kleinheit sehr inhaltsreiche Buch behandelt in klarer übersichtlicher Weise Theorie, Wirkungsweise und Bau der hauptsächlichsten Dampfturbinenarten. Es ist erstaunlich, wie Verfasser es versteht, in einem so kleinen Rahmen alle einschlägigen Fragen mit solcher Gründlichkeit zu behandeln. Ich glaube nur, daß es vielen Lesern dieser Sammlung angenehm sein würde, wenn im theoretischen Teile bei manchen Formeln oder Gesetzen auf andere Werke, z. B. Stodola, Zeuner u. a. verwiesen oder darauf hingewiesen würde, daß eine Ableitung in diesem Rahmen nicht angängig sei. Besonders hervorgehoben zu werden verdient die ungewöhnlich große Zahl (89) vorzüglicher Abbildungen, die trotz ihrer Kleinheit durchweg das Wesentliche der Sache klar und deutlich hervortreten lassen. Angesichts des reichen Inhaltes und der vorzüglichen Ausstattung ist der Preis des kleinen Buches geradezu erstaunlich billig zu nennen.

Grunewald. R. Vater.

F. Langen. Was haben wir von der Gasturbine zu erwarten? 58 S. 8°. Rostock 1906, C. J. E. Volckmann. Preis *M* 1.

Nachdem die Vorteile einer etwaigen Gasturbine dargestellt sind, werden zunächst die bei Dampfturbinen und Gasmotoren erreichten und wohl noch zu erreichenden Wirkungsgrade kurz besprochen, worauf sich Verfasser der Frage zuwendet, ob die Möglichkeit einer auch nur einigermaßen wirtschaftlich arbeitenden Gasturbine wirklich ins Auge zu fassen ist. Auf Grund eingehender wärmetheoretischer und praktischer Berechnungen, sowohl für die Verbrennungsturbinen als für die Explosionsturbine, kommt Verfasser zu dem Ergebnis: Der Bau einer Gasturbine ist zwar theoretisch möglich, praktisch jedoch werden die thermischen Wirkungsgrade so gering, daß überhaupt keine Aussicht besteht, jemals eine Gasturbine als Kraftmaschine verwenden zu können. Verfasser schließt daher mit dem Vorschlage, lieber auf Vervollkommnung von Dampfturbinen und Kolbendampfmaschinen bedacht zu sein, und weist namentlich hin auf eine Verbindung von Hochdruckdampfmaschine in Verbindung mit Niederdruckdampfturbine, wobei sich sehr wohl ein Gesamtwirkungsgrad der Anlage (von der Kohle zur Welle) von 22% erreichen ließe.

Digitized by Google

Wenn man vielleicht auch nicht allen Behauptungen und Schlußfolgerungen des Verfassers wird beistimmen können, so dürfen die klaren und fesselnden Betrachtungen doch jedem zu empfehlen sein, der sich für die Frage der Gasturbine interessiert.

Grunewald. R. Vater.

Rudolf Vogdt. Pumpen, hydraulische und pneumatische Anlagen. Mit 59 Abb. 110 S. Leipzig 1906, Sammlung Göschen.

Das Buch will, wie dies schon im Titel zum Ausdruck gebracht ist, nur einen kurzen Überblick geben über die Förderung des Wassers und die Förderung der Luft nebst den wichtigsten technischen Anwendungen von Druckwasser und Druckluft. In dem ersten, von der Wasserförderung handelnden Teile, werden daher kurz besprochen die verschiedenen Arten von Kolbenpumpen, die kolbenlosen Pumpen (wie Zentrifugalpumpen, Pulsometer, Injektoren, hydrauliche Widder usw.), ferner die Verwendung des Druckwassers zum Betriebe von Schmiedepressen, Nietmaschinen; Gesteinsbohrmaschinen, Aufzügen und Kranen. Im zweiten Teile werden kurz beschrieben Exhaustoren, Ventilatoren, Gebläse und Kompressoren, sowie die Verwendung der Druckluft bei Werkzeugen, Bremseinrichtungen, Sandstrahlgebläsen, bei der Rohrpost, zum Zwecke der Wasserförderung (Mammutpumpe) usw. Bei dem Abschnitte über Kolbenpumpen finden sich einige Berechnungen mit Zahlenbeispielen.

Die Darstellung ist eine klare und gibt bei aller Kürze das Wesentliche der einzelnen Maschinen. Die in reichlicher Zahl beigegebenen Abbildungen sind fast durchweg recht deutlich und mit Geschick ausgesucht.

Grunewald. R. Vater.

Paul La Cour und Jakob Appel. Die Physik auf Grund ihrer geschichtlichen Entwicklung für weitere Kreise in Wort und Bild dargestellt. Zwei Bände, zus. 987 S. mit 799 Abbild. und 7 Taf. Autoris. Übers. von G. Siebert. Braunschweig 1906, Vieweg u. Sohn. Preis *M* 16.50.

Die beiden Verfasser bieten mit ihrem verhältnismäßig umfangreichen Werke eine erste Einführung in die Physik auf Grund ihrer geschichtlichen Entwicklung. Sie haben nicht eine eigentliche Geschichte der Physik schreiben wollen — eine solche würde sich auch enger an die Entwicklung der einzelnen Probleme zu halten haben —, vielmehr knüpfen sie ihre Darstellung vornehmlich an den Lebensgang der Forscher. Die Anlage des Werkes beruht auf der Überzeugung der Verfasser, daß der Entwicklungsgang einer Wissenschaft auch ihr natürlichster Lehrgang sei.

Man kann zweifelhaft sein, ob ein Lehrgang dieser Form der zur ersten Einführung in die elementarsten Begriffe geeignetste ist. Ihre Voraussetzung erleichtert jedenfalls wieder die Einsicht in die Entwicklung, ihr Fehlen könnte leicht zu großer und den Anfänger ermüdender Breite der historischen Darstellung führen. Daß diese selbst aber in der Physik und den nahe stehenden Wissenschaften zusehends an Schätzung gewinnt, ist erfreulicherweise nicht nur an den sich mehrenden Werken festzustellen, die ihr ausdrücklich gewidmet sind, sondern auch aus der größeren Aufmerksamkeit

Digitized by Google

zu schließen, die jetzt bessere Lehrbücher überhaupt auf Hinweise aus dem Entwicklunggange verwenden. Die unmittelbare Anschaulichkeit der einzelnen physikalischen Probleme, ihre rein begriffliche Entwicklung ohne die später vielleicht für die Ableitung bequemeren Hilfmittel, und andrerseits der von selbst hervortretende Zusammenhang mit anderen Zweigen machen die genetische Darstellung für den selbstdenkenden Leser nicht minder anziehend, wie die ethische Wirkung, die aus der Kenntnis der bei den Fortschritten überwundenen Schwierigkeiten fließt. Die systematische Darstellung, die, auf die Elemente angewendet, freilich für Lehrer wie äußerlich Lernende ungleich bequemer ist, kann ihren Wert erst auf einer höheren Stufe entfalten, wo sie die Aufgabe erfüllt, die ökonomische Zusammenfassung und die Unterordnung der gewonnenen Einzelerkenntnisse unter allgemeinere Prinzipien darzutun.

Der Anlage ihres Werkes gemäß haben die Verfasser sich nicht an die übliche Einteilung des Stoffes gehalten und von verwandten Gebieten, so besonders von der Himmelskunde, mehr aufgenommen, als sonst in physikalischen Elementarbüchern zu geschehen pflegt. Die einzelnen Disziplinen haben auch teilweise in verschiedenen Abschnitten behandelt werden müssen, um den Zusammenhang mit den benachbarten nicht zu verlieren. Doch ist jedem Bande neben der äußeren Inhaltangabe eine ausführlichere systematische Übersicht beigegeben, die das Nachschlagen wesentlich erleichtert.

Der erste Band enthält die elementaren Lehren der Astronomie, dann, unter der anfechtbaren Bezeichnung „die Kraft", die Mechanik fester, flüssiger und gasförmiger Körper, ferner das Licht und den Schall. Die ebenso einfache wie klare Darstellungweise der Verfasser dürfte sich in den der Astronomie einschließlich der Kartenzeichnung gewidmeten Abschnitten am besten erweisen, die eine anregende Einführung in dieses Gebiet gewähren, während der Eingeweihtere mit Interesse die Abbildungen der Instrumente betrachten wird, mit denen die alten Forscher beobachteten. Leider stört hier, wie auch sonst in dem Werke, das Fehlen der meisten Angaben über die Herkunft der alten Abbildungen. Erfrischend aber wirkt die liebevolle Schilderung des Lebensganges der hervorragendsten Förderer. Die Worte eines echten Naturforschers, mit denen Kepler sein Lebenswerk abschloß, wie sie ähnlich auch Newton gesprochen hat, könnten als altmodischer, aber besonders für Anfänger lehrhafter Eingang dem ganzen Werke vorangestellt sein.

In ähnlicher Weise, unter Beschränken auf die einfacheren Grunderscheinungen und ihre sorgfältige und leicht faßliche Erklärung ist das Licht behandelt. Die Spektralanalyse ist in einem besonderen Kapitel vorgeführt, einsschließlich der Anwendungen auf die Untersuchung der Himmelskörper. Die Grundlagen dieser Disziplin dürften dem Anfänger hier einleuchtender werden, als aus vielen andern elementaren Lehrbüchern. Von einer mechanischen Versinnlichung beispielweise der Absorption, ohne die man doch eigentlich kaum auskommt, ist aber auch in diesem Buche kein Gebrauch gemacht. Sonderbar genug, daß solche wesentlichen Erleichterungen so schwer Eingang finden.

Die Mechanik erörtert u. a. eingehend die Hebelgesetze nach Archimedes, die Fallgesetze an Hand des sehr richtig vorangestellten grundlegenden Gedankens von Galilei über die Unabhängigkeit der Beschleunigung vom

Digitized by Google

augenblicklichen Bewegungzustande der Körper, das einfache Pendel usw. Während für dieses aber die Abhängigkeit der Schwingungdauer von der Länge recht anschaulich begründet ist, fehlt die Darstellung des Gesetzes durch die Formel, was in didaktischer wie praktischer Hinsicht als ein Mangel anzusehen ist, der bei anderen Schwingungerscheinungen noch mehr hervortritt und durch die möglichste Beschränkung in der Benutzung der mathematischen Hilfmittel nicht veranlaßt wird, da von diesen an anderen Stellen Genügendes vorausgesetzt ist. Von dem physischen Pendel ist eigentlich garnicht die Rede, und doch hätte an ihm wenigstens Huygens' geniale und weittragende Auffassung von der Summenwirkung der Pendelmassen erläutert werden können. Dafür entschädigt nicht die ohnehin nur flüchtige Beschreibung von Huygens' Zykloidenpendel, die hier leicht zu entbehren war. Ungleich der Behandlung des Pendels ist die Zentrifugalkraft ohne näheres Eingehen auf die inneren Gründe in der bekannten Weise elementar-mathematisch abgeleitet. Starke Ungleichmäßigkeiten in den Einzelheiten zeigt das Werk überhaupt. Während beispielweise den Heronschen Apparaten ein breiter Raum gewidmet wird und gelegentlich ziemlich nichtssagende Bilder alt-technischer Gegenstände aufgenommen sind, wird das Poncelet-Rad, in dem leicht alle wichtigen Gesichtpunkte der kinetisch-hydraulischen Motoren erläutert werden können, mit der bloßen Erwähnung und einem Bilde abgetan. Will man solche technischen Gegenstände erwähnen, so sollten sie doch auch in physikalischem Sinne nutzbar gemacht werden. Recht befriedigend dagegen wird über die Arbeiten Guerikes, Pascals, Mariottes und Boyles berichtet, und dabei namentlich die entscheidende Wendung in der Auffassung der Gase im Gegensatze zu den tropfbaren Flüssigkeiten hervorgehoben. Ob man aber wirklich noch 1870 eine sogenannte atmosphärische Eisenbahn in New-York gebaut hat, wie Text und Bild erzählen? Wenn schon, so hätte der Erfinder (Samuel Clegg) erwähnt werden dürfen.

Aus der Akustik sei als Beispiel der Behandlungweise nur die Newtonsche Formel der Fortpflanzunggeschwindigkeit des Schalles erwähnt. Die Formel wird nur fertig mitgeteilt, hinterher allerdings sehr geschickt anschaulich und wahrscheinlich gemacht. Das bezieht sich aber nur auf die auftretenden Größen selbst, nicht auf ihre Dimension. Wäre früher gelegentlich des Pendels die einfache Schwingung allgemeiner behandelt, wie mit sehr einfachen Mitteln durchführbar, so hätten die Verfasser bei ihrem ersichtlich nicht gewöhnlichen Darstellungvermögen leicht die Newtonsche Formel vollständig und ohne Rechnung entstehen lassen können. Schade, daß sie diese schöne Gelegenheit, den Wert der rein begrifflichen Darstellung zu erweisen, nicht ausnützten.

In der Wärmelehre vermißt man eine klare Entwicklung des Temperaturbegriffes oder, um es kurz so zu bezeichnen, der theoretischen Bedeutung des Luftthermometers. Dieser Stichprobe halten freilich die wenigsten elementaren Lehrbücher der Physik stand. Sonst erscheint dieser Teil am gleichmäßigsten und entspricht wohl am meisten den Absichten der Verfasser. Im besonderen treten die Verdienste Blacks und auch Watts um die Wärmelehre gebührend hervor. Die historische Grundlage des Werkes bringt allerdings von selbst mit sich, daß der Carnotsche Prozess vor den Arbeiten Mayers und seiner gleichstrebenden Zeitgenossen vorgeführt wird,

Digitized by Google

diese natürliche Ordnung erscheint in der Darstellung aber auch sachlich begründet. Auch die Wärmestrahlung ist eingehender als sonst gewöhnlich behandelt.

Bei Besprechung des Magnetismus wird zwar der Arbeiten von Gauß über den Erdmagnetismus ausführlicher gedacht, nicht aber der doch im Grunde viel wichtigeren über die Messung magnetischer Kräfte. Ein ähnliches Beschränken auf die allgemeine Beschreibung der Erscheinungen zeigt sich auch in den folgenden Abschnitten über Elektrizität, wiewohl doch hier Anlaß gewesen wäre, wenigstens auf die theoretischen Grundlagen der Maßbestimmung einzugehen, schon um die durchgreifende Bedeutung des Energiegesetzes zu zeigen. Zwar werden zahlenmäßige Beziehungen zwischen Elektrizität und Wärme mitgeteilt, aber ohne eigentliche Begründung, nur als Folge der Versuchergebnisse von Joule. Überhaupt ist die Elektrizität im Verhältnis zu andern Abschnitten zu kurz gekommen, und die Ungleichmäßigkeit der Behandlung tritt hier besonders störend auf. So wird die Abhandlung Oersteds über Elektromagnetismus vollständig wiedergegeben, die Induktionserscheinungen erhalten aber im ganzen kaum mehr Raum. Die Mitteilungen über die elektrische Strahlung erheben sich kaum über die bekannten populären Darstellungen im weniger guten Sinne. Ebensowenig kann der Schluß dieses Teiles über Telegraphie usw. befriedigen. Die ganze Darstellung über Magnetismus und Elektrizität würde einer Umarbeitung, oder sagen wir hier lieber gerade heraus, einer sorgfältigeren Bearbeitung bedürfen.

Der Schlußabsatz des Werkes, die Meteorologie betreffend, ist dagegen wieder gleichmäßig und glatt geschrieben und mit guten Kärtchen versehen.

Die Ausstellungen, zu denen das Werk im ganzen Anlaß gibt, beziehen sich im wesentlichen, um es zu wiederholen, auf die ungleichmäßige Behandlung der einzelnen Gegenstände. Weder in der Begrenzung des Umfanges, noch in der Art und Vertiefung der Darstellung ist annähernd gleichartig verfahren. Dagegen wird die ganze Anlage des Werkes gewiß viele Freunde finden, namentlich in Lehrerkreisen, denen auch die zahlreichen biographischen Notizen willkommen sein werden, und die aus der oft sehr geschickten, im besten Sinne gemeinverständlichen Vortragweise manche Anregungen schöpfen können.

Die Verlagsbuchhandlung hat das Werk mit reicher Bilderbeigabe versehen, an sich ebenso zweckdienlich wie löblich, nur manchmal über die durch den Charakter des Werkes gesteckten Grenzen hinausgehend. Was sollen beispielweise die Bilder auf S. 124, 125, 201 (Tempel von Karnak, Pyramidenbau, Schöpfwerk in Ägypten)? Auch die hausbackne Saugpumpe auf S. 233 verdient gewiß nicht eine ganze Buchseite. Einige Bilder sind auch unschön, so im zweiten Bande das auf S. 51 (Kathetometer). Vielleicht entschließt sich auch die Verlagsbuchhandlung, ihren in den verschiedensten Werken gar zu oft verwendeten ganzseitigen alten Bildstock (Bd. 2, S. 98), der eine schon zu ihrer Zeit nicht gute Dampfmaschine, noch dazu in falscher Zeichnung dargestellt, endlich auszumerzen.

Berlin. A. Rotth.

Digitized by Google

Müller-Pouillet. Lehrbuch der Physik und Meteorologie. 10. Aufl. herausgegeben von L. Pfaundler unter Mitarbeit von O. Lummer, A. Wassmuth, J. M. Pernter, K. Drucker, W. Kaufmann, A. Nippoldt. I. Bd. Zweite Abteilung, von L. Pfaundler. Braunschweig 1904, Friedrich Vieweg u. Sohn.

Die neue Auflage des bekannten Lehrbuches behandelt in der jetzt erschienenen zweiten Hälfte des ersten Bandes die Akustik. Wie in dem ganzen Werk ist auch hier die mathematische Behandlung auf ein Minimum beschränkt und das Hauptgewicht auf das Experiment gelegt, das durch zahlreiche Abbildungen erläutert wird. Besonders wichtige Untersuchungen sind in der Akustik seit dem Erscheinen der letzten Auflage nicht gemacht worden, sodaß zu tiefer eingreifenden, prinzipiellen Änderungen in der Anlage des Buches keine Veranlassung war; doch zeigen z. B. die Abschnitte über Wellenmaschinen, über die Grenzen der Tonwahrnehmung, über akustische Bewegungen, daß der Herausgeber die Literatur bis in die jüngste Zeit hinein für das Lehrbuch verwendet hat. Einer besonderen Empfehlung bedarf „der Müller-Pouillet“ nicht mehr.

Würzburg. HARMS.

Manderli. Die Interpolation und ihre Verwendung bei der Benutzung und Herstellung mathematischer Tabellen. 146 S. Solothurn 1906, Zepfels Buchdruckerei.

Es ist eine sehr fleißige und korrekte Arbeit, in welcher der Verfasser einige Kapitel aus der Technik des wissenschaftlichen Rechnens in einer für vorgebildete Kreise gewiß etwas zu weitschweifigen Art auseinandersetzt. Eine die Geschichte mathematischer Tafeln, insbesondere der Logarithmen behandelnde Einleitung ist recht lesenswert. Sodann wird die Lagrangesche Interpolationsformel gegeben und hieraus die Newtonsche abgeleitet. Die Umformungen und Spezialisierungen dieser mit vielen gut gewählten Beispielen machen den größten Teil des Buches aus. Dann wird zu den bei der Berechnung von Tabellen üblichen Methoden übergegangen. Hier würde man freilich mit der einfachsten, derjenigen der Interpolation in die Mitte, allein auskommen. Der Verfasser leitet aber auch die für die Drittelung, die Fünftelung und zum Überflusse — wie uns scheint — auch für die Zehntelung des Intervalles notwendigen Koeffizienten ab und gibt zum Schlusse die für die Tabulierung ganzer Funktionen förderlichen Anweisungen.

Charlottenburg. H. SAMTER.

Joh. Sahulka. Erklärung der Gravitation, der Molekularkräfte, der Wärme, des Lichtes, der magnetischen und elektrischen Erscheinungen auf gemeinsamer Ursache auf rein mechanischem, atomistischem Wege. Mit 22 Textabbildungen. 175 S. Wien u. Leipzig 1907, Carl Fromme.

Der Verfasser sucht die Gravitation durch den Hagel eines atomistisch zusammengesetzten Äthers zu erklären. Es stellen sich dieser Ansicht dieselben Schwierigkeiten entgegen, die bisher die Unwahrscheinlichkeit, wenn

Digitized by Google

nicht Unmöglichkeit ähnlicher Theorien dargetan haben (vgl. Enzyklop. Bd. V, 1. Teil, S. 60 ff.). Dem Verfasser sind diese Teilchen mit den Elektronen identisch, und sie dienen ihm auch zur Erklärung aller der im Titel genannten Erscheinungen.

Charlottenburg. H. Samter.

Die physikalischen Institute der Universität Göttingen. Festschrift im Anschlusse an die Einweihung der Neubauten am 9. Dezember 1905. Herausgegeben von der Göttinger Vereinigung zur Förderung der angewandten Physik und Mathematik. 200 S. Leipzig und Berlin 1906, B. G. Teubner. Preis *M* 12.

„Es ist das Verdienst von Göttingen, den Forderungen einer neuen Zeit Rechnung getragen zu haben durch die trefflichen Unterrichtsorganisationen, die den früheren Lehrinhalt in vorzüglicher Weise bereichern und ergänzen. Es knüpft Göttingen damit an seine große Vergangenheit an, an die der reinen und angewandten Mathematik in gleichem Maße zugewandte Lebensarbeit von Gauß“ (W. v. Dyck in „Kultur der Gegenwart“ Bd. 1, S. 337). Mit den im Jahre 1905 eingeweihten Neubauten der Laboratorien für experimentelle und theoretische Physik, denen sich das neue Institut für angewandte Elektrizität, ferner noch diejenigen für angewandte Mathematik und Mechanik, für Geophysik und für physikalische Chemie anreihen, sind mustergültige Anstalten ins Leben getreten, auf deren Einrichtung die preußische Unterrichtsverwaltung, besonders aber auch die Göttinger Vereinigung stolz sein kann, deren kraftvollen Bestrebungen das Entstehen derselben zu danken ist. Der vorliegende, reich ausgestattete Band enthält die Beschreibung der Bauten und ihrer Einrichtungen, die bei der Einweihung gehaltenen Reden und alles, was über die Geschichte der jetzt zur Ausführung gelangten Ideen besonders mitteilenswert erschien.

Charlottenburg. H. Samter.

S. Oppenheim. Das astronomische Weltbild im Wandel der Zeit. (Aus Natur und Geisteswelt. 110. Bändchen.) 164 S. Leipzig 1906, B. G. Teubner. Preis geb. *M* 1,25.

Unser Zeitalter mit seinen gewaltigen Erfolgen auf den der mathematischen Behandlung zugänglichen Gebieten ist leicht geneigt, mit Geringschätzung auf die Vergangenheit zu blicken, und es ist wohl nicht zuviel gesagt, wenn man behauptet, daß von der Fülle des Erreichten der historische Sinn erdrückt wird. Um so beruhigender wirkt es, wenn man sich Zeit läßt, die wissenschaftlichen Ideen in ihrem Werden zu beobachten. Wie schützt es vor Überhebung, wenn wir die Schwierigkeiten, die den früheren, vom Wahrheitstriebe gleich den heutigen beseelten Forschern sich entgegentürmten, uns vor Augen stellen, und wie hervorragend erscheint uns manche fast vergessene Leistung, die solche Schwierigkeiten beseitigt und überwindet! Was aber könnte in der Beziehung anziehender sein, als das astronomische Weltbild im Wandel der Zeit zu verfolgen, besonders wenn wir dabei einen in der Geschichte der Himmelskunde so beschlagenen Führer wie den Verfasser haben? Das Werkchen, das aus „University-

Digitized by Google

Extension"-Vorlesungen in Prag hervorgegangen ist, kann jedem Gebildeten zur eingehenden Lektüre dringend empfohlen werden. Auch wir sind über viele Einzelheiten daraus belehrt worden, die in anderen historischen Büchern gar nicht oder zu nebensächlich behandelt erscheinen.

Charlottenburg. H. Samter.

Die Kultur der Gegenwart, herausgegeben von **Paul Hinneberg.** 1. Bd. Die allgemeinen Grundlagen der Kultur der Gegenwart. XV u. 671 S. Leipzig und Berlin 1906, B. G. Teubner. Preis in Leinwand geb. *M* 18.

Wir sind erfreut, an dieser Stelle auf diese großartig angelegte, in der Weltliteratur einzig dastehende Enzyklopädie aufmerksam machen zu dürfen, zu deren Abfassung die besten Kräfte des geistigen Deutschlands sich zusammengefunden haben. Die weitschichtigen Fundamente, auf denen das geistige Leben der Gegenwart beruht, sollen in einer Reihe von Bänden geschildert, die Entwicklung jedes Gebietes menschlicher Erkenntnis und menschlichen Könnens allen Gebildeten der Nation nahegebracht werden. Die uns vorliegenden Proben des ersten bisher abgeschlossen vorliegenden Bandes lassen erkennen, daß bei aller nötigen Kürze die Gründlichkeit der Darstellung nicht gelitten hat. Diese Proben betreffen die naturwissenschaftliche Hochschulbildung, welche W. v. Dyck als im organischen Zusammenhange mit der Wissenschaft und der Technik — bis zur neuesten Phase der technischen Hochschulbildung — sich entwickelnd darstellt, nicht ohne auf die Tagesfragen der Vorbildung und der Weiterbildung Antwort zu geben. K. Kraepelin gibt eine Geschichte der naturwissenschaftlich-technischen Museen und eine Einteilung derselben nach den verschiedenen Zwecken, denen diese dienen oder doch dienen sollten. Otto N. Witt behandelt die Entstehung und Entwicklung naturwissenschaftlich-technischer Ausstellungen und kennzeichnet die Wirkungen, die auch sie auf die Kultur der Gegenwart gehabt haben.

Charlottenburg. H. Samter.

P. Zühlke. Ausführung elementargeometrischer Konstruktionen bei ungünstigen Lageverhältnissen. 46 S. mit 55 Figuren im Text. Leipzig u. Berlin 1906, B. G. Teubner. Preis kart. *M* 1.

Es handelt sich um zweierlei Aufgaben, nämlich solche, bei denen unzugängliche Punkte benutzt werden, und solche, bei denen der unsichere Schnittpunkt ebener Linien genauer zu bestimmen ist. Besonders von den ersten sind einige in planimetrische Lehrbücher übergegangen, aber der Verfasser, der die Winkelgäßchen der elementaren und der darstellenden Geometrie kennt, hat aus ihnen eine Fülle wenig bekannter Konstruktionen hervorgeholt und einige neu hinzugefügt, so daß ein zur gelegentlichen Belebung des Unterrichts sehr geeignetes Material zusammengetragen wird. Von der bekanntesten Aufgabe: einen gegebenen Punkt mit dem unzugänglichen Schnittpunkt zweier Geraden geradlinig zu verbinden, sind nicht weniger als neun Konstruktionen ausgeführt.

Charlottenburg. H. Samter.

Digitized by Google

H. Edwardson. Woher kam das Leben? Eine Abhandlung über die Herkunft, Entstehung und das Vergehen des Lebens. Mähr. Ostrau, A. Papauschek. 50 S. Leipzig 1906, Robert Hoffmann.

Verfasser stellt eine Reihe von Behauptungen auf und sucht einige derselben auch experimentell zu begründen. Indessen scheinen diese Versuche keineswegs einwandsfrei, sondern der Nachprüfung dringend bedürftig, z. B. ein Versuch mit einem Hühnerei, bei dem — übrigens wenn es geronnen ist — ein galvanischer Strom zwischen Eiweiß und Dotter fließt, der — sehr einfach — die Erklärung für die Bildung des Hühnchens bildet. Der hierdurch bedingte Polarisationsstrom ist — wiederum höchst einfach — der Lebensstrom des Huhnes.

Charlottenburg. H. Samter.

Technik und Schule. Beiträge zum gesamten Unterrichte an technischen Lehranstalten. In zwangslosen Heften herausgegeben von Prof. **M. Girndt.** I. Band. 1. Heft. 64 S. Leipzig und Berlin 1906, B. G. Teubner. Preis ℳ 1,60.

Die rapide Entwicklung des technischen Mittelschulwesens läßt es geraten erscheinen, mit dieser Zeitschrift ein eigenes Organ für die Interessen derselben, insbesondere für die Methodik der zu lehrenden Unterrichtsfächer und den Lehrplan, der der Besonderheit der Schule angepaßt werden muß, ins Leben zu rufen. Denn erst jetzt liegen — so scheint es — die Erfahrungen vor, welche einer festen Regelung der bezeichneten Gegenstände vorausgehen müssen. Der Inhalt des vorliegenden ersten Heftes zeigt in gediegenen Aufsätzen, wie in den Baugewerkschulen die kunsthandwerkliche Erziehung, der Naturlehreunterricht und der Rechenunterricht mit Rücksicht auf das Ganze vorteilhaft zu gestalten sind. Eine Anzahl Bücherbesprechungen und eine kurze Mitteilung über den Vakuumreiniger schließen dieses Heft, dem wir Verbreitung in den interessierten Kreisen wünschen.

Charlottenburg. H. Samter.

F. Paulsen. Das deutsche Bildungswesen in seiner geschichtlichen Entwickelung. (Aus Natur und Geisteswelt 100. Bändchen.) 192 S. Leipzig 1906, B. G. Teubner. Preis geb. ℳ 1,25.

Es gebührt dem Verleger großer Dank, daß es ihm gelungen ist, für diese schöne Sammlung im besten Sinne populär-wissenschaftlicher Darstellungen den Mann zur Darstellung des Werdeganges des deutschen Bildungswesens zu gewinnen, der wie kein anderer dazu berufen ist, den Verfasser der Geschichte des gelehrten Unterrichtes. Bedingt von der politischen Geschichte und derjenigen der Wissenschaften hat das deutsche Bildungswesen seine heutige Verfassung erlangt, die als abgeschlossen nicht anzusehen ist. Der Ausblick, den wir von dem erreichten Ziele aus genießen, zeigt uns alle wichtigen Tagesfragen als nur im Zusammenhange mit der über die Zukunft des Bildungswesens zu beantworten.

Es ist ein Buch, dem wir eine Verbreitung weit über die Kreise der im speziellen am Bildungswesen Arbeitenden hinaus von Herzen wünschen.

Charlottenburg. H. Samter.

Digitized by Google

Loisel. Guide de l'amateur météorologiste. VI u. 101 S. Paris 1906, Gauthier-Villars. Fr. 2,75.

Das hübsch ausgestattete Buch erscheint recht geeignet, Dilettanten der Meteorologie eine Anleitung zu wertvollen Beobachtungen zu geben. Außer den auf den Stationen zweiter Ordnung üblichen finden wir auch solche über die Temperatur der Gewässer und ihre Niveauänderungen sowie die phänologischen berücksichtigt. Ein recht brauchbarer Anhang behandelt die Photographie im Dienste der Wetterkunde und die selbstregistrierenden Instrumente. Über die Aufstellung der Instrumente und die rechnerische Verwertung der beobachteten Größen ist das Nötige gesagt.

Charlottenburg. H. Samter.

P. Henkler. Der Lehrplan für den Unterricht in Naturkunde. Historisch und kritisch betrachtet. A. u. d. T.: Sammlung naturwissenschaftlich-pädagogischer Abhandlungen hrsg. von Hugo Otto Schmeil und W. B. Schmidt. II. Bd. Heft 7. IV u. 44 S. Leipzig 1906, B. G. Teubner. Preis geh. ℳ 1,—.

O. Meißner. Die meteorologischen Elemente und ihre Beobachtung. Mit Ausblicken auf Witterungskunde und Klimalehre. Unterlagen für schulgemäße Behandlung sowie zum Selbstunterrichte. (Sammlung naturwissenschaftlich-pädagogischer Abhandlungen Bd. II, Heft 6.) Mit 33 Textabbildungen. VI u. 94 S. Leipzig und Berlin 1906, B. G. Teubner. Preis geh. ℳ 2,60.

Aus gewissen Prämissen, wie sie theoretische Pädagogen formuliert haben, läßt sich wohl — wie vom Verfasser geschieht — ein Lehrplan konstruieren. Doch wäre die allgemeine Gültigkeit dieser Prämissen zu zeigen. Daß nicht jeder Lehrer die Durchführung der Herbartschen Formalstufen in allen Unterrichtsstunden noch die von seinen Nachfolgern empfohlenen Jahresstufen für notwendig erachtet, zeigt nachgerade, daß es einen allein richtigen Lehrplan auch nicht geben kann, und daß dieser sich den jedesmaligen Bedürfnissen anzupassen und stets den Neigungen des einzelnen Lehrers, dessen Persönlichkeit doch mehr als jeder Lehrplan wirken wird, Spielraum gewähren muß. Im einzelnen wird das erstgenannte Werkchen manche Anregung bieten.

Die Meteorologie wird im Unterrichte der höheren Lehranstalten sowohl bei der Physik als bei der allgemeinen Erdkunde Berücksichtigung erfahren können. Der Verfasser hat all das, was sich auch bei einem stärkeren Eingehen wird bringen lassen, in dem zweiten Bändchen vereinigt, ohne irgendwo von der üblichen Darstellung wesentlich abzuweichen. Dankenswert ist die richtige Erklärung für die Erwärmung des Wassers, auf welche der Verfasser schon im Vorwort hinweist.

Charlottenburg. H. Samter.

Wiltz. Mathematische Unterrichtsbriefe. Unter Mitwirkung von bewährten Fachleuten bearbeitet. Straßburg (Elsaß), Wolstein & Teilhaber.

Von den uns vorliegenden beiden Lehrbriefen, deren jedem noch ein Wiederholungsbrief beigegeben ist, enthält der erste auf 30 Seiten die Grundrechnungsarten, die Potenzlehre, Dezimalbrüche und Wurzelberechnung,

Digitized by Google

der zweite auf 28 Seiten das „Logarithmieren", die Gleichungen des ersten und des zweiten Grades. Sie sollen dem Selbstunterricht dienen. Sie enthalten fast nur Theorie, während die Übungen in die Wiederholungsbriefe von je 9—10 Seiten gestellt sind. Diese wären aber für den Selbstunterricht die Hauptsache. Gerade hier empfiehlt es sich auch besonders, von den Gleichungen auszugehen und die vielen Lehrsätze — die Theorie des Rechnens — unbewiesen zu lassen. Wir fürchten, daß der gute Zweck, der dem Herausgeber vorschwebt, nicht erreicht werden wird, daß der Leser ermüdet die Briefe aus der Hand legen und zu andern in der Unterrichtsliteratur reichlich vorhandenen besser geeigneten Büchern greifen wird.

Charlottenburg. H. Samter.

M. Petrovitch. La Mécanique des Phénomènes fondées sur les Analogies. Sammlung „Scientia". Paris 1906, Gauthier-Villars.

Das Buch stellt die bekanntlich sehr zahlreichen Fälle zusammen, in denen Vorgänge aus ganz verschiedenen Teilen der Physik auf dieselbe Differentialgleichung führen. Und zwar will es die Differentialgleichung als das Wesentliche hinstellen und schaltet deshalb aus der Betrachtung vermittels einer oft wunderlichen Namengebung alles aus, was, wie z. B. das Wort Kraft, auf ein spezielles Anwendungsgebiet hinweisen könnte. Es ist dem Verfasser aber nicht gelungen, diesem gewiß interessanten Thema gerecht zu werden. Er bleibt überall zu elementar, um in die Tiefe gehen zu können. Die Frage nach dem physikalischen Grunde dieser zunächst rein äußerlichen Zusammenhänge ist nicht einmal berührt, und doch hätten z. B. die Helmholtzschen Untersuchungen über die Ausdehnung des Gültigkeitsbereiches des Prinzips der kleinsten Wirkung wenigstens erwähnt werden sollen. Auch sticht gegen die sonstige, oft ermüdende Breite der Behandlung auffallend die Kürze ab, mit der die mathematisch schwierigeren Fälle partieller Differentialgleichungen abgetan werden.

Berlin. M. Laue.

John Wellesley Russel. An Elementary Treatise on Pure Geometry. With numerous examples. New and revised edition. XII und 370 S. Oxford 1905. Price 9 s.

Der Verfasser macht mit elementaren Methoden bekannt, die zur Untersuchung der Kegelschnitte benutzt werden, dann aber auch mit den Methoden der projektiven Geometrie. Er stellt die Hauptsätze zusammen, die mit „Harmonics, Anharmonics, Involution, Projection, Reciprocation" zusammenhängen. In der Auswahl des Stoffes und in der Art der Darstellung zeigt sich das pädagogische Geschick des Verfassers, der auch wohl versteht, zur Verarbeitung und Aneignung des dargebotenen Stoffs durch geeignete Übungsbeispiele anzuregen.

Breslau. M. Peche.

Smithsonian Institution. Annual report of the board of regents for the year ending June 30, 1904. Washington 1905.

Ein stattlicher, mit Abbildungen ausgestatteter Band, der neben Verwaltungsberichten eine große Zahl von allgemein interessanten Mitteilungen,

Digitized by Google

besonders aus dem Gebiete der Naturwissenschaften bringt. Zumeist sind es allerdings schon veröffentlichte Aufsätze hervorragender Forscher aller Erdteile, die hier wiedergegeben werden. So seien genannt, um einen Überblick über die herangezogenen Gebiete zu ermöglichen: Langley, Versuche mit der Langleyschen Flugmaschine; Hale und Ellermann, der Rumfordsche Spektroheliograph des Yerkes-Observatoriums; Poynting, Strahlung im Sonnensystem; Lummer, Beobachtungen über Sehen im Hellen und Dunklen nebst Hypothese über die Ursache der Farbenblindheit; Maver, Fortschritte in drahtloser Telegraphie; Thomsen, elektrisches Schweißen; Freshfield, Gebirge und Mensch; Fischer, Marokko; Nevell, Landverbesserungsdienst (Bewässerung); de Vries, Evolution; Lydekker, Tibetanische Tiere; Herdman, Perlfischerei in Ceylon; Hewett, Übersicht über die Archäologie des Pueblogebietes; Hrdlička, Bemalung von Menschenknochen bei den Urbewohnern Amerikas; Bushell, Chinesische Architekturen; Liberty, Zinn und die Wiederbelebung seines Gebrauches; Gorgas, die Gesundungsförderung der Zone des Panamakanals; u. a. m. — Die Gebeine Smithsons, des Begründers des Instituts, sind Anfang 1904 von Genua nach Washington übergeführt worden.

Wilmersdorf. R. Scheibe.

H. Wehner. Über die Kenntnis der magnetischen Nordweisung im frühen Mittelalter. S.-Abdr. aus „Das Weltall" 1905, Heft 18—20.

Zwei äußere Umstände beeinträchtigen in hohem Maße unsere empirische Kenntnis von den erdmagnetischen Erscheinungen und erschweren damit den Fortschritt der theoretischen Erkenntnis: die außerordentlich ungleichmäßige Verteilung des Beobachtungsmaterials über die Erdoberfläche und im Hinblick auf die Langsamkeit der säkularen Änderung die Kürze der Zeit, aus der wir bis jetzt Beobachtungen besitzen. Reichen doch selbst bei dem am besten bekannten Element, der Deklination, die ältesten, spärlichen direkten Messungen nicht über den Anfang des 16. Jahrhunderts hinaus. Einige auf indirektem Wege (nach Dopplers Vorschlag durch die Verwertung alter Grubenrisse und aus einzelnen, zuerst von Hellmann beachteten Angaben auf Sonnenuhren) erschlossene Daten erweitern das Material nicht wesentlich, so interessant sie an sich sind.

Demgegenüber eröffnen die Feststellungen, die dem Verfasser der vorliegenden Arbeit gelungen sind, allem Anschein nach eine ungemein reiche Quelle von wesentlich älteren Deklinationswerten.

Die von der genauen Ost-West-Richtung meist abweichende Lage der Längsachse der mittelalterlichen Kirchen ist in Anlehnung an eine von Nissen für altgriechische und italische Tempel aufgestellte Hypothese von verschiedenen Forschern auf eine eigentümliche Methode astronomischer Orientierung zurückzuführen versucht worden.

Der Verfasser zeigt zunächst die Unhaltbarkeit dieser Hypothese und stellt ihr dann eine andere, auf umfangreiche eigene Forschungen begründete Erklärung gegenüber, die er schon vor 10 Jahren ausgesprochen, seitdem aber weiter verfolgt und geprüft, und für die er inzwischen auch einen aus dem Jahre 1516 stammenden urkundlichen Beweis gefunden hat. Er findet, daß man die Magnetnadel zur Ermittelung der Achsenlage benutzt habe, daß

Digitized by Google

also, kurz gesagt, die Kirchen mißweisend orientiert wurden. Damit wäre natürlich nun umgekehrt, wenn sich das Jahr der Gründung angeben läßt, für dieses Jahr die Deklination an dem Orte der Kirche bekannt.

Im ganzen hat der Verfasser bis zum Jahre 1903 etwa 300 deutsche Kirchen untersucht, deren Gründung bis zum siebenten Jahrhundert zurückreicht. Soweit sich die bekannte Säkularvariation rückwärts extrapolieren läßt, findet er sie durch die aus den Kirchenlagen fließenden Resultate bestätigt, während er für die ältere Zeit die gewonnenen Einzelergebnisse in ein für ihre sachliche Bedeutung sprechendes zusammenhängendes System, das ihm damit zugleich die Säkularvariation für jene Zeit gibt, zu bringen vermochte. Danach müßte die Kenntnis der Nordweisung der Magnetnadel in Europa sehr viel älter sein, als man bisher gewußt hat.

Auf Einzelheiten einzugehen, fehlt hier der Platz. Wichtiger erscheint es, nachdrücklich auf die große Bedeutung der Ergebnisse und auf die Notwendigkeit einer eingehenden Veröffentlichung wie einer systematischen Fortführung der Untersuchungen des Verfassers hinzuweisen. Wenn dieser insbesondere die Akademien, deren naturwissenschaftliche und historische Klassen dabei zusammenwirken müßten, als berufen bezeichnet, diese Aufgabe zu übernehmen, so wird man ihm durchaus zustimmen können. Eine entsprechende formelle Anregung von seiner Seite würde sicherlich die lebhafte Unterstützung der Vertreter der magnetischen Wissenschaft finden. Daß diese bisher den Forschungen des Verfassers nicht die ihnen sachlich zukommende Beachtung geschenkt haben, liegt — diese Bemerkung pro domo möge verschiedenen Äußerungen des Verfassers gegenüber gestattet sein — vor allem an der wenig zweckmäßigen Art seiner bisherigen Veröffentlichungen. Eine kurze Zusammenstellung einiger typischen Beispiele unter Beifügung aller zur selbständigen Beurteilung und kritischen Nachprüfung nötigen Daten würde, in einem Fachblatt veröffentlicht, ausgereicht haben, die Aufmerksamkeit der erdmagnetischen Forscher zu erregen und weiteren, ausführlicheren Mitteilungen das gewünschte Interesse zu sichern.

Potsdam. Ad. Schmidt.

Leibnizens nachgelassene Schriften physikalischen, mechanischen und technischen Inhalts. Herausgegeben und mit erläuternden Anmerkungen versehen von Ernst Gerland. VI u. 256 S. Leipzig 1906, B. G. Teubner. Preis ℳ 10.

Das vorliegende Werk bildet das XXI. Heft der „Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen, begründet von Moritz Cantor"; es bringt die in der Königlichen Bibliothek zu Hannover vorhandenen von Leibniz hinterlassenen Schriften über Physik und Technik zum ersten Mal zur öffentlichen Kenntnis; die in gleicher Richtung liegenden Briefe sind nicht mit aufgenommen.

In dem physikalischen Teil nehmen den breitesten Raum die optischen Arbeiten ein; sie behandeln überwiegend die Brechung und ruhen auf der Annahme eines geradlinigen Fortschreitens der Lichtteilchen. Wichtiger sind die akustischen Untersuchungen, da in ihnen die Entstehung der Schallwellen zur Darstellung gelangt. Am meisten Erstaunen jedoch dürften die technischen Betrachtungen erwecken, nicht der Förderungen wegen,

Digitized by Google

welche die Technik Leibniz verdanken mag, sondern weil sie einen Blick in die unglaubliche Vielseitigkeit des großen Gelehrten und Staatmannes tun lassen. Wir erfahren seine Bemühungen um die Verbesserung der Uhren, der Pumpen, der Schiffahrt und des Fuhrwesens, können uns aber bei vielen Nichtigkeiten, z. B. seiner „neuen Manier zu schießen", seinen Bemerkungen über Nägel mit eingefeilten Zähnen, über Hämmern, Angeln u. dgl., des Gedankens nicht erwehren, daß hier ein reicher Geist mit seinen Gaben liebäugelt. Den Schlußaufsatz „lustiger Einfall über eine neue Art von Schaustellungen" könnte ein geriebener Marktschreier großen Stils entworfen haben.

Die Anteilnahme, die Leibniz für seine Person fordern darf, wird durch die hier veröffentlichten Schriften reich befriedigt; zugleich eröffnen sie einen vortrefflichen Einblick in mancherlei Denkweisen des 17. Jahrhunderts. Daher werden alle Freunde der Geschichte der Physik und Technik es dem Herausgeber danken, daß und wie er die außerordentlich mühevolle Aufgabe bewältigt hat, die lateinisch, französisch und deutsch geschriebene Hinterlassenschaft Leibnizens für die Drucklegung herzurichten; auch die zahlreichen Anmerkungen, welche über die Zeit der Niederschrift aufklären und sachliche Erläuterungen bringen, bekunden die große Sorgfalt und umfassende Gelehrsamkeit des Herausgebers.

Berlin. P. Johannesson.

J. L. Heiberg und **H. G. Zeuthen. Eine neue Schrift des Archimedes.** Sonderabdruck aus Bibliotheca Mathematica 7_3, 1907, S. 321—363. Leipzig 1907, B. G. Teubner. Preis geh. ℳ 1,60.

J. L. Heiberg hat in Konstantinopel einen interessanten Fund gemacht. Unter den Schriftzügen eines Manuskriptes des XIII. Jahrhunderts vermochte er den abgewaschenen Text einer älteren Handschrift aus dem X. Jahrhundert zu entziffern; sie stellte sich als eine Abhandlung des Archimedes heraus, die man bisher nur aus Zitaten Herons kannte. Ihr Inhalt ist insofern von außerordentlicher Wichtigkeit, als er einen Einblick in die Arbeitsmethode des Archimedes gestattet. In allen anderen Abhandlungen gibt Archimedes nur Lehrsätze mit formvollendeten Beweisen. Hier berichtet er dem alexandrinischen Gelehrten Eratosthenes, dem er vorher die behandelten Lehrsätze ohne Beweis (Kubaturen von Rotationskörpern und Segmenten derselben) mitgeteilt hatte, wie er mit Hilfe der Mechanik aus Schwerpunktsbetrachtungen zu seinen Theoremen geführt sei, und empfiehlt ihm diese heuristischen Methoden zur Auffindung weiterer Sätze. Dieser analytischen Behandlung läßt Archimedes zum Teil die strengen geometrischen Beweise folgen. Der Schluß der Abhandlung, in der sonst nur geringe, leicht zu ergänzende Lücken auftreten, fehlt. — In einem zugefügten Kommentar bespricht Zeuthen die archimedischen Herleitungen und sucht historisch die neue Abhandlung den bekannten Schriften des Archimedes einzureihen.

Berlin. Tropfke.

Digitized by Google

Vermischte Mitteilungen.

1. Aufgaben und Lehrsätze. Lösungen.

A. Aufgaben und Lehrsätze.

194. Bezeichnet man die Clausensche Reihe (Crelles Journ. III. Bd.)

$$1 + \frac{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma}{1 \cdot \theta \cdot \varepsilon} x + \frac{\alpha(\alpha+1) \cdot \beta(\beta+1) \cdot \gamma(\gamma+1)}{1 \cdot 2 \cdot \theta(\theta+1) \cdot \varepsilon(\varepsilon+1)} x^2 + \cdots$$

kurz mit $F(\alpha, \beta, \gamma, \theta, \epsilon, x)$, so gilt die Gleichung:

$$3 \cdot F\left(\frac{1}{3n}, \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{6n}, \quad -\frac{1}{6n}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{1}{3}, \quad x\right) =$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{1-x}}{2}}} + \sqrt[3]{\frac{1-\sqrt{1-x}}{2}} + \sqrt[n]{\sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{1-x}}{2}}} + \omega \sqrt[3]{\frac{1-\sqrt{1-x}}{2}}$$

$$+ \sqrt[n]{\sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{1-x}}{2}}} + \omega^2 \sqrt[3]{\frac{1-\sqrt{1-x}}{2}},$$

worin ω eine primitive dritte Einheitswurzel bedeutet.

Aussig, Böhmen. stud. math. Jos. Krug.

195. Zu beweisen, daß für jeden Wert von x

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}\right]^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!\, x^n}{(n!)^4}.$$

Aussig, Böhmen. stud. math. Jos. Krug.

196. Rollt eine logarithmische Spirale auf einem Kreise, so beschreibt der Krümmungsmittelpunkt des jeweiligen Berührungspunktes eine Archimedische Spirale, der Pol aber eine gewöhnliche Kreisevolvente.

Speyer. H. Wieleitner.

197. Die im Abstande l auf der konkaven Seite genommene Parallelkurve einer logarithmischen Spirale ist mit derjenigen Evolvente derselben logarithmischen Spirale kongruent, für welche die Abwickelung in dem Punkte der Spirale beginnt, der von ihrem Pole die auf der Kurve gemessene Entfernung l hat.

Speyer. H. Wieleitner.

Digitized by Google

B. Lösungen.

Zu **17** (Bd. I, S. 370) (C. A. Laisant). — Soit un déterminant, dont on considère une diagonale $A\,B$, et les lignes obliques, parallèles à cette diagonale

$$A \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; B$$

Le déterminant étant du n^e ordre, ces lignes ont $n-1,\ n-2,\ \ldots,\ 2, 1$ termes.

Ceci posé, soient $p, q, r, \ldots, z, t$ des nombres indéterminés quelconques, au nombre de $n-1$.

On multiplie les termes de la première ligne parallèle à $A\,B$ par $p, q, \ldots, t$; ceux de la 2e, par $p\,q,\ q\,r, \ldots, z\,t$, et ainsi de suite, jusqu'au dernier terme (de l'angle) qui est multiplié par $p, q, r, \ldots, t$. Enfin, on divise chaque terme au-dessus de $A\,B$ par le même nombre qui a servi de multiplicateur au terme symétrique.

Démontrer que le nouveau déterminant obtenu est équivalent au déterminant donné.

N. B. Cette transformation peut être précieuse dans certaines applications, à cause de l'indétermination des éléments $p, q, \ldots, t$.

Man multipliziere die neue Determinante mit $\dfrac{1}{p\,q^{n-2}\,r^{n-3}\ldots t}$, ferner, um ihren Wert ungeändert zu lassen, die 1. Zeile mit p, die 3., 4., $\ldots(n-1)$., n. Spalte mit q, die 4., 5., $\ldots(n-1)$., n. Spalte mit r u. s. f., die n. Spalte mit t. Man sieht nun leicht, daß aus der 1. Spalte der Faktor p, aus der 3., 4., $\ldots(n-1)$., n. Zeile q^{n-2}, aus der 4., 5., $\ldots(n-1)$., n. Zeile r^{n-3} etc., aus der n. Zeile der Faktor t, zusammengenommen das Produkt $p.\,q^{n-2}.\,r^{n-3}\ldots t$ vor die Determinante tritt. Es bleibt dann nur die ursprüngliche Determinante übrig, womit die Behauptung bewiesen ist.

Um eine Anwendung dieses Satzes zu geben, betrachte ich folgendes Beispiel: „Alle Tetraeder zu finden, die mit einem gegebenen dasselbe Volumen besitzen." Sind (x_i, y_i, z_i) $(i = 1, 2, 3, 4)$ die Koordinaten der vier Ecken des gegebenen Tetraeders in Bezug auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, so ist bekanntlich das Volumen V desselben gegeben durch:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = 6\,V.$$

Andererseits ist nach dem voranstehenden:

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{x_1}{p} & \frac{y_1}{pq} & \frac{z_1}{pqr} \\ p & x_2 & \frac{y_2}{q} & \frac{z_2}{qr} \\ pq & x_3 q & y_3 & \frac{z_3}{r} \\ pqr & x_4 qr & y_4 r & z_4 \end{vmatrix} = 6\,V.$$

Digitized by Google

Hierin hat man die Parameter p, q, r alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ (0 ausgenommen) durchlaufen zu lassen, um alle Tetraeder der verlangten Eigenschaft zu erhalten, und zwar ergeben sich 4 Scharen derselben, von denen jede dadurch entsteht, daß drei aufeinanderfolgende Ecken sich in Ebenen bzw. parallel der YZ, ZX, XY Ebene bewegen, während die vierte Ecke eine beliebige Lage im Raume einnimmt.

Berlin. cand. math. WERNER GAEDECKE.

Zu **177** (Bd. XI, S. 276) (W. Fr. Meyer). — Sind x, y, z rechtwinklige Koordinaten eines Raumpunktes, so stellen die Gleichungen

$$x = a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2, \quad y = b_0\lambda^2 + b_1\lambda + b_2, \quad z = c_0\lambda^2 + c_1\lambda + c_2$$

bei nicht verschwindender Determinante $(a_0\, b_1\, c_2)$ stets eine Parabel dar und umgekehrt. Es sind die Elemente dieser Parabel (Lage ihrer Ebene, Lage von Achse, Brennpunkt und Direktrix, Wert des Parameters) zu berechnen.

Der Koordinatenanfangspunkt sei O; die zu bestimmende Kurve bezeichne man mit K und setze die Determinante $(a_0\, b_1\, c_2) = D$, ihre Unterdeterminanten $(b_0\, c_1) = A$, $(c_0\, a_1) = B$, $(a_0\, b_1) = C$. Dann ist

$$a_0A + b_0B + c_0C = 0, \quad a_1A + b_1B + c_1C = 0, \quad a_2A + b_2B + c_2C = D;$$

mithin genügen x, y, z der Gleichung $Ax + By + Cz = D$. Diese Gleichung stellt diejenige Ebene E dar, die von den Koordinatenachsen die Strecken

$$OX = \frac{D}{A}, \quad OX = \frac{D}{B}, \quad OZ = \frac{D}{C}$$

abschneidet; also ist die Kurve K eine in der Ebene E liegende Kurve.

Eine beliebige, der yz-Ebene parallele Ebene schneidet die Kurve K in den beiden Punkten

$$\lambda = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0(a_2 - x)}}{2a_0}.$$

Diese Punkte fallen zusammen, wenn $x = \frac{4a_0a_2 - a_1^2}{4a_0} = x_1$ ist; mithin berührt die Ebene $x = x_1$ die Kurve K; der Berührungspunkt ist bestimmt durch $\lambda = -\frac{a_1}{2a_0}$. Desgleichen wird die Kurve K berührt von der Ebene $y = y_1 = \frac{4b_0b_2 - b_1^2}{4b_0}$ im Punkte $\lambda = -\frac{b_1}{2b_0}$ und von der Ebene $z = z_1 = \frac{4c_0c_2 - c_1^2}{4c_0}$ im Punkte $\lambda = -\frac{c_1}{2c_0}$. Es bezeichne nun L den in der Ebene E durch $y = y_1$ und $z = z_1$ bestimmten Punkt; die entsprechenden durch $z = z_1$, $x = x_1$ und durch $x = x_1$, $y = y_1$ bestimmten Punkte seien M bezw. N. Dann ist das in der Ebene E liegende Dreieck LMN ein Tangentendreieck der Kurve K; die auf den Seiten MN, NL, LM liegenden Berührungspunkte seien P, Q, R. Ferner ist das Dreieck LMN dem Dreiecke XYZ ähnlich und befindet sich mit ihm in Ähnlichkeitslage.

Um die Gestalt der Kurve K zu bestimmen, projiziere man diese auf die xy-Ebene. Die Gleichung der Projektion ergibt sich durch Elimination von λ aus den Gleichungen

$$x = a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2, \quad y = b_0\lambda^2 + b_1\lambda + b_2.$$

Digitized by Google

Man findet zunächst $\lambda = \frac{(a_2 b_0) - (b_0 x - a_0 y)}{C}$ und erhält sodann nach hinreichender Reduktion: $0 =$

$$(I)\quad (b_0 x - a_0 y)^2 - [2 b_0 (a_2 b_0) + b_1 C] x + [2 a_0 (a_2 b_0) + a_1 C] y + (a_2 b_0)^2 - (a_1 b_2) C.$$

Da diese Gleichung eine Parabel darstellt, so ist auch die Kurve K eine Parabel.

Das ursprüngliche Koordinatensystem werde jetzt parallel mit sich selbst verschoben, so daß $O' = (x_1, y_1, z_1)$ der neue Anfangspunkt wird. Die neuen Koordinaten seien x', y', z'; dann ist $x = x' + x_1$, $y = y' + y_1$, $z = z' + z_1$; die x'-Achse geht durch L, die y'-Achse durch M, die z'-Ache durch N. Die Gleichung der Projektion K' der Parabel K auf die $x'y'$-Ebene erhält man, wenn man in (I) $x' + x_1$ oder $x' + \frac{4 a_0 a_2 - a_1^2}{4 a_0}$ für x und $y' + y_1$ oder $y' + \frac{4 b_0 b_2 - b_1^2}{4 b_0}$ für y einsetzt. Nach einiger Rechnung und Reduktion ergibt sich

$$(II)\qquad (b_0 x' - a_0 y')^2 - \frac{C^2}{2 a_0 b_0} (b_0 x' + a_0 y') + \frac{C^4}{16 a_0^2 b_0^2} = 0.$$

Bezeichnet man die Projektionen der Punkte P und Q mit P' und Q', so findet man

$$O'Q' = \frac{C^2}{4 a_0 b_0^2}, \quad O'P' = \frac{C^2}{4 a_0^2 b_0}.$$

Die Gleichung der Parabel K, bezogen auf die Tangenten NQ und NP als Koordinatenachsen, hat dieselbe Form wie (II); sie lautet, wenn man die Koordinaten mit ξ, η bezeichnet und $NQ = l$, $NP = m$ setzt,

$$(III)\qquad (m\xi - l\eta)^2 - 2lm(m\xi + l\eta) + l^2 m^2 = 0.$$

Die Elemente der Parabel lassen sich jetzt durch l, m und den Winkel $PNQ = \varphi$ ausdrücken; man findet als Gleichungen der Achse

$$(IV)\qquad m\xi - l\eta + \frac{lm(l^2 - m^2)}{l^2 + 2lm\cos\varphi + m^2} = 0,$$

als Gleichung der Scheiteltangente

$$(V)\quad (l + m\cos\varphi)\xi + (l\cos\varphi + m)\eta - \frac{lm(l + m\cos\varphi)(l\cos\varphi + m)}{l^2 + 2lm\cos\varphi + m^2} = 0,$$

als Gleichung der Direktrix

$$(VI)\qquad (l + m\cos\varphi)\xi + (l\cos\varphi + m)\eta - ab\cos\varphi = 0,$$

als Koordinaten des Brennpunktes

$$(VII)\qquad \xi_0 = \frac{lm^2}{l^2 + 2lm\cos\varphi + m^2}, \quad \eta_0 = \frac{l^2 m}{l^2 + 2lm\cos\varphi + m^2},$$

als Halbparameter

$$(VIII)\qquad p = \frac{2l^3 m^2 \sin^2\varphi}{\sqrt{(l^2 + 2lm\cos\varphi + m^2)^3}}.$$

Digitized by Google

Da die Gleichung (II) die Projektion der Parabel (III) darstellt, bestehen zwischen den Größen l, m, ξ, η und $O'Q'$, $O'P'$, x', y' die Beziehungen

$$l = \frac{O'Q'}{\cos O'LN} = \frac{C^2}{4\,a_0\,b_0^2 \cos OXZ'},\quad m = \frac{O'P'}{\cos O'MN} = \frac{C^2}{4\,a_0^2 b_0 \cos OYZ'}$$

$$\xi = \frac{x'}{\cos OXZ},\quad \eta = \frac{y'}{\cos OYZ}.$$

Es ist nun

$$\cos OXZ = \frac{OX}{XZ} = \frac{OX}{\sqrt{OX^2 + OZ^2}} = \frac{C}{\sqrt{C^2 + A^2}},\ \cos OYZ = \frac{C}{\sqrt{B^2 + C^2}}.$$

Ferner ist

$$\cos\varphi = \cos XZY = \frac{ZX^2 + ZY^2 - XY^2}{2\,ZX \cdot ZY} = \frac{AB}{\sqrt{(B^2 + C^2)(C^2 + A^2)}},$$

$$\sin^2\varphi = \frac{C^2(A^2 + B^2 + C^2)}{(B^2 + C^2)(C^2 + A^2)}.$$

Es ergibt sich also

$$l = \frac{C\sqrt{C^2 + A^2}}{4\,a_0\,b_0^2},\ m = \frac{C\sqrt{B^2 + C^2}}{4\,a_0^2 b_0},\ \xi = \frac{x'\sqrt{C^2 + A^2}}{C},\ \eta = \frac{y'\sqrt{B^2 + C^2}}{C},$$

$$l + m\cos\varphi = \frac{C^2(a_0 C - c_0 A)}{4\,a_0^2 b_0^2 \sqrt{C^2 + A^2}},\ l\cos\varphi + m = \frac{C^2(b_0 C - c_0 B)}{4\,a_0^2 b_0^2 \sqrt{B^2 + C^2}},$$

$$l^2 + 2lm\cos\varphi + m^2 = \frac{(a_0^2 + b_0^2 + c_0^2)\,C^4}{16\,a_0^2 b_0^2}.$$

Durch Einsetzen dieser Werte erhält man aus (IV), (V), (VI) die Gleichungen der Projektionen der Achse, der Scheiteltangente und der Direktrix der Parabel K auf die $x'y'$-Ebene

$$(IV')\qquad b_0 x' - a_0 y' - \frac{b_0^2(B^2 + C^2) - a_0^2(C^2 + A^2)}{4\,a_0\,b_0\,(a_0^2 + b_0^2 + c_0^2)} = 0,$$

$$(V')\quad (a_0 C - c_0 A)\,x' + (b_0 C - c_0 B)\,y' - \frac{C(a_0 C - c_0 A)(b_0 C - c_0 B)}{4\,a_0\,b_0\,(a_0^2 + b_0^2 + c_0^2)} = 0,$$

$$(VI')\qquad (a_0 C - c_0 A)\,x' + (b_0 C - c_0 B)\,y' - \frac{ABC}{4\,a_0\,b_0} = 0,$$

aus (VII) die Koordinaten der Projektion des Brennpunktes

$$(VII')\quad x_0' = \xi_0\cos OXZ = \frac{B^2 + C^2}{4\,a_0\,(a_0^2 + b_0^2 + c_0^2)},\ y_0' = \eta_0\cos OYZ = \frac{C^2 + A^2}{4\,b_0\,(a_0^2 + b_0^2 + c_0^2)}$$

und aus (VIII) den Wert des Parameters

$$p = \frac{A^2 + B^2 + C^2}{2\sqrt{(a_0^2 + b_0^2 + c_0^2)^3}}.$$

Die Gleichungen der Projektionen der Parabel K, der Achse, der Scheiteltangente, der Direktrix und die Projektionen des Brennpunktes auf die $y'z'$-Ebene und auf die $z'x'$-Ebene ergeben sich aus den Gleichungen

Digitized by Google

(II) und (IV′) bis (VII′) durch zyklische Vertauschung, und den Übergang zu den ursprünglichen (xyz-) Koordinaten vermitteln die Substitutionen

$$x' = x - \frac{4a_0a_2 - a_1^2}{4a_0},\quad y' = y - \frac{4b_0b_2 - b_1^2}{4b_0},\quad z' = z - \frac{4c_0c_2 - c_1^2}{4c_0}.$$

Damit sind die Elemente der Parabel K durch die gegebenen Größen a, b, c bestimmt.

Prenzlau. W. Stegemann.

Zu **184** (Bd. XII, 186) (G. Kober). — Die Aufgabe ist zu der Aufgabe **173** (Bd. XI, 132) dualistisch. Wir deuteten in der zu **173** gegebenen Auflösung (s. Bd. XII, 281/83) die dualistische Umwertung schon an. Daher beschränken wir uns hier auf die wesentlichsten Angaben, wobei wir auch die von Herrn Kober selbst a. a. O. gegebene Ergänzung benutzen.

Ist $\Delta \equiv u_1u_2u_3 = 0$ ein Polardreieck des Kegelschnittes $\mathsf{K} \equiv \alpha_1u_1^2 + \alpha_2u_2^2 + \alpha_3u_3^2 = 0$, so hat der einer Tangente T (v_1, v_2, v_3) in bezug auf Δ harmonisch zugeordnete Punkt P die Koordinaten $\vartheta x_i = v_i^{-1}$ $(i = 1, 2, 3)$. Mittels der Gleichung von K erhält man daraus sofort die Gleichung des Ortes von P

$$\mathsf{A} \equiv \alpha_1x_2^2x_3^2 + \alpha_2x_3^2x_1^2 + \alpha_3x_1^2x_2^2 = 0. \tag{1}$$

Das ist eine Quartik mit drei Inflexionsknoten in den Ecken von Δ. Ist das Grunddreieck $\Delta \equiv A_1A_2A_3$ (mit den Seiten a_1, a_2, a_3), und schneidet T die Seiten in $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, so muß man auf jeder Seite zu Ω_i den vierten harmonischen Punkt O_i in bezug auf die betreffenden beiden Ecken bestimmen, dann schneiden sich die Geraden A_iO_i in P. Die drei Seiten o_1, o_2, o_3 des $\triangle O_1O_2O_3$ sind nun, wie man leicht zeigt, selbst Tangenten an K und bilden mit T ein vollständiges Vierseit, dessen Diagonaldreieck $A_1A_2A_3$ ist. Heißen wir die Berührungspunkte der Seiten o_1, o_2, o_3 bez. B_1, B_2, B_3, die Seiten des $\triangle B_1B_1B_3$ bez. b_1, b_2, b_3, so schneiden sich o_1b_1, o_2b_2, o_3b_3 in drei Punkten einer Geraden t, welche durch P geht und dort A berührt.

Sind in (1) die drei Fundamentalseiten reell, so muß eines der α_i negativ sein. Dann haben von den drei Inflexionsknoten nur immer zwei reelle Zweige, der dritte ist isoliert, die vier Doppeltangenten sind imaginär. Setzt man $x_1 \equiv x$, $x_2 \equiv y$, $x_3 \equiv z$, $\alpha_1 = a^2$, $\alpha_2 = b^2$, $\alpha_3 = -1$, so wird der Grundkegelschnitt zu der Ellipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 = 0$ und A zur »Kreuzkurve« mit der Gleichung $x^2y^2 = a^2y^2 + b^2x^2$. Nimmt man für K die Hyperbel $x^2/a^2 - y^2/b^2 - 1 = 0$, so ergibt sich die »Kohlenspitzenkurve« $x^2y^2 = a^2y^2 - b^2x^2$ (P. H. Schoute, Archiv Math. Phys. (2) **2**, **3**, **4**, **6**, 1885—87: *Über Kurven 4. Ordnung mit drei Inflexionsknoten*). Auch die gewöhnlichen Konstruktionen dieser Kurven gehen aus der allgemeinen Erzeugung hervor.

Setzen wir aber in (1) $x_1 \equiv x + iy$, $x_2 \equiv x - iy$, $x_3 \equiv z\,(= 1)$ und legen die gleichseitige Hyperbel

$$\alpha_1^{-1}(x + iy)^2 + \alpha_1^{-1}(x - iy)^2 + \alpha_3^{-1} \equiv 2\alpha_1^{-1}(x^2 - y^2) + \alpha_3^{-1} = 0 \tag{2}$$

zugrunde, so wird A zu der Kurve $2\alpha_1(x^2 - y^2) + \alpha_3(x^2 + y^2)^2 = 0$, die für $\alpha_3 = -1$, $\alpha_1 = \frac{1}{2}a^2$ in die »Bernoullische Lemniskate« mit der Gleichung $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ übergeht.

Speyer. H. Wieleitner.

Digitized by Google

Eine ähnliche Lösung ist noch von Herrn W. Stegemann (Prenzlau) eingelaufen. Sie beantwortet auch die zweite Frage und zwar genau in der Weise, wie es Herr G. Kober im Anschluß an die Wieleitnersche Lösung der Aufgabe **173** getan hat. Red.

Zu **186** (Bd. XII, S. 276) (W. Fr. Meyer). — Für x, y als rechtwinklige Koordinaten eines Punktes in der Ebene möge ein nicht zerfallender Kegelschnitt durch eine beliebige Gleichung zweiten Grades in x, y gegeben sein. Dann sollen die Koordinaten x, y eines Kegelschnittpunktes als rationale Funktionen (zweiten Grades, mit demselben Nenner) eines Parameters dargestellt werden.

Die Aufgabe läßt sich sehr einfach in dem besonderen Falle lösen, daß der gegebene Kegelschnitt durch den Koordinatenanfangspunkt hindurchgeht. Man benutzt dann als Parameter den Richtungsfaktor einer Geraden, die in ihren verschiedenen Lagen stets auch durch den Koordinatenanfangspunkt hindurchgeht. Außer in diesem Punkte schneidet sie den Kegelschnitt in einem zweiten Punkte, dessen Koordinaten sich ohne weiteres als die verlangten Funktionen des gewählten Parameters ergeben.

Auf diesen besonderen Fall läßt sich der allgemeine Fall durch eine einfache Parallelverschiebung zurückführen.

Geht der Kegelschnitt durch den Koordinatenanfang, so lautet seine Gleichung: $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey = 0$, und die Gleichung der durch den Koordinatenanfangspunkt gehenden Geraden sei: $y = \lambda x$. Durch Kombination ergibt sich die gewünschte Parameterdarstellung:

$$x = -\frac{d + e\lambda}{a + b\lambda^2 + c\lambda}, \quad y = -\lambda\frac{d + e\lambda}{a + b\lambda^2 + c\lambda}.$$

Es sei hinzugefügt, daß die Elimination von λ geleistet wird durch Einsetzen von $\lambda = \frac{y}{x}$ in eine dieser Gleichungen.

Im allgemeinen Fall ist die Gleichung des Kegelschnittes: $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$. Sie werde durch die Parallelverschiebung $x = x_0 + x'$, $y = y_0 + y'$, wo x_0, y_0 in dem alten System die Koordinaten irgend eines Kegelschnittpunktes, den wir als Nullpunkt des neuen Systems wählen, und x', y' die transformierten Koordinaten bezeichnen, verwandelt in: $a'x'^2 + b'y'^2 + c'x'y' + d'x' + e'y' = 0$ für $a' \equiv a$, $b' \equiv b$, $c' \equiv c$, $d' \equiv 2ax_0 + cy_0 + d$, $e' \equiv 2by_0 + cx_0 + e$. Das konstante Glied verschwindet, da der Anfangspunkt der gestrichenen Koordinaten auf dem gegebenen Kegelschnitt liegen soll. Wir haben so wieder den besonderen Fall und erhalten die Koordinaten eines beliebigen Kegelschnittpunktes in der Form:

$$x' = -\frac{d' + e'\lambda}{a' + b'\lambda^2 + c'\lambda}, \quad y' = -\lambda\frac{d' + e'\lambda}{a' + b'\lambda^2 + c'\lambda},$$

oder

$$x = \frac{bx_0\lambda^2 - (2by_0 + e)\lambda - (ax_0 + cy_0 + d)}{b\lambda^2 + c\lambda + a},$$

$$y = \frac{-(by_0 + cx_0 + e)\lambda^2 - (2ax_0 + d)\lambda + ay_0}{b\lambda^2 + c\lambda + a}.$$

Digitized by Google

Hier sind a, b, c, d, e die Koeffizienten der Gleichung, x_0, y_0 die Koordinaten eines beliebigen Punktes des gegebenen Kegelschnitts. Dieser Punkt ist nun so zu wählen, daß die für x und y gefundenen Funktionen von λ einfachstmöglich werden, eine Aufgabe, die sich vielleicht allgemein gar nicht lösen läßt. Es sei darum gestattet, zum Schluß die Aufgabe für bestimmte Zahlenwerte zu lösen: Auf dem Kegelschnitt $2x^2 + 3y^2 + 7xy - 5x - 6y - 35 = 0$ liegt der Punkt $x_0 = 5$, $y_0 = -10$; folglich ist:

$$x = \frac{15\lambda^2 + 66\lambda + 65}{3\lambda^2 + 7\lambda + 2}, \quad y = \frac{\lambda^2 - 15\lambda - 20}{3\lambda^2 + 7\lambda + 2},$$

also z. B. für $\lambda = -\frac{35}{31}$: $x = +5$, $y = -10$; für $\lambda = -1$: $x = -7$, $y = +2$; für $\lambda = 0$: $x = +\frac{65}{2}$, $y = -10$; für $\lambda = +1$: $x = \frac{73}{6}$, $y = -\frac{17}{6}$; für $\lambda = \infty$: $x = +5$, $y = +\frac{1}{3}$.

Hamburg. GUSTAV BERKHAN.

Zu **189** (Bd. XII, S. 370) (P. Stäckel). — *Ein geometrischer Trugschluß.* — Wie bei vielen derartigen Aufgaben, verschafft man sich auch bei dieser einen richtigen Einblick in die Verhältnisse, wenn man sich eine genaue Figur anfertigt. Der Fehler liegt eben meistens in der Zeichnung. Ist nämlich, unter Benutzung der von Herrn Stäckel a. a. O. gegebenen Figur, AB in C und D harmonisch geteilt, so ist auch CD in A und B harmonisch geteilt, und es besteht demnach die Proportion $CA:AD = CB:BD$. Nun ist $CA < AD$, folglich ist auch $CB < BD$. H, die Mitte von CD, muß in den größeren der beiden Abschnitte CB und BD fallen, d. h. in BD. H liegt also außerhalb des Kreises und nicht innerhalb, wie in der Figur des Herrn Stäckel.

Berlin. A. BARUCH.

Ähnliche Lösungen von den Herren G. Berkhan, stud. ing. G. Bühle (Charlottenburg), E. Stamm (Innsbruck), W. Lorey (Görlitz), E. Köstlin (Schw. Gmünd) und den stud. math. J. Braunschweiger (Erlangen) und W. Groß (Wien).

2. Anfragen und Antworten.

(Vacat.)

3. Kleinere Notizen.

Konstruktionen des Krümmungskreises der geraden Strophoide.

Da ich in der mir zugänglichen Literatur[1]) nirgends eine Konstruktion des Krümmungskreises der geraden Strophoide gefunden habe, so habe ich mich in letzter Zeit mit dieser Kurve beschäftigt, und es ist mir gelungen,

1) Untersuchungen über die Krümmung der Strophoide sind öfter angestellt worden und haben zu interessanten Sätzen geführt, welche auf eine Verwandtschaft mit entsprechenden Eigenschaften der Kegelschnitte hinweisen (vgl. G. Loria, Spezielle algebraische und transzendente Kurven, Leipzig 1902, S. 63—64). Insbesondere hat Booth in seiner von Loria zitierten Arbeit, die im Quarterly

Digitized by Google

eine Anzahl von Konstruktionen zu finden, die meines Wissens sämtlich neu sind.

Es seien (Fig. 1) O und A die Scheitel einer gleichseitigen Hyperbel, deren Asymptoten MG und MH sind, P ein Punkt auf ihr, dann läßt sich die Kurve als Erzeugnis zweier kongruenten Strahlbüschel auffassen, deren Mittelpunkte O und A sind. Da dem Strahl OA die Scheiteltangente entspricht, und da auch OP und AP homologe Elemente sind, so muß $< POA = < TAP = \varphi$ sein. Beschreibt man um P mit PM den Kreis der die Asymptoten in U und V und die Achse OA in L schneidet, so ist UV Tangente und PL Normale der Hyperbel. Wird $< PMA$ mit ψ bezeichnet, so ist auch $< PLM = \psi$ und $< OTV = 90^0 - (\varphi + \psi)$. Wählt man den um O mit OA beschriebenen Kreis als Basis einer Inversion, so entspricht dem Punkte P der Punkt P' auf OP, für den $OP' \cdot OP = \overline{OA}^2$ ist. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke OPA und OAP' folgt, daß $PA = 90^0 - 2\varphi$, $< OP'A = < OAP = 90^0 + \varphi$ ist. Trifft OP die Scheiteltangente AT in Z, so ist $< AP'Z = AZP' = 90^0 - \varphi$, daher $AZ = AP'$. Der dem Punkte P entsprechende Punkt P' wird also am

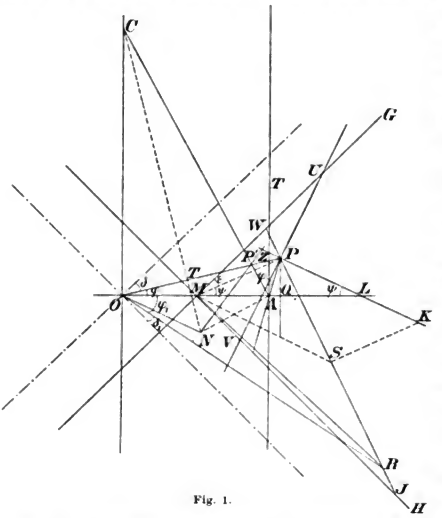


Fig. 1.

Journal, Bd. 3 (1860) — nicht Bd. 2 (1858) — steht und im Treatise on some new geometrical methods Bd. 1, 1873 — nicht 1877 — abgedruckt ist, die Beziehungen über die Krümmungsradien entsprechender Punkte bei der Transformation durch reziproke Radien genau angegeben. Von einfachen Konstruktionen des Krümmungsmittelpunktes erwähnen wir die, welche Balitrand und Valdès in ihren Aufsätzen über die Strophoide in Nouv. Ann. (3) **12** und **13**, 1893 und 1894, gegeben haben; in diesen Abhandlungen sind auch die von Loria mitgeteilten Sätze über die Krümmungskreise der Strophoide ausführlich hergeleitet. Ferner ist eine Konstruktion bemerkenswert, die A. de Saint-Germain in seinem Recueil d'exercices sur la mécanique rationnelle (1. Aufl., Paris 1877), S. 159 aus kinematischen Betrachtungen folgert. Wenn wir trotzdem den Artikel des Herrn Gutsche zum Abdruck bringen, so geschieht dies, weil seine Entwickelungen ganz elementar sind und somit beim Unterrichte sich nützlich verwerten lassen. Red.

Digitized by Google

einfachsten dadurch gefunden, daß man um A mit AZ den Kreis beschreibt. Schneidet AP' die in O auf OA errichtete Senkrechte in C, so ist $CO = CP'$, also ist P' der Schnittpunkt des um C mit CO geschlagenen Kreises und der Geraden AC, P' gehört also einer geraden Strophoide an, deren Doppelpunkt O und deren Scheitel A ist. Die Hyperbeltangente PZ bildet mit dem Leitstrahl OP den Winkel $90^0 - (\varphi + \psi)$; der ihr in der Verwandtschaft entsprechende durch O und P' laufende Kreis muß daher OP unter demselben Winkel schneiden; da er die Strophoide berühren muß, so liegt sein Mittelpunkt auf der Strophoidennormale, die also mit OP' den Winkel $\varphi + \psi$ bilden muß. Da die Dreiecke OPA und OAP' ähnlich sind, so ist, wenn F die Mitte von OG' ist, $< AFZ = PMA = \psi$, folglich, wenn das Mittellot von OP' die Strophoidennormale in N trifft, $< NFA = 90^0 - \psi$. Auch $< NP'A$ ist, wie leicht ersichtlich, gleich $90^0 - \psi$; die Punkte $NFP'A$ liegen daher auf einem Kreise, also ist $< P'AN = 90^0$. Somit ergibt sich eine einfache Konstruktion der Strophoidennormale: Man bringt das Mittellot von OP' in N zum Schnitt mit der auf $P'A$ in A errichteten Senkrechten, dann ist $P'N$ die Normale in P'. Fällt man von P auf OA das Lot PQ, so ist $\triangle APQ \sim POQ$, also ist, wenn MQ mit x, MQ mit y und MA mit a bezeichnet wird, $y : (x - a) = (x + a) : y$, daher $y^2 = x^2 - a^2$. Da nun $\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi = \frac{2y(x-a)}{OP^2}$ und $\overline{OP}^2 = y^2 + (x-a)^2 = 2x(x-a)$ ist, so besteht zwischen φ und ψ die Beziehung

$$\operatorname{tg} \psi = \sin 2\varphi. \tag{1}$$

Die Parallelen, die man durch O zu den Asymptoten der Hyperbel zieht, sind, wie eine einfache Überlegung lehrt, die Tangenten der Strophoide im Doppelpunkt O. Bezeichnet man nun die Winkel $45^0 - \varphi$ und $45^0 - \psi$ mit δ und ε, so ist $\operatorname{tg}(45^0 - \varepsilon) = \sin(90^0 - 2\delta)$. Hieraus folgt:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \operatorname{tg}^2 \delta. \tag{2}$$

Sollen vier Punkte eines Kegelschnitts auf einem Kreise liegen, so muß das durch sie bestimmte vollständige Viereck die Eigenschaft haben, daß je zwei seiner Gegenseiten mit jeder der beiden Hauptachsen ein gleichschenkliges Dreieck bilden. Handelt es sich um den zu P gehörigen Krümmungskreis, so fallen drei Eckpunkte dieses Vierecks in P zusammen, der vierte ist der Punkt R, in dem der Krümmungskreis den Kegelschnitt schneidet, es müssen dann die Tangente PV und die Gerade PR gleiche Winkel mit OA bilden. Da nun $PV \perp PL$ ist, so muß $< MPR$ ein Rechter sein. Die Mitte S der Hyperbelsehne PR muß auf dem Durchmesser liegen, der dem zu PR parallelen Durchmesser konjugiert ist. Da aber konjugierte Durchmesser einer gleichseitigen Hyperbel gleiche Winkel mit jeder der beiden Asymptoten bilden, so muß, wie man leicht erkennt, $< AMS = \psi$ sein. Der Krümmungsradius PK für den Hyperbelpunkt P ist also gleich MS. Bezeichnet man $< AMR$ mit ψ_1, so ist

$$\operatorname{tg}(\psi + \psi_1) = 2PS : MP = 2 \operatorname{tg} 2\psi, \tag{3}$$

also, wenn $< RMH = \varepsilon_1$ ist, $\operatorname{tg}(90^0 - (\varepsilon + \varepsilon_1)) = 2 \operatorname{tg}(90^0 - 2\varepsilon)$, woraus folgt:

$$\operatorname{tg} \varepsilon_1 = \operatorname{tg}^3 \varepsilon. \tag{4}$$

Digitized by Google

Wird der Winkel, den OR mit der durch O zur Asymptote MH gezogenen Parallelen bildet, mit δ_1 bezeichnet, so ist, wie oben bewiesen,

$$\operatorname{tg} \varepsilon_1 = \operatorname{tg}^2 \delta_1.$$

Mithin gilt für die Winkel δ und δ_1 die Beziehung

$$\operatorname{tg} \delta_1 = \operatorname{tg}^3 \delta. \tag{5}$$

Ist $< ROA = 45^0 - \delta_1 = \varphi_1$, so ist $\operatorname{tg}(45^0 - \varphi_1) = \operatorname{tg}^3(45^0 - \varphi)$, mithin

$$\operatorname{tg}(\varphi + \varphi_1) = 2 \operatorname{tg} 2\varphi. \tag{6}$$

Jedem Krümmungskreise der Hyperbel entspricht ein Krümmungskreis der Strophoide; der Strahl OR läuft also durch den Punkt R', in dem der zum Strophoidenpunkte P' gehörige Krümmungskreis die Kurve schneidet.. Da sich mit Hilfe der hergeleiteten Formeln R' ermitteln läßt, so ist das Krümmungszentrum für den Strophoidenpunkt P' der Schnittpunkt des Mittellotes von $P'R'$ und der Kurvennormale in P'. Um nun von der Hyperbel unabhängig zu sein, betrachten wir folgende Figur (Figur 2.): Es seien O der Doppelpunkt, A der Scheitel einer geraden Strophoide, P ein Punkt auf ihr, AB ihre Scheiteltangente, OC die auf OA in A errichtete Senkrechte, OG und OH die Halbierungslinien der von OA und OC gebildeten Winkel, $< POA = \varphi$, $< POG = \delta$, $< PAO = \omega$. Errichtet man auf PA in A die Senkrechte, die das Mittellot von OP in N trifft, so ist PN eine Normale der Strophoide. Es kommt nun darauf an, den Punkt P_1 zu ermitteln, in dem der zu P gehörige Krümmungskreis die Strophoide schneidet. Treffen OP und OP_1 die Scheiteltangente in Z und Z_1, so ist, da $AP_1 = AZ_1$ ist, Punkt P_1 bestimmt, sobald man Z_1 kennt. Dieser Punkt läßt sich auf verschiedene Arten konstruieren.

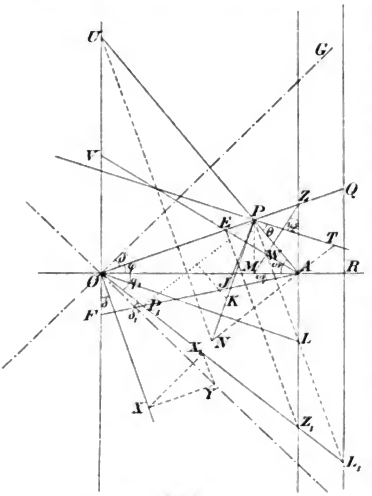


Fig. 2.

1) Bezeichnet man $< AOP_1$ mit φ_1, $< OAP_1$ mit ω_1 und $< P_1OH$ mit δ_1, so ist $\operatorname{tg} \delta_1 = \operatorname{tg}^3 \delta$; also ergibt sich folgende Konstruktion: Man trägt an OH in O den Winkel $XOH = \delta$ an, errichtet auf OX in X die Senkrechte, die OH in Y schneidet, und bringt die auf XY in Y errichtete

Digitized by Google

Senkrechte mit dem von X auf OH gefällten Lote in X_1 zum Schnitt, dann begegnet OX_1 der Scheiteltangente in Z_1.

2) Da $\operatorname{tg}(\varphi + \varphi_1) = 2 \operatorname{tg} 2\varphi$ ist, kann man auf folgende Art verfahren: Man zeichnet die Symmetrale von OF in bezug auf OA, die von der auf OP in P errichteten Senkrechten in L getroffen wird, und verlängert PL um sich selbst bis L_1, dann läuft OL_1 durch Z_1. Es ist zu beachten, daß Punkt L auf AZ liegt.

3) Zieht man durch L_1 die Parallele zu AZ, die PZ in Q trifft, so ist $PZ = ZQ$ und $QL_1 = 2ZL = 4AZ = 4AP$. Hieraus ergibt sich folgende Konstruktion: Man verlängert PZ um sich selbst bis Q und fällt von Q auf AO das Lot QR, dem man die Länge $QL_1 = 4AP$ gibt, dann geht OL_1 durch Z_1.

4) Aus der Beziehung $\operatorname{tg}(\varphi + \varphi_1) = 2 \operatorname{tg} 2\varphi$ folgt, daß $\operatorname{cotg} \frac{1}{2}(\omega + \omega_1) = 2 \operatorname{cotg} \omega$ ist. Hieraus folgt: Verlängert man AP bis zum Schnitt U mit OC, halbiert OU in V, trägt an AP in A den doppelten Winkel VAO an, dessen freier Schenkel OC in F trifft, und beschreibt um F mit FO den Kreis, der AF in P_1 schneidet, so liegt P_1 auf dem Krümmungskreise des Punktes P.

5) Im Dreieck PAP_1 ist, wenn die Differenz der Winkel APP_1 und AP_1P mit ε bezeichnet wird, $(r_1 + r) : (r_1 - r) = \operatorname{cotg} \frac{1}{2}(\omega + \omega_1) : \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varepsilon$. Da aber, wie oben bewiesen, $(r_1 + r) : (r_1 - r) = 2 : \sin 2\delta = 2 : \sin \omega$ ist, so ist $\operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2} = \cos \omega$. Fällt man von P auf OA das Lot PM, so ist $\frac{MA}{r} = \cos \omega = \operatorname{tg} MZA$, daher ist $< AZM = \frac{1}{2}\varepsilon$. Es ist $< P_1PA = 90^0 - \frac{1}{2}(\omega + \omega_1) + \frac{1}{2}\varepsilon$. Da nun $< OAV = \frac{1}{2}(\omega + \omega_1)$ ist, so ist, wenn W der Schnittpunkt von VA und MZ ist, $< MWA = 90^0 - \frac{1}{2}(\omega + \omega_1) + \frac{1}{2}\varepsilon = < P_1PA$. Beschreibt man um A mit AP den Kreis, der AP_1 in J trifft, so ist $< APJ = 90^0 - \frac{1}{2}(\omega + \omega_1) = < VAZ$ und $< P_1PZ = \frac{1}{2}\varepsilon = AZM$. Mithin läßt sich Punkt P_1 in folgender Weise ermitteln: Man bringt AP und OC in K zum Schnitt, halbiert OU in V, fällt von P auf OA das Lot PM und trägt an AP in P den $< VAZ$ an, dessen freier Schenkel dem um A mit AP beschriebenen Kreise in J begegnet. Dann trägt man an JP in P den $< MZA$ an und verlängert seinen freien Schenkel, bis er AJ in P_1 schneidet. Punkt P_1 gehört dann dem Krümmungskreise des Punktes P an.

6) Da $< VAO = \frac{1}{2}(\omega + \omega_1) = 90^0 - (\varphi + \varphi_1)$ ist, so ist $< OVA = \varphi + \varphi_1$, mithin, wenn E der Schnittpunkt von AV und OP ist, $< OEA = 90^0 + \varphi_1$. Nun ist aber $< OZ_1A = 90^0 - \varphi_1$, die Punkte $OEAZ_1$ liegen also auf dem Kreise, dessen Durchmesser OZ_1 ist. Daher ist $< OEZ_1 = 90^0$. Aus diesen Eigenschaften ergibt sich eine Anzahl von Konstruktionen des Krümmungskreises, von denen ich nur noch eine hervorhebe: Man verlängert AP, bis diese Gerade den Strahl OC in U trifft, und halbiert OU in V. Dann errichtet man im Schnittpunkt E von OP und AV auf OE die Senkrechte, die die Scheiteltangente in Z_1 schneidet. Der um A mit AZ_1 beschriebene Kreis liefert dann auf OZ_1 den Punkt P_1, und das Mittellot auf PP_1 trifft die Normale PN im Krümmungsmittelpunkte K.

Die hergeleiteten Formeln gelten, wenn Punkt P auf der Schleife der Strophoide liegt. Ist das nicht der Fall, so verlängert man die Achse AO

Digitized by Google

und die Tangenten GO und HO bis zu den Punkten A', G', H' und bezeichnet $< POA'$ mit φ, $< POH'$ mit δ, $< P_1OA'$ mit φ_1 und $< P_1OG'$ mit δ_1. Dann haben die Formeln (5) und (6) Geltung, mithin behalten, von geringfügigen Änderungen abgesehen, die angegebenen Konstruktionen des Krümmungskreises ihre Gültigkeit. Es ist aber meist bequemer, anders zu verfahren. Trifft nämlich AP die Strophoide zum zweiten Male in Π, so entsprechen sich, da $AP \cdot A\Pi = \overline{AO}^2$ ist, P und Π in einer Kreisverwandtschaft, deren Basis der um A mit AO beschriebene Kreis ist. Die Strophoide ist also eine sich selbst inverse Kurve. Sowohl die Tangenten als die Normalen in P und Π sind also die Schenkel zweier gleichschenkligen Dreiecke über der Basis $P\Pi$. Dem Krümmungskreise für Punkt P entspricht der zu Π gehörige Krümmungskreis; ihre Mittelpunkte liegen auf einer durch A laufenden Geraden und ihre Schnittpunkte auf dem um A mit AO beschriebenen Kreise. Hat man also den Krümmungskreis für Punkt P konstruiert, so ist es leicht, den Krümmungskreis für Punkt Π zu zeichnen.

Zum Schlusse möchte ich noch eine Tangenten- und Normalenkonstruktion erwähnen, auf die mich mein Freund J. Unverricht aufmerksam gemacht hat. Schneidet die auf AU in U errichtete Senkrechte (Fig. 2) die Achse AO in U', so verhält sich $OU : UU'$ wie $OM : PU$, also ist, da $OU = PU$ ist, $PU : UU' = AM : AP$. Fällt man von A auf die Tangente, deren Berührungspunkt P ist, das Lot AT, so ist $\cos\omega = \operatorname{tg} APT$, mithin ist $AM = AT$ und $PU : UU' = AT : AP$. Da somit $\triangle PUU' \sim TAP$ ist, so ist $< UU'\varphi = < APT$. Hierauf gründet sich folgende Konstruktion: Man zieht durch den Scheitel A einen beliebigen Strahl, der die Strophoide in P und Π und die auf OA in O errichtete Senkrechte in U trifft. Zieht man nun durch U die zu AU senkrechte Gerade, die AO in U' schneidet, und verlängert $U'U$ um sich selbst bis N', so sind $N'P$ und $N'\Pi$ zwei Normalen der Strophoide. Herrn Unverricht verdanke ich auch die Kenntnis einer einfachen Formel für die Ordinate η des Krümmungsmittelpunktes K. Wird AP mit r und das von P auf AO gefällte Lot PM mit y bezeichnet, so ist $\eta = -\frac{2r(r-y)}{2r-y}$. Aus dieser Formel ergibt sich folgende Konstruktion: Man verlängert (Fig. 2) ZA um $2\,ZA$ bis Z_2 und AO um AM bis S, hierauf zieht man die Gerade SZ_2, die OU in K' trifft. Die durch K' zur Achse OA gezogene Parallele schneidet dann die durch P laufende Kurvennormale im Krümmungszentrum K.

Breslau. O. Gutsche.[1])

Erweiterung des Näherungsverfahrens des Nicolaus v. Cusa zur Streckung und Teilung von Kreisbogen.

Eine der einfachsten Näherungsmethoden zur Streckung, d. h. Rektifikation, eines Kreisbogens ist diejenige des Nicolaus v. Cusa. Soll nach dieser ein Bogen AB (Fig. 1) gestreckt werden, so verlängere man den Durchmesser AC um den Radius OC bis R. Die Gerade RB schneidet dann auf der durch A gezogenen Tangente eine dem Bogen AB angenähert gleichlange Strecke AB' ab, vorausgesetzt, daß der Zentriwinkel des Bogens kleiner als 30^0 ist.

1) Im besten Mannesalter ist der Verfasser den Folgen einer Operation am 4. Mai 1907 erlegen. Red.

Digitized by Google

§ 1. Im folgenden soll ein diesem entsprechendes, aber genaueres Näherungsverfahren mit größerem Gültigkeitsbereiche abgeleitet werden.

Schneidet die Gerade LB auf der Tangente AB' ein dem Bogen $AB = r\varphi$ genau gleichlanges Stück AT ab und setzt man $AL = l$, so findet man

$$(1) \qquad l = \frac{r\varphi(1-\cos\varphi)}{\varphi - \sin\varphi} = r\left(3 - \frac{\varphi^2}{10} - \frac{\varphi^4}{4200} + \frac{\varphi^6}{126000}\cdots\right).$$

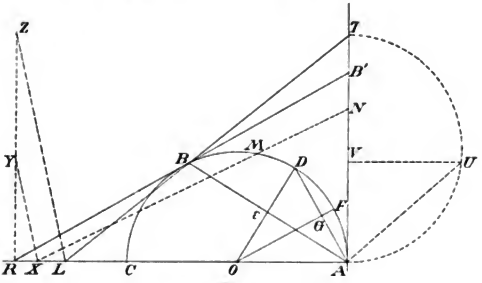


Fig. 1.

Halbiert man den Bogen AB durch D, den Bogen AD durch F und setzt $ED = h$, $GF = h_1$, $OE = \varrho$, so ist

$$h = r - \varrho = r\left(1 - \cos\frac{\varphi}{2}\right) = r\left(\frac{\varphi^2}{8} - \frac{\varphi^4}{384} + \frac{\varphi^6}{46080}\cdots\right)$$

$$4h_1 - h = 2r\left(1 - \cos\frac{\varphi}{4}\right)^2 = r\left(\frac{\varphi^4}{512} - \frac{\varphi^6}{49152}\cdots\right).$$

Mit Hilfe dieser Formeln erhält man

$$(2) \qquad 3r - \frac{4}{5}h - \frac{208}{175}(4h_1 - h) = r\left(3 - \frac{\varphi^2}{10} - \frac{\varphi^4}{4200} + \frac{11\,\varphi^6}{1612800}\cdots\right).$$

Subtrahiert man (2) von (1), so ergibt sich

$$l - \left[3r - \frac{4}{5}h - \frac{208}{175}(4h_1 - h)\right] = r\left(\frac{\varphi^6}{896000}\cdots\right) = R.$$

$$(3) \qquad l = 3r - \frac{4}{5}h - \frac{208}{175}(4h_1 - h) + R.$$

Diesen Ausdruck kann man fogendermaßen schreiben

$$l = 3r - \frac{4}{5}h - (4h_1 - h) - \frac{1}{5}(4h_1 - h) + \frac{2}{175}(4h_1 - h) + R.$$

Man vernachlässige die beiden letzten außerordentlich kleinen Glieder und bilde folgende zwei Formeln

$$(I) \qquad l_1 = 3r - \frac{4}{5}h - (4h_1 - h);$$

$$(II) \qquad l_2 = 3r - \frac{4}{5}h - (4h_1 - h) - \frac{1}{5}(4h_1 - h).$$

Digitized by Google

Hierin ist, wie man leicht zeigen kann, $l_1 > l > l_2$, so daß der gesuchte Punkt L zwischen den zu l_1 und l_2 gehörigen beiden konstruierbaren Punkten L_1 und L_2 liegt. Die Geraden $L_1 B$ und $L_2 B$ schneiden auf der durch A gehenden Tangente zwei Strecken AT_1 und AT_2 ab, und zwar ist $AT_1 < AT < AT_2$. Eine nähere Untersuchung zeigt, daß, wenn der zu streckende Bogen kleiner als der dritte Teil des Umfangs ist (genauer: $\varphi < 116^0\,34'$), der Abstand der Punkte T_1 und T_2 kleiner als der der Punkte L_1 und L_2 ist. Da nun dieser, nämlich $l_1 - l_2 = \frac{1}{5}(4h_1 - h)$, sehr gering ist, — er ergibt sich für $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ zu rund $\frac{7}{1000}r$ und für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ zu $\frac{2}{1000}r$ — und da, wie man weiter zeigen kann, der Punkt L dem Punkte L_2 viel näher als dem Punkte L_1 liegt, so wird in der Zeichnung der gesuchte Punkt L von dem konstruierbaren Punkte L_2, also erst recht T von T_2, nicht zu trennen sein, und man kann an Stelle des richtigen Punktes L den Punkt L_2 benutzen.

Mithin ergibt sich folgendes Näherungsverfahren:

Man halbiere den Bogen AB (Fig. 2) durch D, den Bogen AD durch F, ziehe die Sehnen AB und AD und die Radien OD und OF, die AB und AD in E bzw. G schneiden. ED teile man durch Q nach dem Verhältnisse $1 : 4$ und mache auf DO $DS = 4.\,GF$. Man verlängere den Durchmesser AC um den Radius OC bis R, mache auf RC $RL_0 = DQ$, $L_0 L_1 = ES$ und $L_1 L_2 = \frac{1}{5} \cdot L_0 L_1$. Die durch die Gerade $L_2 B$ auf der durch A gezogenen Tangente abgeschnittene Strecke AT_2 ist dann mit außerordentlich großer Annäherung dem Bogen AB an Länge gleich.

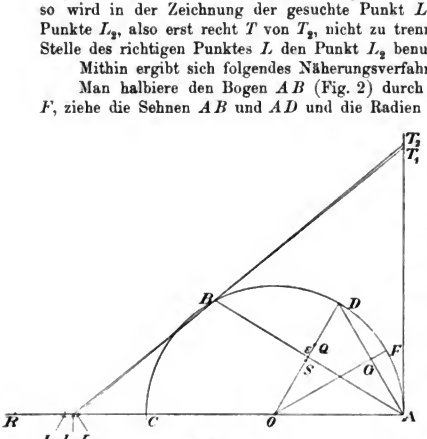


Fig. 2.

Die Genauigkeit des Verfahrens ist, wenn $\varphi < \frac{2\pi}{3}$ ist, sehr groß. So zeigt die hier nicht auszuführende Rechnung, daß selbst für $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ AT_2 von der Bogenlänge AB um weniger als $\frac{1}{1400}$ des Radius abweicht; das würde selbst bei einem Radius von 1 m weniger als $^3/_4$ mm ausmachen.

Bei genügend kleinem Zentriwinkel kann die Strecke $4h_1 - h$ in Folge ihrer geringen Größe in der Zeichnung verschwinden. Es rücken dann die Punkte L_0, L_1, L_2 so nahe an einander, daß sie in der Figur einen einzigen Punkt bilden. Man hat in diesem Falle, um L zu erhalten, die Strecke $AR = 3r$ einfach um $\frac{4}{5}h = DQ$ zu verkürzen. Dieses vereinfachte Verfahren genügt stets, wenn in der Zeichnung der Punkt S vom Punkte E nicht mehr zu trennen ist.

Digitized by Google

Um ein noch einfacheres, aber auch ungenaueres Verfahren zu erhalten, muß man nach Vorhergehendem $AL = 3r - h = 2r + \varrho$ (nicht gleich $3r$) setzen, worin ϱ den Abstand der Sehne des Bogens vom Mittelpunkte des Kreises bedeutet. Dann wird die Strecke AL um rund $\frac{1}{5}h$ zu klein, während sie bei Nikolaus v. Cusa um $\frac{4}{5}h$ zu groß ist.

§ 2. Soll der Bogen AB durch den Punkt M (Fig. 1) nach einem gegebenen Verhältnisse $k:1$ geteilt werden, so kann man zunächst die mit Hilfe des Punktes L, seines „Streckungspunktes", erhaltene, ihm gleiche Strecke AT durch N nach demselben Verhältnisse teilen. Ist X der Streckungspunkt des Bogens AM, so ist

$$AX = r\left(3 - \frac{k^2\varphi^2}{10} - \frac{k^4\varphi^4}{4200} + \frac{k^6\varphi^6}{126000}\cdots\right);$$

$$3r - AX = RX = \frac{rk^2\varphi^2}{10}\left(1 + \frac{k^2\varphi^2}{420} - \frac{k^4\varphi^4}{12600}\cdots\right).$$

Nach (1) ist

$$3r - AL = RL = \frac{r\varphi^2}{10}\left(1 + \frac{\varphi^2}{420} - \frac{\varphi^4}{12600}\cdots\right).$$

Also

$$\frac{RX}{RL} = k^2 \cdot v.$$

Hierin bedeutet v den Quotienten der beiden letzten Reihen, der, wie man bemerkt, kleiner als 1, aber sehr wenig von 1 verschieden ist. Selbst für $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ und für $k = 0$, für welchen Wert von k er am meisten von 1 abweicht, ist $v > 0{,}99$.

Für Konstruktionszwecke kann man daher v unbedenklich gleich 1 setzen, besonders auch wegen der geringen Größe der zu teilenden Strecke RL. Mithin wird

$$\text{(III)} \qquad \frac{RX}{RL} = k^2.$$

Hiernach kann man X und also auch M folgendermaßen bestimmen.

Mit Hilfe des Streckungspunkts L des Bogens AB zeichne man die dem Bogen gleiche Strecke AT, die man durch N nach dem gegebenen Verhältnisse teile. Über AT errichte man den Halbkreis, ziehe die Sehne $AU = AN$ und UV senkrecht zu AT. Dann mache man auf einer beliebigen, durch R gehenden Geraden $RZ = AT$, $RY = AV$ und ziehe YX parallel zu ZL. Die Gerade XN schneidet den Bogen AB im gesuchten Punkte M.

Nach diesem Näherungsverfahren kann man auch einen (zwei Drittel des Umfangs nicht überschreitenden) Bogen in beliebig viele gleiche Teile teilen und einem Kreise ein beliebiges regelmäßiges Vieleck einzeichnen.

§ 3. Die Aufgabe, eine gegebene Strecke t in einen Kreisbogen von gegebenem Radius zu verwandeln, läßt sich auch durch eine Näherungskonstruktion lösen.

Setzt man in Formel (1) $\varphi = \frac{t}{r}$, so wird

$$l = 3r - \frac{1}{10}\cdot\frac{t^2}{r} - \frac{1}{4200}\cdot\frac{t^4}{r^3} + \frac{1}{126000}\cdot\frac{t^6}{r^5}\cdots.$$

Digitized by Google

Hierin können alle Glieder vom dritten ab, sobald $\frac{t}{r} \gtrless \frac{\pi}{2}$ ist, selbst bei größeren Werten von r für Konstruktionszwecke vernachlässigt werden. Setzt man noch $t^2 = m \cdot 2r$, so liefert die Formel

$$(IV) \qquad l = 3r - \frac{m}{5}$$

folgende Näherungskonstruktion. (Fig. 3)

Man ziehe an den gegebenen Kreis O eine Tangente $AT = t$, den Durchmesser AC, die Sehne $AU = AT$ und UV senkrecht zu AC. AV teile man von A aus durch J nach dem Verhältnisse 1 : 4 und verlängere AC um OJ bis L. Die Gerade LT bestimmt den gesuchten Bogen AB.

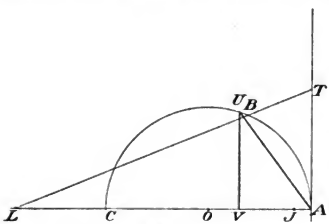


Fig. 3.

Zum Schlusse möge darauf hingewiesen werden, daß eine Anzahl von Aufgaben, wie die Quadratur eines Kreissektors bzw. eines Kreises, die Verwandlung eines Quadrats in einen Sektor von gegebenem Radius, die Konstruktion eines Sektors von gegebenem Winkel und vorgeschriebenem Bogen bzw. Flächeninhalt, ferner die eines Kreises von gegebenem Umfange bzw. Flächeninhalt, endlich die Bestimmung eines Kreisbogens von der Länge des Radius, sich mit Hilfe der angegebenen beiden Näherungsverfahren auf einfache Weise löse lassen.

Nachtrag. Soeben erst finde ich, daß früher schon Strempel („Ein Annäherungsverfahren zur Verwandlung von Kreisbogen in gerade Linien und umgekehrt"; Rostock, Programm des Gymnasiums; 1898.) die Formel (1) zur Ableitung einer Näherungskonstruktion, aber in anderer Weise, benutzt hat. Es sind daher die hier abgeleiteten Methoden, besonders die in den Paragraphen 1 und 2 angebenen, von denen Strempels verschieden.

Buchsweiler, Unter-Elsaß. W. Hergesell.

Bemerkung zu der Notiz in (3) 18, 92.

Zu der in Figur 3 ausgeführten Konstruktion bemerke ich noch, daß die von E durch O_4 gezogene Gerade durch O_1 geht, daß die von E durch O_3 gezogene Gerade den Kreis um O_2 schneidet, aber mit der von E an diesen Kreis gezogenen Tangente einen Winkel $< \frac{1}{2}^0$ einschließt, daß der Kreis um O_5 die Kreise um O_2 und O_4 nahe D schneidet, daß die Kreise um O_1, O_2 und O_5 sich nahezu in einem Punkte schneiden.

Kassel. K. Hunrath.

Digitized by Google

4. Bei der Redaktion eingegangene Bücher.

Annual report of the Smithsonian Institution for 1906. Washington 1907, Government printing office. 546 S.

Asteroth, P., Der Einfluß der thermischen und mechanischen Vorgeschichte auf die magnetischen Eigenschaften, insbesondere die Hysterese Heuslerscher Legierungen. Verh. D. Phys. Ges. 1908.

Astronomischer Kalender für 1908. Abhandlungen: J. Holetschek, Über die Sichtbarkeit eines Kometen am Tage. — H. Jaschke, Über die rasche Einregulierung von Präzisionspendeln. — E. Weiß, Neue Planeten und Kometen. Wien 1908, K. Gerolds Sohn. ℳ 2.40.

Bermbach, W., Einführung in die Elektrochemie. Leipzig 1908, Quelle u. Meyer. 140 S. ℳ 1.25.

Bohlin, K., Zur Theorie der algebraischen Gleichungen. Aus Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik. Bd. 3. Stockholm.

Bohn, H., Leitfaden der Physik. Unterstufe, Ausgabe B (ohne chemischen Anhang). Leipzig 1908, E. Nägele. 221 S. ℳ 2.80.

Bonola, R., Die nichteuklidische Geometrie. Historisch-kritische Darstellung ihrer Entwicklung. Deutsch von H. Liebmann. (Bd. IV aus „Wissenschaft und Hypothese".) Leipzig 1908, B. G. Teubner. VIII + 245 S. ℳ 5.—.

Charlier, C. V. L., Ein Transformationstheorem in der Mechanik. Arkiv för Mat., Astr. och Fys. 4_2, 1907. 13 S.

—, Eine neue Meth. zur Behandl. des Rotationsproblems. Dasselbe Arkiv 4_4, 1908. 19 S.

—, Partikulare Integrale des Rotationsproblems. Dasselbe Arkiv 4_{12}. 13 S.

—, Weiteres über das Fehlergesetz. Dasselbe Arkiv 4_{13}. 9 S. Upsala.

Chwolson, O. D., Lehrbuch der Physik. Vierter Band: Die Lehre von der Elektrizität. Übersetzt von H. Pflaum. Erste Hälfte. Braunschweig 1908, Vieweg u. Sohn. ℳ 18.—.

Cyon, E. von, Das Ohrlabyrinth als Organ der mathematischen Sinne für Raum und Zeit. Berlin 1908, J. Springer. XX + 432 S. ℳ 14.—.

Doehlemann, K., Geometrische Transformationen. Zweiter Teil: Die quadratischen und höheren birationalen Punkttransformationen. Sammlung Schubert Nr. 28. Leipzig 1908, Göschen. 328 S. ℳ 10.—.

Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées. Edition française rédigée et publiée d'après l'édition allemande sous la direction de J. Molk. Tome I, volume 3, fasc. 2. Paris 1908, Gauthier-Villars; Leipzig, B. G. Teubner.

Eulenburg, F., Der akademische Nachwuchs. Leipzig 1908, B. G. Teubner. 155 S. ℳ 2.80.

Fassbender, H., Einfluß der stillen Entladung auf explosive Gasgemische. Marburg 1907.

Geigenmüller, R., Leitfaden und Aufgabensammlung zur Elementarmechanik. 1. Teil: Elementarmechanik. 5. Aufl. Mittweida, R. Schulze. ℳ 5.50.

—, Leitfaden und Aufgabensammlung zur höheren Mathematik. Für technische Lehranstalten und den Selbstunterricht. 1. Band: Die analytische Geometrie der Ebene und die algebraische Analysis. 7. Auflage. 1907. ℳ 6.—. 2. Band: Die höhere Analysis oder Differential- und Integralrechnung. 6. Aufl. Mittweida 1908, R. Schulze. ℳ 7.—.

Goebel, K., Einleitung in die experimentelle Morphologie der Pflanzen. Erster Band der Sammlung: Naturwissenschaft und Technik in Lehre und Forschung. Leipzig 1908, B. G. Teubner. VIII + 260 S. ℳ 8.—.

Gruner, P., Die Wandlung in den Anschauungen über das Wesen der Elektrizität. Hamburg 1908, G. Schloeßmann. ℳ —.80.

Günther, S., Geschichte der Mathematik. I. Teil: Von den ältesten Zeiten bis Cartesius. Sammlung Schubert Nr. 18. Leipzig 1908, Göschen. ℳ 9.60.

Digitized by Google

Haentzschel, E., Über ein orthogonales System von bizirkularen Kurven vierter Ordnung. Jahresber. Kölln. Gymn. Ostern 1908. Berlin, Weidmann. 28 S.

Heger, R., Analytische Geometrie auf der Kugel. Sammlung Schubert Nr. 54. Leipzig 1908, Göschen. ℳ 4.40.

Index du répertoire bibliographique des sciences mathématiques. Nouvelle édition. Amsterdam 1908, Delsman.

Jäger, G., Theoretische Physik IV. Sammlung Göschen Nr. 374. Leipzig 1908, Göschen. ℳ 0.80.

Kalähne, A., Die neueren Forschungen auf dem Gebiete der Elektrizität und ihre Anwendungen. Leipzig 1908, Quelle u. Meyer. 284 S. ℳ 4.80.

Kayser, H., Lehrbuch der Physik. Für Studierende. Vierte verbesserte Auflage. Stuttgart 1908, F. Enke. X + 525 S.

Manville, O., Les découvertes modernes en physique. Leur théorie et leur rôle dans l'hypothèse de la constitution électrique de la matière. Paris 1908, A. Hermann. 186 S.

Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. 21. Band 1903 und 22. Band 1904. Leipzig, B. G. Teubner. ℳ 10.— und ℳ 18.—.

Nölke, F., Das Problem der Entwicklung unseres Planetensystems. Aufstellung einer neuen Theorie nach vorhergeh. Kritik der Theorien von Kant, Laplace, Poincaré, Moulton, Arrhenius u. a. Berlin 1908, J. Springer. 216 S. ℳ 6.—.

Pfaundler, L., Das chinesisch-japanische Go-Spiel. Leipzig 1908, B. G. Teubner. VI + 75 S. ℳ 3.—.

Richarz, F., Über Beobachtung des künstl. Brockengespenstes. Met. Ztschr. 1908.

Sarrette, H., Précis arithmétique des calculs d'emprunts à long terme et de valeurs mobilières. Paris 1908, Gauthier-Villars.

Scheibner, W., Beiträge zur Theorie der linearen Transformationen als Einl. in die algebraische Invariantentheorie. Leipzig 1907, B. G. Teubner. 250 S. ℳ 10.—.

Scheiner, J., Populäre Astrophysik. Leipzig 1908, B. G. Teubner. 718 S. ℳ 12.—.

Schick, J., Barytonik. München 1907, G. Franz. 78 S. ℳ 2.—.

Schubert, H., Niedere Analysis. Erster Teil: Kombinatorik, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Kettenbrüche und diophantische Gleichungen. Sammlung Schubert Nr. 5. Leipzig 1908, Göschen. 181 S. ℳ 3.60.

—, Vierstellige Tafeln und Gegentafeln. 3. Auflage. Sammlung Göschen Nr. 81. Leipzig 1908, Göschen. ℳ —.80.

Seegert, B., Über die Dispersion ultraroter und ultravioletter Strahlen in einigen Flüssigkeiten. Berlin 1908.

Seddig, M., Abhängigkeit der Brownschen Molekularbewegung von der Temperatur. Richarz, F., Bemerkungen hierzu und zu dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik. Sitzungsber. Marb. Gesellsch. 1907.

Starke, H., Physikal. Musiklehre. Leipzig 1908, Quelle u. Meyer. 232 S. ℳ 4.20.

Studte, H., Über Beziehungen der Thermo- und Tribo-Elektrizität zur Elektrophysiologie. Charlottenburg 1908, H. Kurtzig. 48 S. ℳ 1.20.

Sturm, R., Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften I. Nr. XXVII$_1$ aus „B. G. Teubners Lehrbücher der math. Wiss.". Leipzig 1908, B. G. Teubner. 415 S. ℳ 16.—.

Teixeira, F. G., Obras sobre mathematica. Volume quarto. Coimbra 1908.

Verhandlungen der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte. 79. Versammlung. Dresden. Erster Teil. Leipzig 1908, F. C. W. Vogel.

White, W. F., A scrap book of elementary mathematics. Notes, recreations, essays. Chicago 1908, The open court publishing company. 248 S.

Ziegler, W., Einfluß des Mediums auf die Größe der elektrodynamischen, magnetischen und elektromagnetischen Kräfte. Sitzungsber. Marb. Ges. 1907.

Digitized by Google

Seite
Messung, Achsen und Wellen. Von R. Vater. S. 173. — Wilda, Hermann, Die Dampfturbinen, ihre Wirkungsweise und Konstruktion. Von R. Vater. S. 176. — Langen, F., Was haben wir von der Gasturbine zu erwarten? Von R. Vater. S. 176. — Vogdt, Rudolf, Pumpen, hydraulische und pneumatische Anlagen. Von R. Vater. S. 177. — La Cour, Paul, und Appel, Jakub, Die Physik auf Grund ihrer geschichtlichen Entwicklung für weitere Kreise in Wort und Bild dargestellt. Von A. Roth. S. 177. — Müller-Pouillet, Lehrbuch der Physik und Meteorologie. I. Band, 2. Hälfte. Von F. Harms. S. 181. — Mandorli, Die Interpolation und ihre Verwendung bei der Benutzung und Herstellung astronomischer Tafeln. Von H. Samter. S. 181. — Sahulka, Erklärung der Gravitation, der Molekularkräfte, der Wärme, des Lichtes, der magnetischen und elektrischen Erscheinungen aus gemeinsamer Ursache auf rein mechanischem, atomistischem Wege. Von H. Samter. S. 181. — Die physikalischen Institute der Universität Göttingen. Von H. Samter. S. 182. — Oppenheim, Das astronomische Weltbild im Wandel der Zeit. Von H. Samter. S. 182. — Die Kräfte der Gegenwart. 1. Bd.: Die allgemeinen Grundlagen der Kultur der Gegenwart. Von H. Samter. S. 183. — Zühlke, P., Anstrengungslose elementargeometrischer Konstruktionen bei ungünstigen Lagenverhältnissen. Von H. Samter. S. 184. — Edwardsen, Wofür kam das Leben? Von H. Samter. S. 184. — Technik und Schule. I. Band, 1. Heft. Von H. Samter. S. 184. — Paulsen, F., Das deutsche Bildungswesen in seiner geschichtlichen Entwicklung. Von H. Samter. S. 184. — Lyttel, Guide de l'amateur météorologiste. Von H. Samter. S. 185. — Henkler, Der Lehrplan für den Unterricht in Naturkunde. Meißner, O., Die meteorologischen Elemente und ihre Beobachtung. Von H. Samter. S. 185. — Wiltz, Mathematische Unterrichtstafeln. Von H. Samter. S. 185. — Petrovitch, M., La mécanique des Phénomènes fondées sur les Analogies. Von M. Lane. S. 186. — Hassel, John Wellesley, An Elementary Treatise on Pure Geometry. Von M. Pecke. S. 186. — Smithsonian Institution. Von R. Scheibe. S. 186. — Wehmer, H., Über die Kenntnis der magnetischen Nordweisung im frühen Mittelalter. Von Ad. Schmidt. S. 187. — Lehrbücher nachstehender Schriften physikalischen, mechanischen und technischen Inhalts. Von P. Johannesson. S. 188. — Heiberg, J. L., und Zeuthen, H. G., Eine neue Schrift des Archimedes. Bibl. Math. 7., 021, 1907. Von J. Tropfke. S. 189.

Verschiedene Mitteilungen 190

1. Aufgaben und Lehrsätze. Lösungen.

A. Aufgaben und Lehrsätze. 194. Von stud. math. Jos. Krug. S. 190. — 195. Von stud. math. Jos. Krug. S. 190. — 196. Von H. Wieleitner. S. 190. — 197. Von H. Wieleitner. S. 190.

B. Lösungen. Zu 17 (E. A. Lemoine) von stud. math. W. Gaedecke. S. 191. — Zu 177 (W. Fr. Meyer) von W. Stegemann. S. 192. — Zu 184 (G. Kaiser) von H. Wieleitner und W. Stegemann. S. 192. — Zu 186 (W. Fr. Meyer) von G. Berkhan (Hamburg). S. 193. — Zu 189 (P. Stäckel) von stud. math. A. Barach, G. Berkhan, stud. ing. K. Böhle (Charlottenburg), E. Stamm (Innsbruck), W. Lorey (Gorlitz) und E. Kostka (Steyr, Oesterr.). S. 197

2. Anfragen und Antworten. (Vacat.)

3. Kleinere Notizen. Konstruktionen des Krümmungskreises der geraden Strophoide. Von O. Gutsche. Mit 2 Figuren. S. 197. — Erweiterung des Näherungsverfahrens des Nonius v. Cusa zur Streckung und Teilung von Kreisbogen. Von W. Hergesell. Mit 2 Figuren. S. 202. — Bemerkung zu der Notiz in (4) 13, 93. Von K. Unrath. S. 206.

4. Bei der Redaktion eingegangene Bücher 207

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft Anhang Seite

50. Sitzung am 28. Februar 1908 29

60. Sitzung am 26. März 1908 29

Beiträge zur Analysis situs. Von Ernst Steinitz . . . . . 29—49

Beiträge zur Theorie der linearen Differentialgleichungen. Von Georg Wallenberg . 50—63

Kleine Aufsätze aus meinen Übungsstunden. Von E. Lampe . . . . . 64—76

Ergänzungen sind uns zum Abdruck in den nächsten Heften gelegentlich Beiträge der Herren:

F. Bendixson, T. Bergstedt, S. Bernstein, L. Bieberbach, W. Blaschke, H. Bohlmann, O. Bolza, H. Bremekamp, W. Burnside, C. Carathéodory, L. Crelier, W. Dyck, A. Einstein, P. Epstein, G. Faber, L. Fejér, A. Fleck, A. Fraenkel, P. Frank, G. Fubini, W. Gaedecke, A. Galle, H. Geppert, H. Grell, E. Grelling, E. Grimsehl, E. Hahn, H. Hahn, G. Hamel, G. Herglotz, E. Hessenberg, H. Hilbert, E. Hölder, E. Hoppe, L. Hopf, W. Jacobsthal, G. Jaffé, G. Jung, W. Kapferer, H. Kayser, F. Klein, A. Kneser, H. Kneser, A. Korn, P. Koebe, L. Kollros, A. Kowalewski, P. Kustaanheimo, E. Landau, E. Landau, E. Lasker, H. Lebesgue, J. Lense, R. Lüroth, H. Mandorli, E. Meissner, E. Meyer, R. Mises, E. Molenbroek, R. Müller, F. Noether, M. Noether, E. Ott, H. Pollaczek, L. Prandtl, H. Prüfer, P. Rabinowitsch, C. Runge, P. Saalschütz, H. Salié, E. Salkowski, E. Schmidt, E. Schmidt, I. Schur, H. Schwerdtfeger, E. Study, E. Study, G. Szegö, O. Szász, O. Toeplitz, E. Trefftz, J. Tropfke, J. Valyi, W. Voigt, A. Voss, A. Wangerin, A. Weber, H. Weber, H. Weitzenböck, H. Wiener, H. Wieleitner, E. Zermelo.

Eingelaufene Lösungen: Zu 40 (O. Stolz) von W. Gaedecke. — Zu 162 (F. Schaffstein) von H. Schumacher (Münster) und stud. math. K. Loeber (Berlin). — Zu 165 (F. Schlegel) von J. Rose (Nivelles). — Zu 180 (G. Kober) von O. Degel (Hagenau). — Zu 182 (H. Wieleitner) von den stud. math. G. Fuchs, J. Krug und A. Baresch, von G. Hoffmann, stud. math. L. Brandt (Heidelberg), W. Stegemann, stud. math. W. Blaschke (Graz), von O. Degel und H. Wieleitner. — Zu 183 (H. Wieleitner) von W. Stegemann und O. Degel. — Zu 187 (G. Kober) von E. Köstlin (Schwäbisch Gmünd). — Zu 190 (H. Wieleitner) von stud. math. W. Gaedecke, G. Berkhan, C. Hoffmann, E. Köstlin, H. Wieleitner, W. Stegemann und O. Degel.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin.

Soeben erschienen

Otto Richter:

Kreis und Kugel in senkrechter Projektion

Für den Unterricht und zum Selbststudium

Mit 147 Fig. [X u. 188 S.] gr. 8. 1908. geh. M. 4.60, in Leinw. geb. M. 5.20.

Angesichts des oft und seit langem beklagten Übelstandes, daß die für die Schulung des Raumanschauungsvermögens so wichtige Darstellung der Kugel und ihrer Kreise nicht nur im stereometrischen Unterricht hintangesetzt (was ja mit guten Gründen entschuldigt werden kann), sondern sogar in der darstellenden Geometrie wenig gepflegt und selbst vernachlässigt wird, hat der Verfasser den Versuch gemacht, eine Anzahl der in der Kreislehre häufig auftretenden Körper in allgemeiner Lage geschlossen darzustellen und die genaue Bildherstellung zu begründen unter Hinweis auf die dabei obwaltenden mathematischen Beziehungen und bei möglichster Beschränkung auf eine einzige Bildtafel, um die Verwendung der Konstruktionen im Unterrichte zu erleichtern. Dabei sind außer der Kugel nicht nur Zylinder und Kegel, sondern auch andere aus Kugel, Zylinder und Kegel ableitbare Raumgebilde berücksichtigt worden, z. B. Prismen und Pyramiden, Platonische und Archimedische Körper nebst einigen Durchdringungen. Die rechtwinklige Axenometrie, von der Kugel abgeleitet, die Haupt- und Nebenkreise der Kugel nebst ihren Polen werden ausführlich betrachtet, die nichteuklidische Geometrie auf der Kugel wenigstens gestreift. Eine vollständige Begründung der hauptsächlich benutzten Ellipseneigenschaften leitet das Buch ein, Anwendungen auf die Rotationskörper, auf die Schraubenlinien, von Zylinder, Kegel, Kugel, sowie auf die Erd- und Himmelskunde beschließen es. Vorausgesetzt wird die Kenntnis der elementaren Planimetrie und Stereometrie, einschließlich der harmonischen Eigenschaften des Kreises, an einigen Stellen auch der Trigonometrie und der Algebra.

L. Schlesinger:

Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen

Mit 6 Figuren im Text. [X u. 334 S.] gr. 8. 1908. In Leinwand geb. ℳ 4.—

In diesen Vorlesungen stellt der Verfasser das „Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen“ zunächst die allgemeinen Grundlagen dieser Theorie in einer neuen Form dar, die, wie er glaubt, sowohl zur Einführung in dieses Gebiet geeignet, als auch für die weitere Forschung von heuristischem Werte ist. Es werden dann namentlich diejenigen Untersuchungen behandelt, die der Verfasser in den letzten zehn Jahren, seit dem Erscheinen des Handbuches im Anschluß an das Riemannsche Fragment zur Theorie der linearen Differentialgleichungen angestellt hat.

Hierzu Beilagen von B. G. Teubner in Leipzig, die wir der Beachtung unserer Leser bestens empfehlen.

ARCHIV
DER MATHEMATIK UND PHYSIK

MIT BESONDERER RÜCKSICHT AUF DIE BEDÜRFNISSE
DER LEHRER AN HÖHEREN UNTERRICHTSANSTALTEN.

GEGRÜNDET 1841 DURCH J. A. GRUNERT.

DRITTE REIHE.

MIT ANHANG:
SITZUNGSBERICHTE DER BERLINER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT.

HERAUSGEGEBEN
VON

E. LAMPE
IN BERLIN.

W. FRANZ MEYER
IN KÖNIGSBERG I. PR.

E. JAHNKE
IN BERLIN.

13. BAND. 3. HEFT.

AUSGEGEBEN AM 23. JULI 1908.

LEIPZIG UND BERLIN,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1908.

Generalregister zum Archiv der Mathematik und Physik, II. Reihe, Band 1—17, zusammengestellt von E. Jahnke. Mit einem Bildnis und Biographie R. Heppes. [XXXI u. (14 S.)] gr. 8. 1901. geh. n. Mk. 6.—

ARCHIV DER MATHEMATIK UND PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN VON E. LAMPE, W. FRANZ MEYER UND E. JAHNKE.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASSE 3

☞ Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Rezensionsexemplare u. s. w.) sind an den geschäftsführenden Redakteur:

Prof. Dr. E. Jahnke, Berlin W 15, Pariserstraße 36

zu richten. Es nehmen aber auch Geheimer Regierungsrat Prof. Dr. E. Lampe in Berlin W 15, Fasanenstraße 64, und Prof. Dr. W. Franz Meyer in Königsberg i. Pr., Maraunenhof, Herzog Albrecht Allee 27, Sendungen für die Redaktion an.

☞ Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich von größeren Aufsätzen 30 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen, Mitteilungen, Rezensionen u. s. w. 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

☞ Jeder Band des Archivs umfaßt 24 Druckbogen in 4 Heften und kostet 16 Mark; jährlich sollen nicht mehr als 6 Einzel-Hefte ausgegeben werden. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

Die Redaktion ersucht die Herren Autoren, in ihrem eigenen Interesse den Umfang der für das Archiv bestimmten Manuskripte nach Möglichkeit einschränken zu wollen, da nur solche geringen Umfanges Aussicht haben, in nächster Zeit abgedruckt zu werden. Die Redaktion teilt ferner mit, daß sie sich durch den Umfang des vorliegenden Manuskriptenmaterials für die nächste Zeit verhindert sieht, Inauguraldissertationen in extenso ins Archiv aufzunehmen.

INHALT DES VORLIEGENDEN HEFTES.

Seite

Zur Geometrie auf der Kugel. II. Von R. Heger in Dresden 209

Systeme korrelativer Bündel, welche eine gegebene F^3 erzeugen. (Fortsetzung.) Von Wolfgang Vogt in Karlsruhe 214

The Potential Equation and $\wp$-function Curves. Von F. H. Safford in Philadelphia 232

Über gewisse Transformationen von ebenen Kurven dritter Ordnung. Von F. Kölmel in Baden-Baden 256

Über die Lage der Hauptträgheitsachsen von Punktsystemen in der Ebene. Von H. W. E. Jung in Marburg 271

Rezensionen. Von W. Ahrens, A. Baruch, G. Hamel, E. Hammer, L. Heupeberg, J. Herzog, G. Hessenberg, Edm. Huppe, E. Jahnke, P. Johannesson, M. Krause, E. Kullrich, E. Lampe, A. Loewy, E. Müller, M. Noether, A. Rotth, Cl. Schaefer, J. Schröder, G. Wallenberg, J. Weingarten, H. Wieleitner 286

Sylvester, James Joseph. The Collected Mathematical Papers. Von M. Noether. S. 283. — Wieleitner, Heinrich, Theorie der ebenen algebraischen Kurven höherer Ordnung. Von E. Lampe. S. 285. — Walther, Lehr- und Übungsbuch der Geometrie für Unter- und Mittelstufe. Kruppa, Kuppe-Dickmanns Geometrie zum Gebrauche an höheren Unterrichtsanstalten. Hočevar, Lehr- und Übungsbuch für Untergymnasien. Davison and Richards, Plane Geometry for secondary schools. Von E. Kullrich. S. 286. — Poselger, Ch. Lucas de, N. H. Abel. Sa vie et son oeuvre. Von E. Lampe. S. 287. — Föppl, August, Vorlesungen über technische Mechanik. Von J. Weingarten. S. 289. — Castelnuovo, G., L'Algèbre de la Logique. Von G. Wallenberg. S. 243. — Brand, H., Beziehungen des Du Bois-Reymondschen Mittelwertsatzes zur Oszillationstheorie. Von G. Wallenberg. S. 244. — Myller, A., Gewöhnliche Differentialgleichungen höherer Ordnung in ihrer Beziehung zu den Integralgleichungen. Von G. Wallenberg. S. 245. — Lesser, Oskar, Die Entwicklung des Funktionsbegriffes und die Pflege des funktionalen Denkens im Mathematikunterricht unserer höheren Schulen. Von J. Schröder. S. 247. — Fack, Michael, Zur didaktischen Darstellung von Stoffen aus der niederen und höheren Mathematik. Von J. Schröder. S. 248. — Schülke, A., Differential- und Integralrechnung im Unterricht. Von J. Schröder. S. 249. — Adler, A., Theorie der geometrischen Konstruktionen. Von G. Wallenberg. S. 250. — Fuchs, L., Gesammelte Mathematische Werke. Von G. Wallenberg. S. 251. — Weinstein, B., Die philosophischen Grundlagen der Wissenschaften. Von P. Johannesson. S. 252. — Gibbs, J. Willard, Scientific papers. Von Cl. Schaefer. S. 254. —

[Fortsetzung auf der 3. Seite des Umschlags.]

Zur Geometrie auf der Kugel.

Von R. Heger in Dresden.

II.

Bei Anwendung rechtwinkliger oder Plückerscher homogener Koordinaten geht durch lineare Zusammensetzung aus Kreisgleichungen wieder eine Kreisgleichung, aus Kugelgleichungen wieder eine Kugelgleichung hervor. Kreisgleichungen auf der Kugel, wenn sie in der im 1. Aufsatze (S. 127 dieses Bandes) angegebenen homogenen Form vorausgesetzt werden, ergeben dagegen durch lineare Zusammensetzung nicht wieder eine Kreisgleichung, sondern die Gleichung eines andern sphärischen Kegelschnitts. Wohl aber erhält man wieder Kreisgleichungen, wenn man von der Form der Kreisgleichung ausgeht

$$K \equiv ax + by + cz - r' = 0, \tag{1}$$

bei der Kreis und Gegenkreis von einander getrennt sind.

Die Gleichung des Hauptkreises T, der K in x, y, z, berührt, ist

$$T \equiv ax + by + cz - r'(x_1 x + y_1 y + z_1 z) = 0. \tag{2}$$

Sie verweist auf die homogene Form der Kreisgleichung, im Zusammenhange damit, daß T auch den Gegenkreis $-a, -b, -c, -r'$ im Punkte $-x_1, -y_1, -z_1$ berührt.

Die Kreise

$$K \equiv \frac{1}{r_1} K_1 - \frac{1}{r_2} K_2 = 0, \quad K' \equiv \frac{1}{r_1} K_1 + \frac{1}{r_2} K_2 = 0$$

halbieren die Winkel der Kreise K_1 und K_2, wenn K_1 und K_2 reale Schnittpunkte haben; denn die Gleichungen der K und K' in einem gemeinsamen Punkte berührenden Hauptkreise sind

$$T \equiv \frac{1}{r_1} T_1 - \frac{1}{r_2} T_2 = 0, \quad T' \equiv \frac{1}{r_1} T_1 + \frac{1}{r_2} T_2 = 0. \tag{3}$$

Man sieht leicht, daß $\frac{1}{r_1} T_1$ und $\frac{1}{r_2} T_2$ Normalformen sind, d. i. daß in diesen Formen die Quadrate der Koeffizienten von x, y, z die Summe 1 haben; aus (3) folgt dann die Richtigkeit der Behauptung.

Digitized by Google

Wenn K_1 und K_2 reale Schnittpunkte haben, so ergibt sich aus der geometrischen Bedeutung der Kreise K und K' sofort ihre Realität. Wenn aber K_1 und K_2 keine realen Schnittpunkte haben, so ist von K und K' immer nur einer real. Denn die Formen K und K' gehen in Normalformen über, wenn man sie durch

$$m = \sqrt{\left[\left(\frac{a_1}{r_1} \mp \frac{a_2}{r_2}\right)^2 + \left(\frac{b_1}{r_1} \mp \frac{b_2}{r_2}\right)^2 + \left(\frac{c_1}{r_1} + \frac{c_2}{r_2}\right)^2\right]}$$

dividiert. Bezeichnet man den sphärischen Abstand der Mitten von K_1 und K_2 mit $\mathfrak{e}$, so ist

$$e' = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2;$$

man hat daher

$$m = \sqrt{\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} \mp \frac{2e'}{r_1 r_2}}.$$

Für die Halbmesser $\mathfrak{s}_1$ und $\mathfrak{s}_2$ von K und K' hat man

$$\left.\begin{matrix} s_1' \\ s_2' \end{matrix}\right\} = \left(\frac{r_1'}{r_1} \mp \frac{r_2'}{r_2}\right) : \sqrt{\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} \mp \frac{2e'}{r_1 r_2}}.$$

Vergleicht man rechts Zähler und Nenner durch Subtraktion der Quadrate, so folgt

$$\frac{r_1'^2}{r_1^2} + \frac{r_2'^2}{r_2^2} \mp \frac{2r_1' r_2'}{r_1 r_2} - \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \pm \frac{2e'}{r_1 r_2} = \mp \frac{2}{r_1 r_2}(r_1' r_2' \pm r_1 r_2 - e').$$

Ist $\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2 < \mathfrak{e}$, so ist nur $\mathfrak{s}_1$ real, ist $\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2 > \mathfrak{e}$, so ist es dagegen nur $\mathfrak{s}_2$.

Für die Kreise, die die Winkel und Nebenwinkel des von den drei Kreisen

$$K_1 = 0,\ K_2 = 0,\ K_3 = 0$$

gebildeten Dreiecks hälften, hat man

$$K_3 \equiv \frac{1}{r_1} K_1 - \frac{1}{r_2} K_2 = 0,\ K_3' \equiv \frac{1}{r_1} K_1 + \frac{1}{r_2} K_2 = 0,$$

$$K_1 \equiv \frac{1}{r_2} K_2 - \frac{1}{r_3} K_3 = 0,\ K_1' \equiv \frac{1}{r_2} K_2 + \frac{1}{r_3} K_3 = 0,$$

$$K_2 \equiv \frac{1}{r_3} K_3 - \frac{1}{r_1} K_1 = 0,\ K_2' \equiv \frac{1}{r_3} K_3 + \frac{1}{r_1} K_1 = 0.$$

Hieraus ergeben sich die Identitäten

$$K_1 + K_2 + K_3 \equiv 0,$$
$$K_1 + K_2' - K_3' \equiv 0,$$
$$K_2 + K_3' - K_1' \equiv 0,$$
$$K_3 + K_1' - K_2' \equiv 0.$$

Digitized by Google

Man hat also ganz wie bei Geraden in der Ebene oder wie bei Dreiecken aus Hauptkreisen oder wie bei Kreisen in der Ebene: die sechs Kreise der Büschel $K_2 K_3$, $K_3 K_1$, $K_1 K_2$, die die Winkel und Nebenwinkel des Dreiecks aus Kreisen K_1, K_2, K_3 hälften, gehen viermal zu je dreien durch gemeinsame Punkte (allgemeiner: bilden viermal zu je dreien ein Büschel).

Es bedarf nur der Erwähnung, daß man diesem Satze einen allgemeineren zur Seite stellen kann, bei dem es sich um andere Sinusverhältnisse der Winkel als ± 1 handelt.

Wenn der Kreis

$$N_1 \equiv m_2 K_2 - m_3 K_3 = 0$$

den Kreis K_1 rechtwinklig schneiden soll, so muß die Gleichung bestehen

$$m_2 (a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 - r_1' r_2') - m_3 (a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3 - r_1' r_3') = 0.$$

Setzt man, unter ikl eine Folge von 1 2 3 verstehend,

$$a_i a_k + b_i b_k + c_i c_k - r_i' r_k' = \alpha_i,$$

so sind daher die Kreise der Büschel $K_2 K_3$, $K_3 K_1$, $K_1 K_2$, die die gegenüberliegenden Kreise K_1, K_2, K_3 rechtwinklig schneiden,

$$\begin{aligned} K_1 &\equiv \alpha_2 K_2 - \alpha_3 K_3 = 0, \\ K_2 &\equiv \alpha_3 K_3 - \alpha_1 K_1 = 0, \\ K_3 &\equiv \alpha_1 K_1 - \alpha_2 K_2 = 0. \end{aligned}$$

Hieraus folgt: Die Kreise der Büschel $K_2 K_3$, $K_3 K_1$, $K_1 K_2$, die die gegenüberliegenden Kreise K_1, K_2, K_3 unter rechten Winkeln schneiden, bilden ein Büschel.

Den Kreisen des Büschels $K_1 K_2$, die die Winkel dieser Kreise hälften, entsprechen die Kreise der Schar $\mathfrak{K}_1 \mathfrak{K}_2$, die die auf einem Träger der Schar zwischen den Berührungspunkten mit $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ enthaltenen Bogen hälften; und dem Kreise des Büschels $K_2 K_3$, der den Kreis K_3 rechtwinklig schneidet, entspricht das Glied der Schar $\mathfrak{K}_2 \mathfrak{K}_3$, das mit $\mathfrak{K}_1$ in *rechtwinkliger Berührung* steht, d. h. mit $\mathfrak{K}_1$ auf einem gemeinsam berührten Hauptkreise einen rechten Bogen begrenzt. Hiernach lassen sich die dual entsprechenden Sätze leicht aufstellen.

Als Potenz eines Punktes P für einen einzelnen Kreis wird man das Produkt $\tan \frac{1}{2} PA \cdot \tan \frac{1}{2} PB$ verwenden. Der Ort der Punkte gleicher Potenzen für K und K_1 besteht jetzt aus dem einzigen Hauptkreise

$$L \equiv \frac{1}{r'} (ax + by + cz) - \frac{1}{r_1'} (a_1 x + b_1 y + c_1 z) = 0,$$

dessen Ebene den Schnitt der Ebenen von K und K_1 enthält.

Digitized by Google

Ist

$$K_i \equiv a_i x + b_i y + c_i z - r_i' = 0,$$

und besteht für bestimmte Zahlen n_1, n_2, n_3, n_4 die Identität

$$n_1 K_1 + n_2 K_2 + n_3 K_3 + n_4 K_4 \equiv 0, \tag{1}$$

so haben die vier Kreise einen potenzhaltenden Punkt. Denn ist p_4^2 die Potenz irgend eines Punktes P für K_4 und r_i der Halbmesser von K_i, so ist

$$p_4 = \frac{K_4}{r_4'} + 1.$$

Da nun nach (1)

$$\begin{aligned} -n_4 K_4 &= n_1 K_1 + n_2 K_2 + n_3 K_3, \\ -n_4 r_4' &= n_1 r_1' + n_2 r_2' + n_3 r_3', \end{aligned}$$

so folgt

$$p_4 - 1 = \frac{n_1 K_1 + n_2 K_2 + n_3 K_3}{n_1 r_1' + n_2 r_2' + n_3 r_3'}. \tag{2}$$

Ist nun insbesondere P der potenzhaltende Punkt für K_1, K_2, K_3 und p^2 seine Potenz für diese Kreise, so ist

$$p - 1 = \frac{K_1}{r_1'} = \frac{K_2}{r_2'} = \frac{K_3}{r_3'},$$

mithin

$$K_1 = r_1'(p-1), \quad K_2 = r_2'(p-1), \quad K_3 = r_3'(p-1).$$

Setzt man dies in (2) ein, so ergibt sich

$$p_4 = p.$$

Aus der Identität (1) folgen die drei

$$n_a K_a + n_b K_b = -n_c K_c - n_d K_d,$$

wenn $abcd$ irgend eine Folge der Zeiger 1 2 3 4 ist; hieraus schließt man: Wenn vier Kreise einen potenzhaltenden Punkt haben, so haben die beiden Büschel, die aus irgend zweien und den beiden übrigen gebildet werden, einen Kreis gemein. Umgekehrt gilt auch: Wenn die Büschel K_1K_2 und K_3K_4 einen Kreis gemein haben, so gilt dies auch von den Büscheln K_1K_3 und K_2K_4, sowie von K_1K_4 und K_2K_3, und die vier Kreise haben einen potenzhaltenden Punkt.

Vier Kreise, die einen potenzhaltenden Punkt haben, teilen in bestimmter Weise die Eigenschaften eines vollständigen ebenen Vierseits. Der größern Anschaulichkeit wegen werden wir statt von Kreisen eines Büschels von Kreisen reden, die ein Punktpaar gemein haben und als Eckenpaar des Kreisvierseits $K_1K_2K_3K_4$ die Träger der Büschel K_1K_2, K_2K_3, K_3K_4 und K_4K_1 bezeichnen. Unter den Diagonalen des Kreisvierseits verstehen wir die gemeinsamen Kreise der Büschel

$$K_1K_2 \text{ und } K_3K_4, \quad K_1K_3 \text{ und } K_2K_4, \quad K_1K_4 \text{ und } K_2K_3.$$

Digitized by Google

Die Gleichungen dieser Diagonalkreise sind

$$D_1 \equiv n_1 K_1 + n_2 K_2 \equiv -n_3 K_3 - n_4 K_4 = 0,$$
$$D_2 \equiv n_1 K_1 + n_3 K_3 \equiv -n_2 K_2 - n_4 K_4 = 0,$$
$$D_3 \equiv n_1 K_1 + n_4 K_4 \equiv -n_2 K_2 - n_3 K_3 = 0.$$

Aus

$$D_1 - D_2 \equiv n_1 K_1 - n_4 K_4,\ D_4 \equiv n_1 K_1 + n_4 K_4$$

folgt: Haben die Seiten eines Kreisvierseits einen potenzhaltenden Punkt, so sind je zwei Seiten des Kreisvierseits, die Diagonale ihres gemeinsamen Eckenpaares und der Kreis, der das Schnittpunktepaar der andern beiden Diagonalen mit dem genannten Eckenpaare verbindet, *in Harmonie;* wobei der Ausdruck „vier Kreise eines Büschels sind in Harmonie" keiner Erläuterung bedarf.

Für ein *beliebiges* Vierseit aus Nebenkreisen gelten einige bemerkenswerte Sätze.

Die Kreise der Büschel $K_1 K_2$, $K_2 K_3$, $K_3 K_4$, $K_4 K_1$, die die Winkel der betreffenden Kreise und deren Nebenwinkel hälften, haben die Gleichungen

$$K_{12} \equiv \frac{1}{r_1} K_1 - \frac{1}{r_2} K_2 = 0,\ K'_{12} \equiv \frac{1}{r_1} K_1 + \frac{1}{r_2} K_2 = 0,$$
$$K_{23} \equiv \frac{1}{r_2} K_2 - \frac{1}{r_3} K_3 = 0,\ K'_{23} \equiv \frac{1}{r_2} K_2 + \frac{1}{r_3} K_3 = 0,$$
$$K_{34} \equiv \frac{1}{r_3} K_3 - \frac{1}{r_4} K_4 = 0,\ K'_{34} \equiv \frac{1}{r_3} K_3 + \frac{1}{r_4} K_4 = 0,$$
$$K_{41} \equiv \frac{1}{r_4} K_4 - \frac{1}{r_1} K_1 = 0,\ K'_{41} \equiv \frac{1}{r_4} K_4 + \frac{1}{r_1} K_1 = 0.$$

Hieraus folgen die Identitäten

$$K_{12} + K_{23} + K_{34} + K_{41} = 0,$$
$$K_{12} + K'_{23} - K_{34} - K'_{41} = 0,$$
$$K_{23} + K'_{34} - K_{41} - K'_{12} = 0,$$
$$K_{34} + K'_{41} - K_{12} - K'_{23} = 0,$$
$$K_{41} + K'_{12} - K_{23} - K'_{34} = 0.$$

Da K_{13} mit K_{12} und K_{23}, sowie K_{24} mit K_{23} und K_{34} ein Büschel bildet, so ergibt die erste dieser Identitäten den Satz: Die sechs Kreise, die mit je zweien von vier Kreisen ein Büschel bilden und die Winkel dieser Kreise hälften, haben einen potenzhaltenden Punkt.

Man erkennt das Seitenstück dieses Satzes leicht, das aus den übrigen Identitäten hervorgeht, sowie die dual entsprechenden Sätze.

Ferner genügt der Hinweis, daß man in diesen Sätzen K_{mn}, K'_{mn} durch die Kreise des Büschels K_m, K_n ersetzen kann, die die Winkel dieser Kreise in den Sinusverhältnissen $\pm m : n$ teilen.

Digitized by Google

Systeme korrelativer Bündel, welche eine gegebene F^3 erzeugen.

Von WOLFGANG VOGT in Karlsruhe.

(Fortsetzung).

§ 2.

12. *Es sind F^3 und zwei Paare konjugierter Punkte*

$$[A_1; A_2, B_1; B_2] = \mu^3$$

gegeben.

O_1 sei ein beliebiger Punkt der F^3, O_1A_1 und O_1B_1 schneiden F^3 noch in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$. Wie auch die zu O_1 assoziierten Punkte liegen mögen, so müssen die den Strahlen $O_1A_1 = a_1$, $O_1B_1 = b_1$ in den Bündeln entsprechenden Ebenen α_2, β_2 durch $\mathfrak{A}A_2$ bezw. $\mathfrak{B}B_2$ gehen. Die Schnittgrade $\alpha_2\beta_2 = c_2$ wird in jedem Falle der Ebene $O_1A_1B_1 = \gamma_1$ entsprechen. Einer ihrer Schnittpunkte mit F^3 muß darum notwendig in dem Kegelschnitt $(\gamma_1 F^2)$ liegen, während der andere O_2 ist. Die möglichen Ebenen α_2, β_2, die in einer Bündelkorrelation dem a_1 und b_1 entsprechen können, beschreiben darum projektive Ebenenbüschel mit den Achsen $\mathfrak{A}A_2$, $\mathfrak{B}B_2$, so daß die von ihnen in γ_1 eingeschnittenen Strahlenbüschel den Kegelschnitt $(\gamma_1 F^2)$ erzeugen. Die erzeugte Regelschar schneidet außer $(\gamma_1 F^2)$ noch einen Kegelschnitt in F^3 ein. Jeder seiner Punkte ist mit O_1 durch eine Bündelkorrelation verbunden, in der a_1; α_2, b_1; β_2 entsprechend, also A_1; A_2, B_1; B_2 konjugiert sind. Er ist daher der Ort der zu O_1 assoziierten Punkte O_2. Seine Ebene heiße ω_2. ω_2 ist durch drei leicht konstruierbare Punkte bestimmt: Erstens die Punkte, in denen $\mathfrak{A}A_2$ und $\mathfrak{B}B_2$ die F^3 noch schneiden. Sie sind, wie man aus der Konstruktion ersieht, keine anderen als die dem O_1 bezüglich A_1; A_2 bzw. B_1; B_2 in ausgezeichneter Weise assoziierten Punkte. Daß diese hier dem O_1 assoziiert sind, leuchtet ein. Nehme ich einen von ihnen als O_2, so wird das eine Paar konjugierter Punkte von allen ∞^1 Korrelationen befriedigt, während das andere eine darunter eindeutig bestimmt. Ferner geht von O_1 eine Treffgrade an die Strahlen A_1A_2, B_1B_2. Nehme ich ihren zweiten Schnittpunkt mit F^3 als O_2, so befriedigt die spezielle axiale Korrelation mit identischen Achsen und Ebenenbüscheln alle Bedingungen. Dieser Punkt liegt also auch in $(\omega_2 F^2)$.

Jedem Punkte O_1 oder O_2 sind alle Punkte eines Kegelschnitts von F^3, $(\omega_2 F^2)$ bzw. $(\omega_1 F^2)$, assoziiert. Drei Punkte seiner Ebene sind die

Digitized by Google

beiden bezüglich A_1; A_2 und B_1; B_2 ausgezeichnet assoziierten Punkte und der zweite Schnittpunkt von F^2 mit der von O_1 an A_1A_2 und B_1B_2 kommenden Treffgraden. Alle korrelativen Bündel haben nicht nur die Punkte A_1; A_2, B_1; B_2 als konjugierte Punkte gemein, sondern die ganze durch diese festgelegte Projektivität konjugierter Punkte auf ihren Verbindungsgraden.

Symbolisch kann ich schreiben: $p_1^2 p_2 \mu^2 = 4$, $p_1 p_2^2 \mu^2 = 4$.

13. Man überzeugt sich unschwer, daß ein so erhaltener Kegelschnitt $(\omega_2 F^2)$ nur dem einen Punkt O_1 assoziiert ist.

Was für einen Ort erfüllen die Ebenen ω_2, wenn O_1 die ganze F^2 durchläuft? o_2 sei eine beliebige Grade des Raumes, sie schneide F^2 in O_2, O_2'. Dem O_2 und O_2' ist je ein Kegelschnitt assoziiert. Diese beiden Kegelschnitte haben zwei Punkte O_1, O_1' gemein. Das sind die einzigen Punkte, die sowohl mit O_2 als mit O_2' assoziiert sind; darum sind es auch die einzigen, welche die Ebenen ihres assoziierten Kegelschnittes durch o_2 senden, und es gilt: die Ebenen ω_2, ω_1 der den Punkten O_1, O_2 von F^2 assoziierten Kegelschnitte umhüllen je eine Fläche zweiten Grades Φ_2^2, Φ_1^2. Beide sind als Ebenengebilde auf die Punkte von F^2 ein-eindeutig bezogen.

Läuft O_1 auf einer Graden von F^2, so geht durch den beliebigen Punkt O_2 von F^2 einer von den assoziierten Kegelschnitten, weil der assoziierte Kegelschnitt von O_2 die Bahn von O_1 einmal schneidet. Andrerseits müssen durch die Schnittpunkte O_2', O_2'' von zweien der Kegelschnitte alle anderen auch gehen, weil deren assoziierte Kegelschnitte ω_1', ω_1'' bereits die ganze Grade enthalten. Läuft also O_1 auf einer Graden der F^2, so durchläuft ω_2 einen Ebenenbüschel. F^2 und Φ_2^2 sowohl, wie F^2 und Φ_1^2 sind also linear reziprok aufeinander bezogen.[1]) Durchläuft O_1 den Kegelschnitt in einer Tangentialebene ω_1' von Φ_1^2, so umhüllt ω_2 einen Kegel zweiten Grades, dessen Spitze notwendig der assoziierte Punkt O_2' des $(\omega_1' F^2)$ ist. Φ_1^2 und Φ_2^2 sind also der F^2 in ein und derselben räumlichen Korrelation in dem einen und anderen Sinne entsprechend. *Die beiden einem Punkte $O_1 \equiv O_2'$ der F^2 assoziierten Kegelschnitte werden von seinen beiden Polarebenen ω_2, ω_1' in einer räumlichen Korrelation eingeschnitten.*

Jedem der beiden Schnittpunkte von A_1A_2 mit F^2 ist, wie die in (**12**) angegebene Konstruktion der drei Punkte lehrt, der Kegelschnitt in seiner Verbindungsebene mit B_1B_2 assoziiert; die Bündelkorrelationen sind durchweg axiale der speziellen Art. Analoges gilt von den Schnittpunkten (B_1B_2, F^2). Das Hauptvierseit der Korrelation hat daher die

1) v. Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage S. 6.

Digitized by Google

Punkte $(A_1A_2,\ F^2)$ und $(B_1B_2,\ F^2)$ zu Ecken und $A_1A_2,\ B_1B_2$ zu Diagonalen.

Der Ort der in ihren beiden assoziierten Kegelschnitten liegenden Punkte ist die Schnittkurve R_4^4 der F^2 mit der Punktkernfläche der Korrelation. Da korrelative Bündel mit zusammengefallenen Scheiteln keine allgemeine F^2 erzeugen können, so müssen zwei in einem Punkte dieser R_4^4 zusammengefallene assoziierte Punkte durch eine spezielle axiale Korrelation verbunden sein; die Achse selbst muß A_1A_2 und B_1B_2 treffen und zugleich die F^2 in jenem Punkte berühren. Der Ort der sich selbst assoziierten Punkte ist also zugleich der Ort der Berührungspunkte derjenigen Tangenten der F^2, die A_1A_2 und B_1B_2 treffen, und läßt sich auch von dieser Eigenschaft her als R_4^4 nachweisen.

14. Die Frage, ob es auch jetzt noch in ausgezeichneter Weise assoziierte Punkte $O_1,\ O_2$ gibt, so daß alle ∞^1 Bündelkorrelationen, welche die F^2 erzeugen, auch $A_1;\ A_2$ und $B_1;\ B_2$ zu konjugiierten Punkten haben, ist identisch mit der Frage, ob es windschiefe Vierseite gibt, deren Ecken auf F^2 liegen, und von denen zwei sich schneidende Seiten durch A_1 und A_2, die beiden anderen durch B_1 und B_2 gehen. Nun gibt es nach **1** in jeder Regelschar von F^2 zwei Paare von Graden $g_1,\ g_2;\ g_1',\ g_2';\ l_1,\ l_2;\ l_1',\ l_2'$, deren die andre Schar erzeugende projektive Ebenenbüschel $A_1;A_2$ und $B_1;B_2$ zu konjugierten Punkten haben.

Nehme ich die Punkte g_1l_1 als O_1, g_2l_2 als O_2, so schneiden sich die Ebenen $g_1A_1,\ g_2A_2;\ l_1A_1,\ l_2A_2$ je in einer Graden von F^2 und darum die Graden $O_1A_1,\ O_2A_2$ in einem Punkte von F^2. Dasselbe gilt von $O_1B_1,\ O_2B_2$. Aus den vier Gradenpaaren kann ich vier Punktepaare dieser Art konstruieren, und auf andre Weise können solche windschiefen Vierecke nicht zustande kommen. Also: *Es gibt vier Paare in ausgezeichneter Weise assoziierter Punkte.*

Jeder Punkt O_1 von g_1 ist mit jedem O_2 von g_2 assoziiert, denn ich kann beide durch axiale Bündelkorrelation verbinden, deren projektive Ebenenbüschel $A_1;\ A_2$ und $B_1;\ B_2$ zu konjugierten Punkten haben. Darum gilt: Φ_1^2 und F^2 haben das windschiefe Vierseit $g_1,\ l_1,\ g_1',\ l_1'$, Φ_2^2 und F^2 das windschiefe Vierseit $g_2,\ l_2,\ g_2',\ l_2'$ gemein.

15. Jedem Punkte der F^2 sind die Schnittpunkte seiner beiden assoziierten Kegelschnitte involutorisch assoziiert. Der eine von beiden ist der zweite Schnittpunkt der von dem Punkte kommenden Treffgraden von A_1A_2 und B_1B_2 mit F^2; er hat kein Interesse. Der andere aber ist ihm durch allgemeine Bündelkorrelationen verbunden, welchen Räumen ich die Punkte auch zuteilen mag. Läuft O auf einer Graden o der F^2, so beschreiben die ihm zugehörigen doppeltkonjugierten Wechselstrahlen in der Korrelation eine Regelschar. Dieselbe

Digitized by Google

schneidet in F^2 außer der R^3, welche auch von der Regelschar $[o, A_1A_2, B_1B_2]$ neben o noch in F^2 eingeschnitten wird, noch eine Grade ein, die derselben Schar wie o angehört. In der *eindeutigen Verwandtschaft involutorisch assoziierter Punkte* auf F^2 geht also jede Regelschar durch eine Strahleninvolution in sich selbst über. Daraus können wir schließen, daß diese Verwandtschaft ein Ausschnitt einer *involutorischen räumlichen Kollineation* ist, welche F^2 in sich selbst überführt. Eine Homologie kann es nicht sein, weil in ihr die Regelscharen einer in sich selbst übergeführten F^2 in einander übergehen. Also muß es eine *windschiefe Involution* sein. Die Achsen der Involution sind ein Paar polare Graden der F^2.[1])

§ 3.

16. *Neben F^2 seien drei Paare konjugierter Punkte gegeben*

$$[A_1;\ A_2,\ B_1;\ B_2,\ C_1;\ C_2] = \mu^3.$$

Bezüglich $A_1; A_2, B_1; B_2$ und bezüglich $A_1; A_2, C_1; C_2$ ist einem beliebigen Punkte O_1 je ein Kegelschnitt assoziiert. Beide Kegelschnitte haben zwei Punkte gemein O_2, O_2'. Wofern $A_1; A_2$ und F^2 die Bündelkorrelation zwischen O_1 und einem dieser Punkte eindeutig festlegen, sind die Punkte auch bezüglich $A_1; A_2, B_1; B_2, C_1; C_2$ assoziiert. Einer der beiden Punkte ist der zu O_1 bezüglich $A_1; A_2$ ausgezeichnet assoziierte Punkt, denn dieser gehört beiden Kegelschnitten an; von ihm gilt das nicht. Der andere aber erlaubt den Schluß: *Jedem Punkte O_1 ist eindeutig ein O_2 assoziiert und umgekehrt.*

Läuft O_1 auf einer Graden der F^2, so umhüllen die Ebenen seiner assoziierten Kegelschnitte bezüglich $A_1; A_2, B_1; B_2$ und $A_1; A_2, C_1; C_2$ projektive Ebenenbüschel, ihr Erzeugnis ist eine Regelschar. Dieselbe schneidet F^2 erstens in der Graden, die von den zu O_1 bezüglich $A_1; A_2$ ausgezeichnet assoziierten Punkten durchlaufen wird, und zweitens in einer R^3, welche diese Grade und darum auch die ursprüngliche zur Doppelsekante hat. Läuft O_1 auf einem Kegelschnitt, so beschreiben die beiden assoziierten Ebenen projektiv zwei Kegel zweiter Klasse, die Schnittgraden entsprechender Ebenen beschreiben eine Regelfläche vierten Grades. Dieselbe schneidet F^2 außer in dem Kegelschnitt der zu den Punkten O_1 bezüglich $A_1; A_2$ ausgezeichnet assoziierten Punkte noch in einer R^6, die die Graden jeder der beiden Scharen auf F^2 zu dreifachen Sekanten hat. Ich kann sagen: *Die ein-eindeutige Beziehung assoziierter Punkte auf F^2 ist dritten Grades in beiderlei Sinne.*

Symbolisch kann ich schreiben: $p_1^2\mu^3 = 2,\ p_2^2\mu^3 = 2,\ p_1p_2\mu^3 = 6.$

1) Vgl. Sturm, Math. Ann. **26**, 465, Abschnitt 12.

Digitized by Google

17. Ist O_1 ein Punkt von F^2, so ist sein assoziierter Punkt der Schnittpunkt der Ebenen, die ihm in den durch $A_1; A_2, B_1; B_2$, durch $B_1; B_2, C_1; C_2$ und durch $C_1; C_2, A_1; A_2$ festgelegten räumlichen Korrelationen entsprechen. Ordne ich jedem Punkte des Raumes Σ_1 den Schnittpunkt der drei ihm in diesen Korrelationen entsprechenden Ebenen zu, so entsteht eine ein-eindeutige und in *beiderlei Sinne kubische Verwandtschaft.*[1]) Die ein-eindeutige Beziehung assoziierter Punkte auf F^2 ist ein Teil von dieser. Diese Verwandtschaft hat in jedem Raume eine Fundamentalkurve sechster Ordnung bestehend aus Punkten, deren drei entsprechende Ebenen sich in einer Graden schneiden. Die drei entsprechenden Ebenen eines Punktes O_1 von F^2 bilden ein Dreikant, dessen Spitze der assoziierte Punkt O_2 ist. Die weiteren Schnittpunkte der Kanten mit F^2 sind die zu O_1 bezüglich $A_1; A_2$ bzw. $B_1; B_2$ und $C_1; C_2$ ausgezeichnet assoziierten Punkte O_2^A, O_2^B, O_2^C. Schneiden sich die drei zu O_1 gehörigen Ebenen in einer Graden, so müssen entweder O_2^A, O_2^B, O_2^C alle drei zusammengefallen sein — das kommt nicht vor, weil nach **14.** schon je zwei von ihnen nur für vier Punkte O_1 zusammenfallen — oder es müßten zwei zusammenfallen, z. B. O_2^B, O_2^C, und der dritte auch allen drei Ebenen angehören — das kann nicht sein, denn in den vier Fällen, wo O_2^B und O_2^C zusammenfallen, liegt der ganz unabhängig von $B_1; B_2$, $C_1; C_2$ bestimmte Punkt O_2^A im allgemeinen nicht auf dem durch $B_1; B_2$, $C_1; C_2$ bestimmten Kegelschnitt —, oder endlich — das ist die einzige bleibende Möglichkeit, — die drei Punkte liegen getrennt von einander, und, weil jeder zweien der Ebenen angehört und alle eine Grade gemein haben, so sind alle drei Ebenen identisch. Also: Jedem Fundamentalpunkt in Σ_1, der auf F^2 liegt, entspricht in der kubischen Verwandtschaft eine Ebene. Die den Graden in Σ_2 entsprechenden R^3 gehen notwendig durch diese Punkte. Nun soll in der kubischen Verwandschaft die F^2 in sich selbst übergehen. Dazu muß sich von der ihr eigentlich entsprechenden Fläche sechster Ordnung eine Fläche vierter Ordnung abspalten, und das kann nur dadurch geschehen, daß die F^2 in jedem Raume vier Punkte enthält, denen eine ganze Ebene entspricht; denn Hauptpunkte anderer Art kann es auf ihr nicht geben. Es gibt also in jedem der beiden Räume vier auf F^2 gelegene Punkte, denen in allen drei Korrelationen dieselbe Ebene polar ist. Da die Korrelationen trotzdem nicht identisch sein sollen, so müssen diese vier Ebenen die Seitenflächen des Tetraeders der ausgezeichneten vier Punkte im anderen Raume bilden. Die drei Korrelationen haben zwei polare Tetraeder gemeinsam, welche

1) Sturm, Math. Ann. **19**, 461, Abschnitt 23.

Digitized by Google

beide der F^2 eingeschrieben sind. Die sechs Kanten dieser Tetraeder bilden die Fundamental-R^6 der kubischen Verwandtschaft in dem einen und anderen Raume.[1])

Für die Beziehung assoziierter Punkte auf F^2 folgt: *Es gibt auf F^2 in jedem Raume vier Punkte, denen ein ganzer Kegelschnitt assoziiert ist; diese vier Kegelschnitte schneiden sich zu drei in den analogen vier Punkten des anderen Raumes.*

18. *Axiale Korrelationen*, deren Achsen der F^2 angehören, sind nicht mehr möglich. Die Achsen der speziellen axialen Korrelationen erfüllen die Regelschar, welche sich auf A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 stützt.

Die Schnittpunkte einer dieser Graden mit F^2 sind involutorisch assoziiert. Außerdem gibt es *zwei Paare involutorisch assoziierter Punkte.* Denn die beiden windschiefen Involutionen involutorisch assoziierter Punkte, die durch $A_1; A_2, B_1; B_2$ und $A_1; A_2, C_1; C_2$ bestimmt werden und beide F^2 in sich selbst überführen, haben, wofern die beiden Achsenpaare nicht einer Regelschar angehören, zwei Punktepaare auf F^2 gemein.

Ich will hier noch einen Satz aussprechen, dessen Beweis ich der Kürze halber unterdrücke: Alle Bündel-Korrelationen haben nicht nur die Projektivitäten konjugierter Punkte auf den Geraden A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, sondern auch die auf allen Strahlen der durch diese bestimmten Regelschar gemein.

§ 4.

19. *Neben F^2 seien vier Paare konjugierter Punkte gegeben:*

$$[A_1; A_2, B_1; B_2, C_1; C_2, D_1; D_2] = \mu^4.$$

Den Punkten O_1 eines Kegelschnitts sind bezüglich $A_1; A_2$, $B_1; B_2$, $C_1; C_2$ eindeutig die Punkte einer unikursalen R^6 assoziiert (**16**). Bezüglich $A_1; A_2$, $D_1; D_2$ gehören ihnen Kegelschnitte zu, deren Ebenen einen Kegel zweiten Grades umhüllen (**18**). Lasse ich auf der R^6 zwei Punkte entsprechend sein, welche bezüglich $A_1; A_2$, $B_1; B_2$, $C_1; C_2$ und $A_1; A_2$, $D_1; D_2$ einem und demselben Punkte O_1 des gegebenen Kegelschnitts assoziiert sind, so ist das eine Verwandtschaft [2, 6]. In ihren acht Koinzidenzelementen kann ich auf assoziierte Punkte bezüglich aller vier Paare konjugierter Punkte schließen, wofern $A_1; A_2$ mit F^2 zusammen die Bündel-Korrelation eindeutig festlegen, d. h. wofern der Punkt dem zugehörigen O_1 nicht bezüglich $A_1; A_2$ ausgezeichnet assoziiert ist. Sehen wir zu, wie oft das vorkommt: Die den Punkten O_1 bezüglich $A_1; A_2$ ausgezeichnet assoziierten Punkte erfüllen, wie diese,

1) Noether, Math. Ann. **3**, 566 erwähnt diese Gestalt der kubischen Verwandtschaft.

Digitized by Google

einen Kegelschnitt (**11**). Auf diesem Kegelschnitt will ich jedem Punkte X in dem einen Sinne die beiden Punkte entsprechen lassen, welche bezüglich $B_1; B_2$, $C_1; C_2$ demjenigen Punkte O_1 assoziiert sind, dem der X bezüglich $A_1; A_2$ ausgezeichnet assoziiert ist. Man sieht, daß so eine Verwandtschaft [2, 2] mit vier Koinzidenzpunkten entsteht. Diese Punkte sind bezüglich $A_1; A_2, B_1; B_2, C_1; C_2$ und $A_1; A_2, D_1; D_2$ ein und denselben Punkten O_1 des ursprünglichen Kegelschnitts assoziiert, und $A_1; A_2$ legt die Bündel-Korrelation nicht fest. Sie sind unter den oben gefundenen acht Punkten enthalten. Die übrigen vier erlauben den Schluß, daß es auf jedem Kegelschnitt der F^2 vier Punkte O_1 und ebenso vier Punkte O_2 gibt, welche bezüglich aller vier Paare konjugierter Punkte einen assoziierten haben.

Es gibt in jedem Raume eine Raumkurve vierter Ordnung R_1^4 und R_2^4 von Punkten, welche einen assoziierten besitzen.

Symbolisch geschrieben gelten die Gleichungen:

$$p_1\mu^4 = 4, \quad p_2\mu^4 = 4.$$

20. Lasse ich nicht wie eben O_1 auf einem Kegelschnitt, sondern auf einer Graden der F^2 laufen, so finde ich, daß es zwei Lagen gibt, in denen O_1 einen assoziierten hat, gleichgültig, welcher Schar die Grade angehört. *Daraus geht hervor, daß die beiden R^4 erster Spezies sind.*

Einige Punkte der R^4 lassen sich, wie folgt, nachweisen: A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2 haben zwei Treffgrade. Sie sind als Achsen spezieller axialer Bündel-Korrelationen brauchbar, darum liegen ihre vier Schnittpunkte mit F^2 in beiden R^4.

Bezüglich dreier Paare konjugierter Punkte gibt es vier Punkte O_1, denen ein ganzer Kegelschnitt assoziiert ist, z. B. $A_1; A_2, B_1; B_2, C_1; C_2$. Denselben Punkten ist bezüglich $A_1; A_2, D_1; D_2$ auch ein Kegelschnitt assoziiert, der den ersten in zwei Punkten schneidet. Einer davon ist dem O_1 bezüglich $A_1; A_2$ ausgezeichnet assoziiert und kommt hier nicht in Betracht, der andere aber ist dem O_2 bezüglich aller vier Punktepaare $A_1; A_2, \cdots, D_1; D_2$ assoziiert. So sind wieder vier Punkte jeder R^4 erhalten usw.

Es gilt der hier nicht bewiesene Satz: Alle ∞^1 Bündel-Korrelationen haben ∞^3 Paare konjugierter Punkte gemein, welche eine räumliche kubische Verwandtschaft bilden. Sie erfüllen die Projektivitäten auf den Strahlen des durch die gegebenen vier Strahlen bestimmten Strahlennetzes.

§ 5.

21. *Gegeben seien neben F^2 fünf Paare konjugierter Punkte*

$$[A_1; A_2, B_1; B_2, C_1; C_2, D_1; D_2, E_1; E_2] = \mu^5.$$

Digitized by Google

Bezüglich der Paare $A_1; A_2, \cdots, D_1; D_2$ erfüllen die Punkte O_1, die einen assoziierten haben, eine R^4, desgleichen bezüglich der Paare $A_1; A_2$, $B_1; B_2$, $C_1; C_2$, $E_1; E_2$. Beide R^4 *haben*, da sie erster Spezies sind, acht Punkte gemeinsam. Schon bei drei Punktepaaren $A_1; A_2$, $B_1; B_2$, $C_1; C_2$ ist jedem Punkte O_1 i. a. *nur ein* Punkt assoziiert, und nur vier Punkte gibt es, denen ein ganzer Kegelschnitt assoziiert ist. Da beide R^4 durch diese vier Punkte gehen, so sind sie unter den acht Schnittpunkten vorhanden. Ihre assoziierten Punkte bezüglich des einen und andern Systemes von vier Punktepaaren fallen nicht zusammen. Dagegen ist jedem der anderen vier Punkte in beiden Systemen derselbe assoziiert, und dieser ist ihm dann auch bezüglich aller fünf Paare konjugierter Punkte assoziiert.

Es gibt vier Paare assoziierter Punkte auf F^2.

Symbolisch schreibt sich dieser Satz: $\mu^5 = 4$.

Es gilt der Satz, der hier wieder unbewiesen bleiben soll: Die vier Bündel-Korrelationen haben nicht nur die Projektivität konjugierter Punkte auf den Verbindungsgraden der fünf gegebenen Paare, sondern auf allen Strahlen des durch diese bestimmten linearen Komplexes gemein.

§ 6.

22. Wenden wir uns zu doppelten Punktbedingungen. An Stelle zweier getrennter Paare von konjugierten Punkten trete ein Punkt A_1 und zwei ihm konjugierte oder eine ihm konjugierte Grade $\mathfrak{a}_2$:

$$[A_1; \mathfrak{a}_2] = \bar{\mu}_1.$$

Auf allen Strahlen des Strahlenbüschels von A_1 nach $\mathfrak{a}_2$ ist damit die Projektivität konjugierter Punkte gegeben. Alle diese Projektivitäten zusammen bilden die zentrale quadratische ebene Verwandtschaft mit $A_1 \equiv A_2'$ als Zentrum (**1**). In dieser entspricht dem A_2' auch eine Grade $\mathfrak{a}_1'$. Sie ist dem $A_1 \equiv A_2'$ im anderen Sinne konjugiert. Daraus folgt: *Zwischen den Bedingungen $\bar{\mu}_1$ und $\bar{\mu}_2$ brauchen wir nicht zu unterscheiden, weil eine stets mit der anderen verbunden auftritt* $(\bar{\mu})$.

Zerlegt man die Bedingung $A_1; \mathfrak{a}_2$ in zwei Paare konjugierter Punkte $A_1; A_2'$, $A_1; A_2''$, wo A_2', A_2'' auf $\mathfrak{a}_2$ liegen, so kann man ohne prinzipiellen Unterschied in den Betrachtungen des vorigen Paragraphen zwei Paare konjugierter Punkte durch $A_1; \mathfrak{a}_2$ ersetzen. Die zahlenmäßigen Resultate bleiben dieselben. Ich will nur die erste Lage ausführen.

Es sei außer F^2 nur $A_1; \mathfrak{a}_2$ gegeben.

Ist O_1 ein beliebiger Punkt der F^2, so entspricht dem Strahle $O_1 A_1$, wie O_2 auch liegen mag, die Ebene $O_2 \mathfrak{a}_2$. Diese muß durch den zweiten Schnittpunkt von $O_1 A_1$ mit F^2 gehen und ist dadurch fest-

Digitized by Google

gelegt. Also dem Punkte O_1 sind alle Punkte des Kegelschnitts assoziiert, der in dieser Ebene liegt. Wie in (**12**) und (**13**) ist auch hier jedem Punkte in jedem der beiden Sinne ein Kegelschnitt assoziiert. Auch hier ist die Beziehung der Punkte der F^2 zu den Ebenen ihrer assoziierten Kegelschnitte ein Teil einer räumlichen Korrelation, aber einer axialen, deren Achsen a_2 und a_1' sind. Diese einfachere Gestalt der Korrelation macht die weiteren Fragen durchsichtiger.

Die Symbole μ^2 und $\bar{\mu}$ sind äquivalent.

23. Dagegen bietet Neues die dreifache Punktbedingung $[A_1; \alpha_2] = \bar{\mu}_1$.

Ist $A_1; \alpha_2$ gegeben, also die Ebene, welche, wie O_1 auch liegen mag, dem Strahl $O_1 A_1$ entsprechen soll, so ist auf allen Strahlen durch A_1 die Projektivität konjugierter Punkte bestimmt. Alle diese Projektivitäten machen eine zentrale quadratische Verwandtschaft mit dem Zentrum $A_1 \equiv A_2'$ aus. Dem $A_1 \equiv A_2'$ enspricht im anderen Sinne auch eine Ebene α_2' (**1**). Sie muß die dem Strahle $O_2 A_2'$ entsprechende Ebene sein. Darum gilt:

Die Bedingungen $\bar{\mu}_1$ und $\bar{\mu}_2$ treten immer zusammen auf, ich brauche sie nicht zu unterscheiden (μ). Sind F^2 und $A_1 \equiv A_2'$; α_2, α_1' gegeben, so ist nicht wie bei F^2 und μ^2 jedem Punkte O_1 ein O_2 assoziiert, sondern ein beliebiger Punkt hat keinen assoziierten, nur den Punkten O_1 von $(\alpha_1' F^2)$ sind alle Punkte des Kegelschnitts $(\alpha_2 F^2)$ assoziiert und umgekehrt. Das heißt symbolisch $p_1^2 \mu = 0$, $p_1 p_2 \bar{\mu} = 4$.

Tritt noch ein Paar $B_1; B_2$ hinzu, so gilt:

Ist O_1 ein beliebiger Punkt von $(\alpha_1' F^2)$, so muß die dem Strahle $O_1 B_1$ entsprechende Ebene durch folgende Punkte gehen: den zweiten Schnittpunkt von $O_1 B_2$ mit F^2, den Schnittpunkt der Ebene $O_1 B_1 A_1$ mit dem Kegelschnitt $(\alpha_1 F^2)$, welcher von dem zweiten Schnittpunkt von $O_1 A_1$ mit F^2 verschieden ist, und endlich durch B_2. Diese Ebene ist also bestimmt und schneidet in $(\alpha_2 F^2)$ außer dem schon genannten Punkte noch den einzig möglichen Punkt O_2 ein. Nach (**4**) ist O_1 mit diesem Punkte auch wirklich durch eine Bündel-Korrelation verbunden, welche die Bedingungen erfüllt. Es gilt daher:

Ein weiteres Paar konjugierter Punkte stellt zwischen den Kegelschnitten $(\alpha_1' F^2)$ und $(\alpha_2 F^2)$ eine Projektivität von assoziierten Punkten her. Symbolisch kann ich schreiben $p_1 \mu \mu = 2$, $p_2 \bar{\mu} \mu = 2$.

Kommt noch ein zweites Paar konjugierter Punkte $C_1; C_2$ hinzu, so haben die durch $B_1; B_2$ und $C_1; C_2$ bestimmten Projektivitäten zwei Paare gemein. Diese Paare sind, weil $A_1; \alpha_2$ in jedem Falle die Korrelation festlegt, wirklich bezüglich $B_1; B_2$ und $C_1; C_2$ assoziiert. *Also bei $A_1 \equiv A_2'$, α_2, α_1', $B_1; B_2$, $C_1; C_2$ gibt es zwei Paare assoziierter Punkte,*

Digitized by Google

oder symbolisch ausgedrückt $\bar{\mu}\mu^2 = 2$. Da μ^2 mit $\bar{\mu}$ gleichwertig ist, folgt auch $\mu\bar{\mu} = 2$.

Von axialer Korrelation ist die Art, die ihre Achsen auf F^2 gelegen hat, bei gegebenem A_1; α_2 überhaupt nicht möglich, dagegen kann jede Grade durch A_1, welche den Kegelschnitt $(\alpha_2 F^2)$ und dann auch $(\alpha_1' F^2)$ schneidet, Achse einer speziellen axialen Korrelation sein.

(Schluß folgt.)

The Potential Equation and $\wp$-function Curves.

Von F. H. Safford in Philadelphia.

In an article[1]) by Dr. Wangerin, the opening paragraph contains, in effect, the following.

Ist ein Körper gegeben, für dessen inneren oder äußeren Raum die Potentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \tag{1}$$

stattfindet, so suche man ein System krummliniger Koordinaten von der Beschaffenheit, daß die den Körper begrenzende Fläche in einer der drei sich rechtwinklig schneidenden Flächenscharen enthalten ist.

He proceeded to consider the special problem of finding for what surfaces of revolution a value of V exists in the form

$$V = \lambda \cdot R \cdot R_1 \cdot R_2, \tag{2}$$

in which R, R_1 and R_2 are functions, respectively, of curvilinear coördinates t, u, θ and contain also two arbitrary parameters. He found that

$$x + ir = F(t + iu), \qquad x - ir = F_1(t - iu), \tag{3}$$

in which $r = \sqrt{y^2 + z^2}$, while the form of F and F_1 (conjugate functions) was to be determined. He derived for λ the value $\frac{1}{\sqrt{r}}$ and then showed that the possibility of obtaining V in the form of (2) depended upon being able to find a value of F such that

$$\frac{F''(t+iu)\cdot F_1'(t-iu)}{[F'(t+iu) - F_1'(t-iu)]^2} = H(t) + H_1(u). \tag{4}$$

1) Berliner Monatsberichte 21, Feb. 1878.

Digitized by Google

His conclusion was that

$$F(t+iu)=\frac{a+b\cdot \mathrm{sn}(t+iu)}{c+d\cdot \mathrm{sn}(t+iu)} \tag{5}$$

in which sn may be replaced by cn or tn and in which a, b, c, d are certain constant coefficients.

Dr. Haentzschel[1]) treated the same special problem in a somewhat similar manner, but *assuming* λ to have the value above, and gave some of his results in the form

$$F(t+iu)=\frac{a+b\cdot \wp(t+iu)}{c+d\cdot \wp(t+iu)}, \tag{6}$$

the values of a, b, c, d being indicated for several cases.

The purpose of this paper is to show exactly what types of linear transformation of the $\wp$-function are admissible. The similar problem for Wangerin's results (together with a comparison of his work with Haentzschel's) has been published by the writer[2]), but the procedure in the present paper is much more direct and avoids many of the tedious computations of the earlier paper.

For convenience let $\wp(t+iu)$ and $\wp(t-iu)$ be written as P and P_1 respectively, the invariants g_1, g_2 being real. The coefficients of the linear transformation will be taken as complex and as yet undetermined, so that the values of F and F_1 to be considered are

$$F=\frac{\alpha+\beta P}{\gamma+\delta P}, \quad F_1=\frac{\alpha_1+\beta_1 P_1}{\gamma_1+\delta_1 P_1} \quad (\alpha, \alpha_1 \text{ etc. conjugate}). \tag{7}$$

The substitution of (7) in (4) gives the following:

$$\frac{KP'P_1'}{[A+BP+DP_1+EPP_1]^2}=H(t)+H_1(u), \tag{8}$$

in which the abbreviations are

$$\begin{cases} K=-4(\alpha\delta-\beta\gamma)(\alpha_1\delta_1-\beta_1\gamma_1), \\ A=\alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma, \quad D=\alpha\delta_1-\beta_1\gamma, \\ B=\beta\gamma_1-\alpha_1\delta, \quad E=\beta\delta_1-\beta_1\delta. \end{cases} \tag{9}$$

By successive differentiation of (8) with regard to t and u respectively, the second member vanishes. The new first member must also vanish, so that after the derivatives of P and P_1 which it now contains are removed by the aid of the relations between them

$$P'^2=4P^3-g_2P-g_3, \quad \text{etc.} \tag{10}$$

1) Haentzschel, Reduktion der Potentialgleichung, Berlin, 1893.

2) Amer. Journ. of Math. **21**, 1. See also Archiv der Mathematik und Physik. (3) **4**, 57—65 and **10**, 234—237.

Digitized by Google

The coefficients of the separate powers of P and P_1 in the resulting expression must vanish. Thus are the following relations between the constants in (8) obtained:

$$(11)\qquad \begin{cases} A(B-D)=E(B-D)=B^2-D^2=0, \\ 4[AE+B(B+D)]-E^2g_2=0, \\ B(4A+Eg_2)-2E^2g_3=0, \\ 16A^2-E^2g_2^2+16BEg_3=0. \end{cases}$$

Equations (11) lead to four cases, viz.

$$(12)\qquad \begin{cases} 1^0 & A=E=B+D=0, \quad B\neq 0, \\ 2^0,\ 3^0,\ 4^0, & \dfrac{B}{E}=-\varepsilon', \qquad \dfrac{A}{E}=-(\varepsilon'^2+\varepsilon''\varepsilon'''). \end{cases} \qquad \begin{matrix} \varepsilon' = e_1, e_2, e_3. \\ \varepsilon'' = e_2, e_3, e_1. \\ \varepsilon''' = e_3, e_1, e_2. \end{matrix}$$

These are the only cases in which the resolution of the first member of (8) is possible, and the results, which of course are the desired $H(t)$ and $H(u)$ of the same equation, have been given by Haentzschel as follows (omitting a constant factor):

$$(13)\qquad \begin{cases} 1^0 & \wp(2t)-\wp(2iu), \\ 2^0,\ 3^0,\ 4^0, & \dfrac{(\varepsilon'-\varepsilon'')(\varepsilon'-\varepsilon''')}{\wp(2t)-\varepsilon'}-\dfrac{(\varepsilon'-\varepsilon'')(\varepsilon'-\varepsilon''')}{\wp(2iu)-\varepsilon'}. \end{cases}$$

When the condition equations (12) 1^0 are expressed in terms of α, β etc. they yield

$$(14)\qquad \frac{\alpha}{\alpha_1}=\frac{\beta}{\beta_1}=\frac{\gamma}{\gamma_1}=\frac{\delta}{\delta_1},$$

from which it follows that the coefficients in (7) are essentially real, so that the transformation is an inversion with respect to a point on the axis of revolution, leaving that axis unchanged.

Case 2^0 gives

$$(15)\qquad \begin{cases} \alpha\delta_1+\alpha_1\delta-\beta\gamma_1-\beta_1\gamma=0, \\ \beta\gamma_1-\alpha_1\delta=-\varepsilon_1, \qquad \alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma=-(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2\varepsilon_3). \\ \beta\delta_1-\beta_1\delta \end{cases}$$

It may be shown from (15) that ε' must be real, so that cases 2^0, 3^0, 4^0 do not exist unless ε_1, ε_2, ε_3 are respectively real.

The original $\wp$-function curves, obtained from

$$(16)\qquad x+ir=\wp(t+iu),$$

viz.

$$(17)\qquad \Sigma[x^2+r^2-2\varepsilon' x-(\varepsilon'^2+\varepsilon''\varepsilon''')]^2(\varepsilon''-\varepsilon''')/(\lambda-\varepsilon')=0,$$

are to be transformed by the aid of (7) and (15), giving, in abbreviated form,

$$(18)\quad \bar{D}_1 r_1^2(\varepsilon_2-\varepsilon_3)/(\lambda-\varepsilon_1)+[\bar{A}_2(x_1^2+r_1^2)+\bar{B}_2x_1+\bar{C}_2]^2(\varepsilon_3-\varepsilon_1)/(\lambda-\varepsilon_2) \\ +[\bar{A}_3(x_1^2+r_1^2)+\bar{B}_3x_1+\bar{C}_3]^2(\varepsilon_1-\varepsilon_2)/(\lambda-\varepsilon_3)=0.$$

Digitized by Google

It will be noticed that the axis of revolution is an axis of symmetry of these transformed curves and came from a circle of symmetry in (17). Similar results follow in cases 3° and 4°.

The summary of this investigation is that the only allowable coefficients in (7) are those which cause the axis of revolution or the respective circles of symmetry in (17) to change into the axis of revolution. From this fact it follows that the surfaces of revolution corresponding to (17) are of the same degree after the transformation of their meridian curves.

Philadelphia, U. S. A., August 1907.

Über gewisse Transformationen von ebenen Kurven dritter Ordnung.

Von F. KÖLMEL in Baden-Baden.

1. Die Gleichung der Kurve und deren Interpretation.

Die Gleichung einer ebenen Kurve dritter Ordnung kann stets in die Form

$$3y^2z = Ax^3 + 3Bx^2z + 3Cxz^2 + Dz^3$$

gebracht werden, wobei $x = 0$, $z = 0$ ein reeller Wendepunkt, $z = 0$ die Wendetangente in diesem und $y = 0$ die harmonische Polare desselben ist. Bei reell variablen A, B, C, D stellt die Gleichung dann ein vierfach unendliches System von C_3[1]) dar, die einen reellen Wendepunkt, die Tangente in diesem und dessen harmonische Polare gemeinsam haben. Ist $z = 0$ die unendlich ferne Gerade und sind x, y rechtwinklige Koordinaten, so liegt eine divergierende Parabel vor. Ist die Gerade $z = 0$ parallel zur Geraden $x = 0$ im Endlichen, so stellt die Gleichung eine C_3 mit einer reellen Wendeasymptote $z = 0$ dar. Zur Zeichnung der Kurve bei dieser Annahme trägt man auf der y-Achse eine gewöhnliche euklidische Maßskala ab, auf der x-Achse aber eine projektive, so daß dem Schnittpunkte der x-Achse mit der y-Achse die Maßzahl 0, dem Schnittpunkte der x-Achse mit der z-Achse die Maßzahl ∞ entspricht, während der Ort der Zahl 1 noch beliebig gewählt werden kann.

2. Die Transformation zweier solcher Kurven ineinander.

Es seien zwei solche Kurven gegeben durch die Gleichungen:

$$3y_1^2z_1 = Ax_1^3 + 3Bx_1^2z_1 + 3Cx_1z_1^2 + Dz_1^3,$$
$$3y^2z^2 = \mathfrak{A}x^3 + 3\mathfrak{B}x^2z + 3\mathfrak{C}xz^2 + \mathfrak{D}z^3$$

1) C_3 = Kurve dritter Ordnung.

Digitized by Google

oder

$$F(x_1 y_1 z_1) \equiv Ax_1^3 + 3Bx_1^2 z_1 + 3Cx_1 z_1^2 + Dx_1^3 - 3y_1^2 z_1 = 0,$$
$$\mathfrak{F}(xyz) \equiv \mathfrak{A}x^3 + 3\mathfrak{B}x^2 z + 3\mathfrak{C}xz^2 + \mathfrak{D}z^3 - 3y^2 z = 0.$$

Die beiden Aronholdschen Invarianten von F und $\mathfrak{F}$ sind dann bzw.:

$$S = AC - B^2, \quad T = -4(A^2 D - 3ABC + 2B^3),$$
$$\mathfrak{S} = \mathfrak{A}\mathfrak{C} - \mathfrak{B}^2, \quad \mathfrak{T} = -4(\mathfrak{A}^2\mathfrak{D} - 3\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} + 2\mathfrak{B}^3).$$

Bei einer Transformation von F in $\mathfrak{F}$ muß jedenfalls ein Wendepunkt und dessen Tangente und harmonische Polare wieder in einen Wendepunkt mit seiner Tangente und harmonischen Polaren übergehen. Lassen wir den Wendepunkt $x_1 = 0$, $z_1 = 0$ in $x = 0$, $z = 0$ übergehen, so läßt sich die Transformation in der Form schreiben:

$$\sigma x_1 = a_1 x \quad + c_1 z,$$
$$\sigma y_1 = \quad b_2 y,$$
$$\sigma z_1 = \quad c_3 z.$$

Führt man diese Transformation an F aus und vergleicht die erhaltenen Koeffizienten mit den entsprechenden von $\mathfrak{F}$, so erhält man zur Bestimmung der Transformationskoeffizienten folgende Gleichungen:

(1) $$\mathfrak{A} = Aa_1^3,$$

(2) $$\mathfrak{B} = Aa_1^2 c_1 + Ba_1^2 c_3,$$

(3) $$\mathfrak{C} = Aa_1 c_1^2 + 2Ba_1 c_1 c_3 + Ca_1 c_3^2,$$

(4) $$\mathfrak{D} = Ac_1^3 + 3Bc_1^2 c_3 + 3Cc_1 c_3^2 + Dc_3^3,$$

(5) $$1 = b_2^2 c_3.$$

Aus (1) folgt zunächst $a_1 = \varepsilon \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}}{A}}$, wo ε eine dritte Einheitswurzel und $\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}}{A}}$ dann absolut[1]) zu nehmen ist. Aus den Gleichungen (1), (2), (3) leiten wir durch Division mit c_3^3 andere Gleichungen ab. Aus diesen finden wir dann

$$\frac{a_1}{c_3} = \pm\varepsilon \cdot \frac{\mathfrak{A}}{A}\sqrt{\frac{S}{\mathfrak{S}}},$$

woraus sich unter Benutzung des schon gefundenen Wertes für a_1 ergibt

$$c_3 = \pm \sqrt[3]{\frac{A^2}{\mathfrak{A}^2}} \cdot \sqrt{\frac{\mathfrak{S}}{S}},$$

daraus folgt

$$c_1 = \frac{\varepsilon\mathfrak{B} \mp B\sqrt{\frac{\mathfrak{S}}{S}}}{\sqrt[3]{A\mathfrak{A}^2}}, \quad b_2 = \pm \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}}{A}} \cdot \sqrt{\pm\sqrt{\frac{S}{\mathfrak{S}}}}.$$

1) Das einfache Wurzelzeichen $\sqrt{\ }$ ist stets nur absolut zu nehmen.

Digitized by Google

Wir haben also die Transformationsgleichungen:

$$\text{(A.)}\quad \begin{cases} \varrho x_1 = \varepsilon \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}}{A}} \cdot x + \dfrac{\varepsilon\mathfrak{B} \mp B\sqrt{\frac{\mathfrak{S}}{S}}}{\sqrt[3]{A\mathfrak{A}^2}} \cdot z, \\ \varrho y_1 = \pm \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}}{A}} \cdot \sqrt{\pm \sqrt{\frac{S}{\mathfrak{S}}}} \cdot y, \\ \varrho z_1 = \pm \sqrt[3]{\frac{A^2}{\mathfrak{A}^2}} \cdot \sqrt{\frac{\mathfrak{S}}{S}} \cdot z. \end{cases}$$

Wegen der bekannten Relation $\frac{S^3}{T^2} = \frac{\mathfrak{S}^3}{\mathfrak{T}^2}$ kann man auch schreiben:

$$\text{(B.)}\quad \begin{cases} \varrho x_1 = \varepsilon \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}}{A}} \cdot x + \dfrac{\varepsilon\mathfrak{B} - B\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{T}}{T}}}{\sqrt[3]{A\mathfrak{A}^2}} \cdot z, \\ \varrho y_1 = \pm \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}}{A}} \cdot \sqrt{\sqrt[3]{\frac{T}{\mathfrak{T}}}} \cdot y, \\ \varrho z_1 = + \sqrt[3]{\frac{A^2}{\mathfrak{A}^2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{T}}{T}} z. \end{cases}$$

Die Transformationsdeterminante wird:

$$\Delta = \pm \varepsilon^2 \sqrt{\pm \sqrt{\frac{S}{\mathfrak{S}}}}.$$

Das bei y vor $\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}}{A}}$ stehende doppelte Vorzeichen ist von den übrigen Doppelzeichen völlig unabhängig, kann also mit jedem kombiniert werden, während sonst bei den Doppelzeichen je nur die oberen miteinander korrespondieren und ebenso die unteren zusammengehören. Indem man die für a_1, c_1, b_2, c_3 erhaltenen Werte in die Bestimmungsgleichungen (1)—(5) einsetzt, erhält man:

$$(1)\qquad \mathfrak{A} = \mathfrak{A},$$

$$(2)\qquad \mathfrak{B} = \mathfrak{B},$$

$$(3)\qquad \mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{B}^2 + \varepsilon\mathfrak{S}}{\mathfrak{A}},$$

$$(4)\qquad \mathfrak{D} = \frac{4\mathfrak{B}^3 + 12\varepsilon\mathfrak{B}\mathfrak{S} \mp \frac{\mathfrak{S}}{S}\sqrt{\frac{\mathfrak{S}}{S}} \cdot T}{4\mathfrak{A}^2},$$

$$(5)\qquad 1 = 1.$$

Demnach ist die Gleichung der transformierten Kurve zunächst:

$$3y^2z = \mathfrak{A}x^3 + 3\mathfrak{B}x^2z + 3\,\frac{\mathfrak{B}^2 + \varepsilon\mathfrak{S}}{\mathfrak{A}}\,xz^2 + \frac{4\mathfrak{B}^3 + 12\varepsilon\mathfrak{B}\mathfrak{S} \mp \frac{\mathfrak{S}}{S}\sqrt{\frac{\mathfrak{S}}{S}} \cdot T}{4\mathfrak{A}^2}\,z^3.$$

Digitized by Google

3. Diskussion der Transformationen.

1. Aus den Gleichungen (3) und (4) am Ende des vorigen Abschnittes folgt:

(a) $$\mathfrak{S}(1-\varepsilon)=0,$$

(b) $$-\mathfrak{T}+12\mathfrak{B}\mathfrak{S}(1-\varepsilon)=\mp\sqrt{\frac{\mathfrak{S}^3}{S^3}}\cdot T,$$

wenn die transformierte C_3 mit $\mathfrak{F}=0$ identisch sein soll.

Die Gleichung (a) ist erfüllt für $\varepsilon=1$ oder $\mathfrak{S}=S=0$; in beiden Fällen geht die Gleichung (b) über in:

$$\frac{\mathfrak{T}}{T}=\pm\sqrt{\frac{\mathfrak{S}^3}{S^3}},$$

was der bekannten Relation $\frac{S^3}{T^2}=\frac{\mathfrak{S}^3}{\mathfrak{T}^2}$ entspricht. Als besonderer Fall sei erwähnt, daß (b) auch durch $\mathfrak{B}=0$ erfüllt ist, dies führt wegen (a) auf $\mathfrak{A}\mathfrak{C}=0$, wenn $\varepsilon\neq 1$. Diese letztere Bedingung ist erfüllt, wenn entweder α) $\mathfrak{C}=0$, oder β) $\mathfrak{A}=0$.

α) führt auf die Gleichung

$$3y^2z=\mathfrak{A}x^3+\mathfrak{D}z^3.$$

Dies ist ein besonderer Fall der C_3, für welche $S=0$. Die Koordinaten der zwei imaginären Punkte auf der X-Achse sind von der Form $\varepsilon\alpha$ und $\varepsilon^2\alpha$.

β) führt auf die Gleichung

$$3y^2z=3\mathfrak{C}xz^2+\mathfrak{D}z^3.$$

Diese C_3 zerfällt in die Gerade $z=0$ und eine C_2, die diese Gerade in ihrem Schnittpunkte mit der Geraden $y=0$ berührt.

2. Aus der Gleichung

$$\pm\sqrt{\frac{S^3}{\mathfrak{S}^3}}=\frac{T}{\mathfrak{T}}$$

ergibt sich ferner:

a) Sind die Koeffizienten von F reell und die von $\mathfrak{F}$ imaginär, so sind natürlich die Transformationen imaginär.

b) Ist F reell und auch $\mathfrak{S}$, und haben $\mathfrak{S}$ und S gleiche Vorzeichen, so ist auch $\mathfrak{T}$ reell, also auch $\mathfrak{F}$. T und $\mathfrak{T}$ haben gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen, je nachdem man auf der linken Seite $+$ oder $-$ setzt.

c) Ist F und auch $\mathfrak{S}$ reell, aber S und $\mathfrak{S}$ entgegengesetzten Zeichens, so wird $\mathfrak{T}$ und also auch $\mathfrak{F}$ imaginär, außer wenn $\mathfrak{T}=T=0$.

Digitized by Google

d) Ist F reell, und ersetzt man in $\mathfrak{F}$ die $\mathfrak{S}$ durch $\varepsilon\mathfrak{S}$, wobei $\varepsilon = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, so wird $\mathfrak{F}$ imaginär (aber $\mathfrak{T}$ bleibt reell), außer wenn $\mathfrak{S} = S = 0$.

3. Darnach haben wir folgende Hauptfälle unserer Transformationen:

Ia) $\varepsilon = 1$.

$$\varrho x_1 = \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}}{A}}\, x + \frac{\mathfrak{B} - B\sqrt{\frac{\mathfrak{S}}{S}}}{\sqrt[3]{A\mathfrak{A}^2}}\, z = \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}}{A}}\, x + \frac{\mathfrak{B} - B\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{T}}{T}}}{\sqrt[3]{A\mathfrak{A}^2}}\, z,$$

$$\varrho y_1 = \pm \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}}{A}} \cdot \sqrt{\sqrt{\frac{S}{\mathfrak{S}}}}\, y = \pm \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}}{A}} \cdot \sqrt{\sqrt[3]{\frac{T}{\mathfrak{T}}}}\, y,$$

$$\varrho z_1 = \sqrt[3]{\frac{A^2}{\mathfrak{A}^2}} \cdot \sqrt{\frac{\mathfrak{S}}{S}} \cdot z = \sqrt[3]{\frac{A^2}{\mathfrak{A}^2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{T}}{T}}\, z.$$

Ib) $\varepsilon = 1$.

$$\varrho x_1 = \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}}{A}}\, x + \frac{\mathfrak{B} + B\sqrt{\frac{\mathfrak{S}}{S}}}{\sqrt[3]{A\mathfrak{A}^2}}\, z = \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}}{A}}\, x + \frac{\mathfrak{B} - B\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{T}}{T}}}{\sqrt[3]{A\mathfrak{A}^2}}\, z,$$

$$\varrho y_1 = \pm \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}}{A}} \cdot i\sqrt{\sqrt{\frac{S}{\mathfrak{S}}}} \cdot y = \pm \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}}{A}} \cdot \sqrt{\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{T}}{T}}} \cdot y,$$

$$\varrho z_1 = -\sqrt[3]{\frac{A^2}{\mathfrak{A}^2}} \cdot \sqrt{\frac{\mathfrak{S}}{S}} \cdot z = \sqrt[3]{\frac{A^2}{\mathfrak{A}^2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{T}}{T}} \cdot z.$$

II) $\varepsilon = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

$$\varrho x_1 = \varepsilon \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}}{A}}\, x + \frac{\varepsilon\mathfrak{B} - B\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{T}}{T}}}{\sqrt[3]{A\mathfrak{A}^2}} \cdot z,$$

$$\varrho y_1 = \pm \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}}{A}} \cdot \sqrt{\sqrt[3]{\frac{T}{\mathfrak{T}}}} \cdot y,$$

$$\varrho z_1 = \sqrt[3]{\frac{A^2}{\mathfrak{A}^2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{T}}{T}} \cdot z.$$

Sind alle Koeffizienten von F und $\mathfrak{F}$ reell vorausgesetzt, so folgt:

α) Sind S und $\mathfrak{S}$ von gleichen Zeichen, so sind alle Transformationen Ia) reell und führen jede reelle C_3 wieder in eine reelle über, wobei die entsprechenden Invarianten gleiche Zeichen haben. In Ib) ist die y-Transformation imaginär, aber jede reelle C_3 geht in eine reelle über, wobei T das Zeichen wechselt.

Digitized by Google

Für $T = \mathfrak{T} = 0$ geht jede harmonische C_3 in eine derselben Art (d. h. mit gleichen Vorzeichen in S und $\mathfrak{S}$) über.

β) Sind S und $\mathfrak{S}$ von verschiedenen Vorzeichen, so sind die Transformationen I a) und I b) imaginär und führen eine gewöhnliche reelle C_3 nicht in eine reelle über.

Für $T = \mathfrak{T} = 0$ dagegen geht jede reelle harmonische C_3 in eine reelle der anderen Art über (d. h. mit anderen Zeichen in S und $\mathfrak{S}$).

γ) Ist $S = \mathfrak{S} = 0$, so fallen die Transformationen I a) und I b) zusammen, wie man aus der Form B) sieht. Jede reelle anharmonische C_3 geht in eine reelle über. Wechselt T das Zeichen, so ist die y-Transformation wieder imaginär.

δ) Die Transformationen II) führen eine reelle C_3, für die S und $\mathfrak{S}$ nicht verschwinden, nicht in eine reelle über.

Für $S = \mathfrak{S} = 0$ dagegen geht jede reelle äquianharmonische C_3 durch II) wieder in eine solche über. Haben T und $\mathfrak{T}$ gleiche Zeichen, so wird die y-Transformation reell, im anderen Falle imaginär.

Durch eine vermehrte Anzahl von Transformationen sind also unter den reellen C_3 die harmonischen und äquianharmonischen C_3 ausgezeichnet, wie sie auch durch das Verschwinden einer Invariante ausgezeichnet sind. Daher treten sie auch bei der Einteilung der C_3 als ausgezeichnete Übergangsfälle auf, sowohl wenn man nach rein invariantentheoretischen Gesichtspunkten[1]) verfährt, als auch wenn man die Anzahl der möglichen Transformationen[2]) als ausschlaggebend ansieht.

Baden 1906, September.

Über die Lage der Hauptträgheitsachsen von Punktsystemen in der Ebene.

Von H. W. E. Jung in Marburg.

Es seien n Punkte in einer Ebene gegeben. Ihre Koordinaten inbezug auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem seien x_α, y_α ($\alpha = 1, \ldots n$). Wir setzen $z_\alpha = x_\alpha + i y_\alpha$. Es sei dann $f(z)$ die Gleichung n-ten Grades, deren Wurzeln $z_1, z_2, \ldots z_n$ sind. Die Punktsysteme, die

1) Vgl. meine Arbeit: Ableitung der verschiedenen Formen der ebenen Kurven dritter Ordnung und Klassifikation derselben. I. 1894 Ettenheim. III. 1904 Baden-Baden.

2) Vgl. H. Wiener. Die Einteilung der ebenen Kurven und Kegel dritter Ordnung. Halle 1901.

Digitized by Google

aus den Wurzelpunkten der Ableitungen $f'(z)$, $f''(z)$, ... von $f(z)$ bestehen, wollen wir die abgeleiteten Punktsysteme des ursprünglichen nennen.

Das $(n-1)$te abgeleitete Punktsystem besteht nur aus einem Punkte, dem Wurzelpunkte von $f^{(n-1)}(z)$. Dieser Punkt hat die Eigenschaft, daß er der Schwerpunkt sowohl des gegebenen, sowie auch eines jeden abgeleiteten Punktsystems ist.[1])

Das $(n-2)$te abgeleitete Punktsystem besteht aus zwei Punkten, nämlich den beiden Wurzelpunkten von $f^{(n-2)}(z)$. Die Verbindungslinie dieser beiden Punkte und die Mittelsenkrechte ihrer Verbindungsstrecke sind die Hauptträgheitsachsen sowohl des gegebenen Punktsystems als auch jedes abgeleiteten.

Der Beweis ist einfach. Es ist nämlich: $f^{(n-2)}(z) =$

$$\frac{n!}{2} z^2 - (n-1)!\,(z_1 + z_2 + \cdots z_n)\, z + (n-2)!\,(z_1 z_2 + z_1 z_3 + \cdots z_{n-1} z_n)$$

Als Bedingung dafür, daß die Wurzelpunkte dieser Gleichung so liegen, daß die Koordinatenachsen mit der Verbindungslinie der beiden Wurzelpunkte und der Mittelsenkrechten ihrer Verbindungsstrecke identisch sind, ergibt sich daraus

$$\sum z_\alpha = 0, \quad \sum_{\alpha \neq \beta} z_\alpha z_\beta \text{ reell.}$$

Das aber gibt umgeformt

$$\sum x_\alpha = 0, \quad \sum y_\alpha = 0, \quad \sum x_\alpha y_\alpha = 0,$$

also die Bedingungen dafür, daß die Koordinatenachsen die Hauptträgheitsachsen sind.

Die Wurzelpunkte von $f^{(n-2)}(z)$ liegen immer auf derselben Trägheitsachse, auf der die Brennpunkte der Trägheitsellipse liegen, und man kann für $n > 2$ durch passende Wahl der Einheit erreichen, daß sie mit ihnen zusammenfallen, natürlich vorausgesetzt, daß die gegebenen Punkte nicht in einer geraden Linie liegen.

1) Vgl. Isenkrahe, dieses Archiv (3) 3, 257

Digitized by Google

Rezensionen.

James Joseph Sylvester. The Collected Mathematical Papers. Cambridge. At the University Press. Vol. I (1837—1853). 1904. XII u. 650 S. Vol. II (1854—1873). 1908. With two plates. XVI u. 731 S.

Referent steht einer Besprechung der vorliegenden Sammlung insofern nicht völlig frei gegenüber, als er in einer Würdigung der wissenschaftlichen Arbeit Sylvesters (Math. Ann. 50) die Äußerung tat: „Wie die Abhandlungen vorliegen, unfähig ein klares gegenständliches Bild zu geben, kann ihre Lektüre im ganzen heute eigentlich niemandem mehr zugemutet werden.“ Indessen kann ja die Herausgabe noch von manchem freudig begrüßt werden, der darauf verzichtet, jemals eine Abhandlung von Sylvester, oder gar eine Reihe solcher, von Anfang zu Ende zu lesen. Unsere eben genannte Würdigung hat ausgesprochen, was die Geschichte der Wissenschaft bezeugt: daß in der formlosen Produktion Sylvesters eine der Quellen der Wissenschaft von den algebraisch-kombinatorischen Formprozessen und manche Keime zu bedeutenden Leistungen in den Theorien der Elimination, der quadratischen Formen und der Partition der Zahlen, auch gelegentliche geniale Inspirationen enthalten sind. Und wer als Forscher heute noch aus diesen Bestrebungen Anregung ziehen, oder wer die Geschichte dieser Fragen verfolgen will, wird die Zusammenfassung aller Abhandlungen natürlich willkommen heißen. Mit diesem Erfolg aber wird sich der Herausgeber, Herr H. F. Baker, der bekannte Mathematiker und Mitglied des St. Johns College in Cambridge, an dem Sylvester einst graduierte und dessen Ehrenmitglied er war, trotz seiner großen und selbstlosen Bemühung begnügen müssen.

Denn daß die Abhandlungen nun durch ihre Zusammenfassung genießbarer geworden wären, oder daß sie dadurch gar einen Anflug von Klassischem erhalten hätten, das ist, wie es vorauszusehen war, nicht der Fall. Im Gegenteil heben sich, so hart zusammmengedrängt, die großen Mängel nur um so deutlicher und abschreckender hervor, so daß die einzelnen Lichter mehr verschwinden — nicht nur die Mängel der äußeren Form, sondern auch ihr tieferer Grund: der Mangel an logischer Entwicklung der Ideen und an Systematik überhaupt, an deren Stelle oft bloßes Probieren und Konjekturieren tritt; dann der Mangel an jeder Selbstzucht in der Prüfung der Gedanken des Augenblicks; die üppige Phantasie und die grenzenlose ungezügelte Eitelkeit und Selbstberäucherung in bizarresten Äußerungen. Es wäre unmöglich gewesen, bei einer Gesamtausgabe diese Mängel gänzlich zu unterdrücken; vielleicht sogar schwer durchführbar, ihre größten Auswüchse zu beseitigen, ohne den Charakter des Werkes zu zerstören. Aus diesem Grunde scheint sich der Herausgeber — er spricht sich in der knappen Vorrede darüber nicht aus — entschlossen zu haben, die Abhandlungen treuest in ihrer ursprüng-

Digitized by Google

lichen Form wiederzugeben, ohne alle Änderungen und ohne Zusätze aus späterer Literatur, nur unter Korrektur von Schreib- und anderen Fehlern in den Formeln. Von diesen Grundsätzen weicht der Herausgeber nur in zwei Zufügungen ab: einem Verweis am Fuße von I, S. 587 und einer Note über Unterdeterminanten am Schluß von Bd. I, ohne daß der Grund gerade dieser und nur dieser Zufügungen ersichtlich ist; und in einer Weglassung: einer auf Hesses Person bezüglichen protegierenden Äußerung (I, Abh. Nr. 57). Letzteres ist nicht recht erklärlich, da ja alle weiteren persönlichen Auslassungen, darunter sehr viele ganz ephemere, unverändert abgedruckt sind, so auch (I, S. 189) eine wenig schöne ungegründete Prioritätsreklamation gegen Hesse, der doch Sylvester (cf. I, S. 302) gerade in rein-algebraischen Durchführungen überlegen war. Vielleicht hätte der Herausgeber doch, ohne seiner Auffassung im ganzen untreu zu werden, manche Stellen streichen können, welche als wohl erst während des Druckes in unreifer Vermutung konzipiert erscheinen und vom Autor selbst zuletzt noch als falsch erkannt wurden (cf. z. B. II, S. 339—341, Anm.).

Anzuerkennen an der vorliegenden Herausgabe ist die wesentlich chronologisch gehaltene Anordnung. Eine solche gibt schon an sich ein Bild der Schaffenstätigkeit des Autors, während die Gruppierung nach den Publikationsorganen, wie sie neuerlich bei einigen Sammlungen beliebt worden ist, bequemer für die Herausgeber als für die Benutzer des Werkes ist. Noch besser erscheint freilich, wenigstens bei einem viele Bände umfassenden Werke, die Einteilung in Gruppen nach dem Gegenstand, verbunden mit chronologischer Ordnung innerhalb der Gruppen, wie es bei Gauß, Jacobi usw. geschehen ist; aber der Umfang des Schaffens Sylvesters läßt noch das erstere Prinzip zu.

Dagegen wäre es — wie es bei den Sammlungen Gauß, Jacobi, Hesse usw. geschehen ist — erwünscht gewesen, orientierende Anmerkungen zugefügt zu sehen. Gerade bei einem Autor, der Schritt für Schritt der Verbesserung bedürfte, sind historische und kommentierende Anmerkungen, die auf Zusammenhänge mit Vorhergehendem und auch Nachfolgendem hinweisen oder den Sinn erläutern, unentbehrlich; sie würden das Werk handlicher und einem größeren Kreis zugänglicher gemacht haben. Dazu wäre freilich nicht die Arbeit eines einzelnen Herausgebers hinreichend, sondern es müßte, wie es in jenen Fällen geschehen ist, ein Zusammenwirken einer Reihe von Kräften stattfinden. Und das wäre im vorliegenden Falle wohl nicht zu erreichen gewesen.

Der erste Band der Sammlung, 1837—1853 umfassend, enthält 68 Abhandlungen, unter denen sich die wichtigsten des ganzen Werkes des Autors befinden: die Arbeiten über Elimination, die über quadratische Formen mit dem Trägheitsgesetz und mit den ersten Ideen über Elementarteiler, die über Sturmsche Funktionen, die Determinantensätze und vor allem die Forschungen in der Formentheorie, besonders den kanonischen Formen. Der zweite Band, von 1854—1873 gehend, bringt 110 Aufsätze, darunter von stark ausgedehnten den über Newtons Regel (Nr. 74), der aber mehr wegen der invariantiven Realitätskriterien für die Wurzeln der Gleichungen fünften Grades bedeutend ist, und die Vorlesungen über Partition (Nr. 26). Vier kleinere der Aufsätze hatte Sylvester einmal unter der Überschrift „Nugae Mathematicae" zusammengefaßt — ein bescheidener Titel, der auf sehr viele der Auf-

Digitized by Google

sätze gepaßt haben würde; auch auf den Anhang, der Bemerkungen zur mathematischen Heuristik (enthalten in Sylvesters Buch „The Laws of Verse"!) und eine Diskussion mit G. H. Lewes und anderen über Raum und Zeit aus der „Nature" in extenso abdruckt. — Ein allgemeiner Index ist dem letzten Band vorbehalten, für den wir noch den Wunsch aussprechen, daß er auch ein Porträt Sylvesters und vielleicht auch seine Biographie bringen möchte.

Erlangen. M. Noether.

Heinrich Wieleitner. Theorie der ebenen algebraischen Kurven höherer Ordnung. (Sammlung Schubert 43 Bd.) Mit 82 Figuren im Text. XXII u. 313 S. 8. Leipzig 1905, G. J. Göschen'sche Verlagsbuchhandlung. Geh. ℳ 10,—.

Als Referent in seinem zweiten Studiensemester (Sommer 1861) die 1852 erschienene erste Auflage der Higher plane curves von Salmon in die Hand bekam, wirkte dieses Buch auf ihn wie eine Offenbarung über lange gesuchte und nun klar enthüllte Wahrheiten. Die Zusammenfassung der grundlegenden Eigenschaften der algebraischen Kurven bei freier Auffassung des Koordinatenbegriffes klärte den Schüler über viele Fragen auf, die ihn bis dahin gequält hatten, und darum blieb diesem Werke in den folgenden Auflagen die Zuneigung des alternden Mannes gewahrt, der das dauernde Wachstum des in dem Buche abgehandelten Stoffes infolge der Arbeit vieler talentvoller und rüstig schaffender Forscher miterlebte. Die Vorzüge des Salmon'schen Werkes, dessen deutsche Bearbeitung durch Fiedler auf der Höhe der Wissenschaft gehalten wurde, haben es jedem Nachfolger schwer gemacht, für den jeweiligen Zeitpunkt etwas Vergleichbares fertig zu stellen. Die Vorlesungen von Clebsch über Geometrie in der Bearbeitung von Lindemann gaben nach der Theorie der algebraischen Formen hin eine bedeutungsvolle Ergänzung. Daß aber auch für die englisch redenden Mathematiker eine umfassendere Bearbeitung nötig erschien, zeigte sich an manchen literarischen Erscheinungen, so in dem von einer Schülerin Cayleys verfaßten Buche: An introductory account of certain modern ideas and methods in plane analytical geometry by Charlotte Angas Scott (London, 1894), welcher Schrift Cole im Bulletin of the American Mathematical Society (2) **2**, 265—271 enthusiastischen Beifall gezollt hat.

Hiernach ist es begreiflich, daß eine Neubearbeitung des interessanten Gebietes sehr vielen Wünschen entgegenkommt, daß aber auch die Befriedigung dieser Wünsche keine leichte Aufgabe ist. Der Verfasser des vorliegenden Buches ist sich der Schwierigkeiten seines Unternehmens bewußt gewesen und hat daher bei der Übernahme des Bandes der Schubert'schen Sammlung, der die Theorie der ebenen algebraischen Kurven bringen soll, gewissenhafte und umfassende literarische Studien gemacht. Als Frucht eines Teils dieser Sammelarbeit hat er, abgesondert von der gegenwärtigen Veröffentlichung, die Schrift erscheinen lassen: „Bibliographie der höheren algebraischen Kurven für den Zeitabschnitt von 1890—1904" (Leipzig 1905); vergl. dieses Archiv (3) **12**, 83. Der Jugendmut hat ihn aber auch vor zu großer Ängstlichkeit behütet, und so ist er frisch an die Abfassung gegangen und hat nach kurzer Frist sein flott geschriebenes Werk den Mathematikern zur Benutzung fertig übergeben.

Digitized by Google

Als zusammenfassende Darstellung der Eigenschaften der algebraischen Kurven ist das Buch recht zeitgemäß; es wird hoffentlich dazu beitragen, der deutschen studierenden Jugend dieses Gebiet der Mathematik, das leider auf manchen Universitäten ganz vernachlässigt wird, in seiner Schönheit und Fruchtbarkeit vor die Augen zu führen und lieben zu lehren. Unterschätzt hat der Verfasser wohl die Bewältigung des Gegenstandes durch den Leser, wenn er sein Werk als für Anfänger berechnet hinstellt. Hätte er den Erfolg derartiger Hochschulvorträge beobachten können, so würde er wohl anders geurteilt haben. Dagegen hat er als praktischer Lehrer den Wert konkreter Beispiele richtig eingeschätzt und durch ausführliche Behandlung derselben unter Zufügung passender Figuren ein Reizmittel für das Studium seines Buches geschaffen. Die Faßlichkeit der Darstellung, wie sie dem Referenten aus dem Studium der Salmon schen Higher plane curves vorschwebt, wie sie dann auch Ch. A. Scott in ihrem Introductory account bewährt hat, kann der vorliegenden Schrift nicht überall zugesprochen werden. Das Bestreben, in dem gegebenen Rahmen recht viel zu geben, scheint hierbei nicht ohne Einfluß geblieben zu sein.

Von den vierzehn Abschnitten sind die ersten elf (212 Seiten) der allgemeinen Theorie der algebraischen Kurven gewidmet. Die folgenden drei Abschnitte: über die Kurven dritter Ordnung (42 Seiten), vierter Ordnung (36 Seiten) und über Kurvensysteme (19 Seiten), endlich ein Sachregister nehmen das letzte Drittel des Buches in Anspruch. Zwei Drittel des Werkes sind also auf die allgemeinen Untersuchungen verwendet; dies ist ein charakteristischer Zug. Eine Kritik von Einzelheiten würde zu weit führen; wir verweisen dieserhalb auf die eingehende Besprechung im Jahrbuche über die Fortschritte der Mathematik **36**, 623—628, wo einer der besten Kenner dieses Gebietes, Hr. W. Fr. Meyer neben aller Anerkennung der vorliegenden Leistung die Berücksichtigung einer Reihe von Ausstellungen für die nächste Auflage empfiehlt. Hoffen wir, daß infolge einer fleißigen Benutzung des Werkes durch die Studenten eine zweite verbesserte Auflage bald nötig wird.

Berlin. E. Lampe.

Walther. Lehr- und Übungsbuch der Geometrie für Unter- und Mittelstufe. Mit Anhang (für Realanstalten) I: Ebene Trigonometrie, II: Abbildung und Berechnung einfacher Körper. VIII u. 204 S. 8. Berlin 1907, Otto Salle. Geb. *M* 2,20.

Knops. Koppe-Diekmanns Geometrie zum Gebrauche an höheren Unterrichtsanstalten. (24. Auflage.) Ausgabe für Reallehranstalten. I. Teil: Planimetrie, Stereometrie und Trigonometrie. 8. Auflage der neuen Bearbeitung. Mit 8 Tafeln, 184 Figuren und zahlreichen Übungen und Aufgaben. IV und 272 S. 8. Essen 1908, G. D. Baedeker. Geb. *M* 2,40.

Hocevar. Lehr- und Übungsbuch für Untergymnasien. Mit 184 Figuren. Achte Auflage. 124 S. 8. Wien 1907, F. Tempsky. Geb. 1 K 80 h.

Davison and Richards. Plane Geometry for Secondary Schools. Cambridge: At the University Press 1907. VIII und 411. 8^0. Geb. 4 sh.

Wer den Meraner Reformvorschlägen zustimmt, ist, auch wenn er an dem in der Schule eingeführten Lehrbuch Unterstützung nicht findet, sehr wohl in Lage, die Forderungen der Unterrichtskommission, soweit es ihm die Pensen-

Digitized by Google

begrenzung erlaubt, zu verwirklichen. Man fängt aber auch in den Lehrbüchern an, den Reformvorschlägen Rechnung zu tragen, was naturgemäß am gründlichsten bei ganz neuen Literaturerzeugnissen geschehen kann. Walthers Geometrie zeigt dies in höchst erfreulicher Weise. Dadurch daß überall Bewegungen in die Vorstellungen und Figuren hineingetragen werden, wird die Anschaulichkeit erleichtert und die Anschauung geklärt und vertieft. Die Hinweise auf die gerade so besonders hervortretenden funktionalen Zusammenhänge werden der „Erziehung zur Gewohnheit des funktionalen Denkens" dienstbar gemacht. Bei aller Ausführlichkeit im Methodologischen, namentlich in den Eingangsabschnitten, zeigt die Darstellung im übrigen Streben nach Kürze und Knappheit, an einigen Stellen, wie bei der originellen Erklärung der Ähnlichkeit S. 100, freilich hierin wohl etwas weitgehend. Die Übungen sind reichhaltig und geschickt ausgewählt. So bietet Walthers Lehr- und Übungsbuch eine treffliche Verwirklichung dessen, was durch die Reformvorschläge für die Geometrie der Unter- und Mittelstufe gefordert worden ist. Auch in den Neuauflagen von Knops (Koppe-Diekmann) und Hočevar ist, wenn auch nicht in so weitgehendem Umfange, den Meraner Forderungen entsprochen. Z. B. behandeln beide Bücher die Grundaufgaben für die Dreieckskonstruktion vor den Kongruenzsätzen, und beide betrachten an geeigneten Stellen die Figuren als beweglich. Welch' anderes Leben erhalten so etwa die Sätze über Inkongruenz der Dreiecke (Hočevar S. 33)! Auf die funktionale Abhängigkeit geht Knops durch alle Gebiete des behandelten Stoffes hin ein, während Hočevar nur gelegentlich Vorbereitendes gibt und die Bezeichnung „Funktion" noch vermeidet. Den letzteren Standpunkt nehmen dem Funktionsbegriff gegenüber auch Davison und Richards ein. Während ihr Buch in vielem, so in der Benutzung von Bewegungsvorstellungen (z. B. beim Halbieren und in der Kreislehre), durchaus modern ist, entspricht anderes, als zu deduktiv (z. B. die Behandlung der Kongruenzsätze), den Meraner Forderungen nicht. Recht empfehlenswert ist, daß die englischen Verfasser, ebenso wie der österreichische, frühzeitig bei Flächenberechnungen Koordinaten benutzen. Das Aufgabenmaterial ist bei Davison und Richards besonders reichhaltig; es enthält auch schwierigere Aufgaben, die über den Rahmen dessen, was bei uns für die Schulen in Frage kommt, hinausgehen und im besondern auch über die von der Unterrichtskommission aufgestellten Ziele. Wie die Neuauflagen von Knops (Aufl. 7 wurde im XIII. Band S. 175 besprochen) und Hočevar, beides bestens eingeführte Lehrbücher, so kann die Plane Geometry von Davison und Richards wegen der klaren Darstellungsweise und der ausgezeichneten Ausstattung bestens empfohlen werden.

Gera. E. Kullrich.

Ch. Lucas de Peslouan. N.-H. Abel. Sa vie et son oeuvre. XIII u. 168 S. gr. 8. Mit Bildnis. Paris 1906, Gauthier-Villars.

Die Nachrichten über das Leben und die Schöpfungen von Niels Henrik Abel (* 5. August 1802, † 6. April 1829) sind zuerst von C. A. Bjerknes mit Umsicht gesammelt und in einer Reihe von Artikeln der „Nordisk Tidskrift för vetenskap, konst och industri" 1880 in Stockholm veröffentlicht worden. Da eine Übersetzung dieser Artikelreihe in eine der allgemein verstandenen Sprachen Europas sehr wünschenswert war, unterzog sich Houël,

Digitized by Google

der sprachkundige Professor der Mathematik an der Faculté des Sciences de Bordeaux, dieser Aufgabe und ließ die auf diese Weise entstandene Biographie Abels in den „Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux“ abdrucken, wo sie als Band I der dritten Serie 1884 erschienen ist.

Von der Größe seines Helden ganz erfüllt, hatte Bjerknes mit rührendem Fleiße allem nachgespürt, was auf den Lebensgang Abels Einfluß ausgeübt hat, und hat seiner Begeisterung in der Darstellung den entsprechenden Ausdruck gegeben. Allein in seinem Bestreben, die überragende Größe seines Heros würdig zu schildern, hat er nicht immer gegen andere Gerechtigkeit walten lassen. Insbesondere hat er gegen unseren Jacobi mit Spitzfindigkeit den Indizienbeweis zu führen gesucht, daß dieser gleichstrebende deutsche Forscher an dem naiven Nordländer hinterlistige Plagiate verübt habe. Die Abwehr dieser Angriffe auf unseren Landsmann, der mehr als irgend jemand zur Verherrlichung Abels beigetragen hat, übernahm dann der Franzose Bertrand in einem köstlichen Artikel des „Bulletin des sciences mathématiques“ (2) **9**, 190—202, 1885. Nach Kenntnisnahme dieser Besprechung des Bjerknesschen Werkes unterließ Weierstraß, der Herausgeber der Werke Jacobis, die von ihm beabsichtigte Erwiderung.

Weitere Beiträge zur Lebensgeschichte Abels erschienen bei Gelegenheit der Jahrhundertfeier seiner Geburt 1902, unter denen als die wichtigste Schrift zu nennen ist das „Mémorial du Centenaire“ (vgl. Archiv (3) **8**, 162—165). In ihm wird der Verlauf seines Lebens von Elling Horst im Zusammenhange erzählt, sein wissenschaftliches Lebenswerk von L. Sylow vortrefflich gewürdigt. Manche bis dahin nicht bekannt gewordenen Dokumente, die besonders Karl Störmer mit feinem Spürsinn ausfindig gemacht hatte, sind neben den sämtlichen erhaltenen Briefen Abels (in norwegischer Sprache und in französischer Übersetzung) hier veröffentlicht. Wegen des großen Umfanges des Mémorial und seines nicht niedrigen Preises konnte es lohnend erscheinen, das Leben Abels in kürzerer einheitlicher Form und in zusammenfassender Darstellung abermals zu schreiben.

Eine solche knappere und leichter lesbare Biographie hat Lucas de Peslouan geliefert. In einem mäßigen Bande erhält der Leser Aufschluß über die äußeren Lebensschicksale Abels und seine wissenschaftlichen Leistungen. Das Ziel des Verfassers ist aber höher gesteckt: er möchte zeigen, wie die einzelnen Gedankenbildungen in dem Geist ihres Schöpfers entstanden, wie sie miteinander verkettet sind. „Man wird begreifen, warum ich nicht die Erzählung seines Geschickes von der Zergliederung seines Lebenswerkes getrennt habe; man wird schließlich das Phantastische oder sogar das Romanhafte in dieser Arbeit entschuldigen.“ Damit ist also gesagt, daß die Schlußfolgerungen durchaus nicht den Anspruch auf Sicherheit oder selbst große Wahrscheinlichkeit machen können. „Diejenigen, denen ihre freie Zeit die Unternehmung einer derartigen Arbeit gestattet, mögen nur gleich von der Lektüre des vorliegenden Buches abstehen“. Der Inhalt ist also mit kritischer Vorsicht aufzunehmen. Selbst bei einfachen Tatsachen bleiben Zweifel bestehen. So wird in der Note 2 (S. 139) der Vater von Christine Kemp, der Braut Abels, als Kupferschmied (chaudronnier) bezeichnet, während Holst im Mémorial S. 24 ihn als Generalintendanten (intendant général) benennt.

Digitized by Google

Die oben berührte Frage nach dem Verhältnis von Jacobi zu Abel ist beiseite geschoben, weil ja nur von Abel zu reden sei. Trotzdem wird hinsichtlich dieser Frage auf die „sehr schönen Studien im Buche von Bjerknes" hingewiesen, ohne daß die Kritik von Bertrand erwähnt wird. Fast scheint es, daß der Verfasser die deutsche Literatur, ja die deutsche Sprache nur ungenügend kennt. Es entspricht nicht dem Inhalte des von Crelle gegründeten „Journals für die reine und angewandte Mathematik", wenn es als eine „Revue mathématique" bezeichnet wird. Unter den Mathematikern, die auf S. 136 als die Ausbildner der Abelschen Ideen genannt werden: Jacobi, Riemann, Hermite, Halphen, vermißt man vor allem Weierstraß, dessen ganzes Leben hauptsächlich dem Ausbau der Theorie der Abelschen Funktionen gewidmet war. Und unser Schumacher wird zumeist in Shumacher verunstaltet. Daß die Franzosen Abel bei seiner Anwesenheit in Paris ganz vernachlässigt, seine Größe verkannt haben, wird weitläufig erklärt und entschuldigt. Daß aber Abel die in Frankreich ihm vorenthaltene Anerkennung in Deutschland reichlich gefunden hat, muß aus den Tatsachen mehr geschlossen werden, als daß der Verfasser es zu betonen Anlaß nähme.

Es ist immerhin eindrucksvoll, den bezaubernden Einfluß eines so einzig gearteten Genies, wie Abel es war, auf das Gemüt eines empfänglichen Franzosen aus der Darstellung hervorleuchten zu sehen. „Man klage mich nicht an, daß ich einen zu großen Ehrgeiz hatte, als ich das Werk des größten Mathematikers des neunzehnten Jahrhunders zu begreifen versuchte. Ich habe ihn nicht gewählt, weil er der Größte wäre, sondern weil kein anderer die nämlichen Gefühle der Bewunderung und der Ehrfurcht in mir entzündet hat." Von diesem göttlichen Feuer wird der Leser sicher ergriffen werden.

Berlin. E. Lampe.

August Föppl, Vorlesungen über Technische Mechanik. In sechs Bänden. Band V: Die wichtigsten Lehren der höheren Elastizitätstheorie. XII u. 391 S. In Leinwand geb. ℳ 10,—. Mit 44 Fig. gr. 8. Leipzig 1907, B. G. Teubner.

Dieser, vor kurzem erschienene, Band der Vorlesungen behandelt die wichtigsten Lehren der „höheren" Elastizitätstheorie. Er nimmt durchgehends Bezug auf den Inhalt des dritten Bandes (3. Aufl.). Der folgenden Besprechung werden wir nur die allgemeinen Betrachtungen des Verfassers zugrunde legen, die zur Beurteilung des Werkes ausreichend sein dürften.

In der Theorie des Gleichgewichts und der Bewegung elastischer Körper geht man gewöhnlich aus von einer Lage der Punkte desselben, für welche sämtliche Druckkomponenten im Innern des betrachteten Körpers Null sind, und nennt den Zustand, in welchem sich der Körper alsdann befindet, seinen natürlichen Zustand. (Kirchhoff, Vorlesungen über math. Physik 1876, p. 389.) Von den Koordinaten x, y, z eines Körperpunkts im natürlichen Zustand aus rechnet man alsdann die Komponenten u, v, w der elastischen Verschiebungen bei einer Formveränderung. Der Herr Verfasser der Vorlesungen über die Lehren der höheren Elastizitätstheorie teilt diesen Standpunkt nicht. Er bezeichnet durch $\xi\ \eta, \zeta$ die Komponenten der Verschiebung, die ein Körperpunkt relativ zu einem auf dem Körper selbst *festgehefteten* Koordinatensystem erfahren hat. (Bd. 3, p. 47.) Diese *Fest-*

Digitized by Google

heftung geschieht dadurch, daß das Koordinatensystem, auf welches die x, y, z und die ξ, η, ζ bezogen werden, derart gewählt wird, daß sein Ursprung mit einem beliebig angenommenen Körperpunkt zusammenfällt, die X-Achse durch einen zweiten und die XY-Ebene durch einen dritten Punkt des Körpers gelegt wird. Am *bequemsten* soll für diese Wahl der 3 Punkte ein unendlich kleines Dreieck sein. (Bd. 3, p. 355.) Der Vorteil, den dieser Ausgangspunkt vor dem sonst gewählten hat, ist wenig beneidenswert. Die Koordinaten x, y, z eines Punktes, aus dem die Verschiebungskomponenten ξ, η, ζ gezählt werden, sind alsdann stets die Koordinaten eines schon *verschobenen* Punktes, und nicht die seinem ursprünglichen Zustand entsprechenden. Es scheint aber, daß nach dem Ziel, das der Herr Verfasser durch Herausgabe dieses fünften Bandes verfolgt (Vorwort, p. IV und V.), durch diesen Ausgangspunkt schon eine Doktordissertation angeregt werden soll über die Frage, wie aus den für irgend ein Problem *ermittelten* ξ, η, ζ die *anfängliche Form* und *Lage* des deformierten Körpers ermittelt werden könne. Den Winkeln der beweglichen Koordinatenachsen mit den anfänglichen soll wohl nachgeforscht werden?

Nach diesen Vorbemerkungen können wir uns auf die Besprechung des fünften Abschnitts des vorliegenden V. Bandes beschränken. Er handelt von dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten für feste elastische Körper. In diesem Abschnitt wird eine durchaus neue Begriffsbestimmung der *virtuellen Verschiebungen* gegeben, die dem angeführten Prinzip allerdings fremd ist.

Nach dem Herrn Verfasser sind *virtuelle* Verschiebungen der Punkte eines elastischen Körpers solche, welche Formveränderungen an ihm hervorrufen, die nur *erdacht* sind, aber nicht *wirklich* ausgeführt werden, ja nicht einmal ausgeführt werden dürfen, da sie die im Körper vorhandenen *Spannungen nicht* ändern sollen. (p. 264, Zeile 4 von unten.) Diese Verschiebungen dienen nur zur *Berechnung* von Arbeitsgrößen. Auch werden weiterhin *Spannungen* im Körper als auftretend angenommen, welche keiner Formänderung verdankt werden, noch bedürfen. Die „Theoretiker" der Elastizitätslehre waren bisher der Meinung, daß Formveränderungen eines Körpers stets mit Spannungsänderungen, umgekehrt Spannungsänderungen stets mit Formveränderungen *notwendig* verbunden seien. Dieser Mangel einer richtigen physikalischen Auffassung wird vom Herrn Verfasser (p. 295) gebührend gewürdigt, offenbar auf Grund seiner Worte im Vorwort zur 1. Aufl. des dritten Bandes (p. VII): „Daß mein Ziel ausschließlich die Erkenntnis der *Wirklichkeit* ist, was mit Recht gefordert werden darf, wird der Leser bald herausfinden".

Nach Benutzung der erwähnten neuen Begriffsbestimmungen zur Definition einer *virtuellen* Formänderungs*arbeit*, gelangt der Herr Verfasser mit Hilfe von formalem Gebrauch des Zeichens δ der Variationsrechnung zu der Formel:

$$G\delta \int F dv = \sum \mathfrak{P} \delta \mathfrak{s}$$

(305)
$$F = \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \frac{c^2}{m-2} + \tfrac{1}{2}\left(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2\right),$$

in denen $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ die Dehnungen, $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ die Winkeländerungen eines unendlich kleinen prismatischen Volumenelements dv bezeichnen. Er schreibt diese Formel Kirchhoff zu. Kirchhoff selbst aber gibt an, daß sich dieselbe schon bei G. Green vorfindet. (Gesammelte Abhandlungen von G. Kirchhoff, p. 243.) Für das Verständnis der Leser dieses Journals gebe ich, da die ξ, η, ζ des Herrn Verfassers eine von den Kirchhoffschen u, v, w wesentlich

Digitized by Google

verschiedene Bedeutung haben, die von Green herrührende Formel in den bekannten Kirchhoffschen Bezeichnungen wieder. In denselben lautet sie:

$$(305)^* \qquad \delta \int f d\tau = \Sigma (X \delta u + Y \delta v + Z \delta w),$$

wenn die Summe Σ über alle angegriffenen Punkte des Innern und der Oberfläche erstreckt gedacht wird, und:

$$f = \varkappa (x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + \tfrac{1}{2} y_x^2 + \tfrac{1}{2} z_x^2 + \tfrac{1}{2} x_y^2 + \theta (x_x + y_y + z_z)^2),$$

ferner die x_x etc. durch die Gleichungen:

$$x_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad y_z = z_y = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z},$$
$$y_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad z_x = x_z = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x},$$
$$z_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \qquad x_y = y_x = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

definiert werden. Diese Bezeichnungen werden in der weiteren Besprechung anstatt der vom Herrn Verfasser gewählten beibehalten werden.

Die Gleichung (305*) ist, unter der Voraussetzung im ganzen Körper *stetiger* Verschiebungen u, v, w und stetiger δu, δv, δw, eine aus den *Gleichgewichtsbedingungen* im *Innern* und an der *Oberfläche* dieses Körpers abgeleitete reine Identität. Wird ihr Bestehen für *beliebige* δu, δv, δw vorausgesetzt, so folgen aus ihr auch die bekannten Gleichgewichtsbedingungen für jeden Punkt des Innern und der Oberfläche zurück. Irgend einer Berufung auf das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten bedarf es zu dem Beweis derselben nicht. Was die Bedingungen betrifft, die zur Herstellung des Gleichgewichts an der *Körperoberfläche* erfüllt werden müssen, so finden sie sich in dem ganzen V. Bande, der die *höhere Elastizitätslehre* behandelt, *überhaupt* nicht angegeben, man müßte sie denn in der dürftigen Andeutung auf Seite 25 des III. Bandes (3. Aufl.) aufzusuchen verstehen. Diese bezieht sich aber auf Spannungszustände *beliebiger* Körper, die nicht elastisch feste zu sein brauchen. Für letztere finden die entsprechenden Grenzbedingungen überhaupt keine Erwähnung. Zu dem § 63[a] der 2. Auflage des 3. Bandes der Vorlesungen erwähnt der Herr Verfasser (p. 268), daß er in ihm die obige, Kirchhoff zugeschriebene Formel entwickelt habe. Das ist aber durchaus nicht der Fall, denn die dort gegebene Formel bezieht sich nur auf die in den Volumenelementen angreifenden äußeren Kräfte, ist also *nicht* die Greensche. Nur die *belehrende* Bemerkung des Herrn Verfassers bleibt von ihr bestehen, die ebenfalls nicht zutraf. Die Zurückverweisung auf den verlassenen § 63[b] der 2. Auflage ist, wie wir sehen werden, gleicher Natur.

Die auf den Seiten 269 bis 272 enthaltenen Ausführungen über die Gleichung $\delta A = 0$ müssen wir der Durchsicht der Leser des Buches selbst empfehlen, da ein Eingehen auf die Fehlerhaftigkeit derselben einen unverhältnismäßigen Raum beanspruchen würde und an und für sich eine müßige Arbeit erforderte.

In der dritten Auflage des 3. Bd. der Vorlesungen p. 375 hat der Herr Verfasser wiederum einen vollständig falschen *Beweis* der *Eindeutigkeit* der Lösungen der Gleichgewichtsbedingungen der elastisch festen Körper gegeben. Diese *Eindeutigkeit* hat, wie z. B. Kirchhoff (Vorlesungen p. 375) zeigt, *nur*

Digitized by Google

unter Erfüllung gewisser Nebenbedingungen 11 (l. c) statt, die der Herr Verfasser offenbar nicht kennt. Aus dem gegebenen Beweise geht bekanntlich gleichzeitig hervor, daß unter der Voraussetzung im ganzen erfüllten Raume *stetig* verlaufender u, v, w beim Fehlen *äußerer* Kräfte die *Spannungen* in *allen* Punkten eines elastischen Körpers verschwinden müssen. Nicht so verhält es sich, wenn die u, v, w in einzelnen Flächen des Körpers *unstetig* werden, da sonst die Gleichung 18) der elften Vorlesung Kirchhoffs nicht gelten würde. Für elastische Körper ist sie die Green'sche (305, des V. Bandes der Foepplschen Vorlesungen).

In § 44 des der Besprechung unterliegenden Werkes führt nun der Herr Verfasser eine Betrachtung der *Variation des Spannungszustandes* in einem *elastischen festen* Körper ein, welche nur der Bedingung der *statischen Möglichkeit* unterworfen sein soll, wie er sagt. Dieser Spannungszustand soll so beschaffen sein, daß durch ihn, ohne jede *äußere* Kraftwirkung, in dem betrachteten Körper Gleichgewicht besteht. Einem solchen Spannungszustand genügen nur die Werte Null in jedem Punkt des Körpers, unter den vom Herrn Verfasser angenommenen Stetigkeitsbedingungen. Daher ist seine Bedingung $\delta A = 0$ (Gl. 315, p. 286) nichts als die Identität $0 = 0$, die er für eine *Minimalbedingung* hält.

Im § 46 (p. 293) kommt er wiederum auf die „Eigenspannungen" eines elastischen Körpers zu sprechen, die bekanntlich nur bei Unstetigkeiten der elastischen Verschiebungen u, v, w auftreten können. Für sie soll die Gleichung

$$\delta \int \mathfrak{f} d\tau = 0$$

gelten, deren Bedeutung aus (305*) entnommen werden kann. Obgleich in dieser Gleichung die Größen $x_x, \ldots x_y, \ldots$, die in sie eingehen, durch die Differentialquotienten der drei Funktionen u, v, w definiert wurden, dieselben also nicht willkürliche sind, sondern den bekannten Kompatibilitätsgleichungen unterliegen, so sind dieselben, beim Eintreten von Eigenspannungen nach dem Herrn Verfasser, vollständig willkürlich, und unterliegen diesen Bedingungen nicht mehr(!).

Aus den Schlüssen des Herrn Verfassers zeigt sich denn auch, daß der erwähnte, von Kirchhoff gegebene Beweis für die Eindeutigkeit der Lösung der statischen Probleme der Elastizitätstheorie ein *„Scheinbeweis"* ist, dessen Unrichtigkeit von jedem seiner Schüler auf den ersten Blick erkannt werden würde.

Wie wenig der Herr Verfasser selbst die betreffenden Entwickelungen verstanden hat, ergibt sich aus der Bemerkung auf Seite 297 (Zeile 1 von oben), nach welcher jener Beweis aus seiner Gleichung $\delta A = 0$ gezogen würde oder gezogen worden wäre. Auf Grund dieses Verständnisses und seiner physikalischen Vorstellungen von virtuellen Spannungsvariationen und elastischen Verschiebungen verwirft er die neueren Arbeiten über die Spannungsverhältnisse in elastischen Körpern, welche einen mehrfach zusammenhängenden Raum einnehmen. Wir glauben nicht, daß für die verdeckt angegriffenen Autoren eine Veranlassung der Erwähnung vorliegt.

An einigen Stellen seines Buches beklagt sich der Herr Verfasser über das Mißverständnis, dem einige seiner Entwickelungen ausgesetzt waren. Leider ist auch mir ein solches Mißverständnis untergelaufen. Aus dem Titel und den Vorreden zu den Vorlesungen über technische Mechanik glaubte ich schließen zu sollen, daß diese Vorlesungen für junge Leute bestimmt seien, welche sich der Laufbahn eines Ingenieurs widmen und durch theoretische

Digitized by Google

Studien ihre Zukunft vorbereiten wollen. In dieser Beziehung war ich im Irrtum. Denn auf Seite 295 des besprochenen Buches sagt der Herr Verfasser:

„Da ich in erster Linie für *Ingenieure* schreibe, bei denen ich bisher noch kaum jemals grundsätzlich falsche Anschauungen über die Eigenspannungen bemerkt habe, konnte ich es als entbehrlich ansehen, eine Ansicht ausdrücklich zu widerlegen, die von meinen Lesern auf den ersten Blick als unrichtig erkannt worden wäre." — — — —

Mit der Anführung dieses Satzes dürfen wir wohl die Besprechung der „wichtigsten Lehren der höheren Elastizitätstheorie" beendigen. Daß sie dem Studium der Ingenieure nicht empfohlen werden können, geht wohl aus dem Mitgeteilten zur Genüge hervor.

Wenn der Herr Verfasser dem empfehlenswerten Brauche der meisten Autoren gefolgt wäre, und eine Zusammenstellung der von ihm benutzten Literatur, d. h. der verwerteten Abhandlungen und Bücher beigefügt hätte, so würde es den schon hinreichend unterrichteten Lesern ermöglicht worden sein, aus den Originalwerken nach Rückgängigmachung der Verrenkungen, welche die Entwickelungen in den Händen des Verfassers erlitten haben, den erwünschten Nutzen zu ziehen.

Freiburg. J. Weingarten.

Couturat, L. L'Algèbre de la Logique. Scientia Nr. 24. 100 S. 8. Paris 1905, Gauthier-Villars.

Die Algebra der Logik wurde von George Boole (1815—1864) begründet, von Ernst Schröder (1841—1902) weiter entwickelt und vervollkommnet. Die Grundgesetze dieses Kalkuls wurden erforscht, um die Prinzipien des Denkens zum Ausdruck zu bringen; derselbe kann aber vom rein formalen, d. h. vom mathematischen Standpunkte aus betrachtet werden als eine Algebra, die auf gewissen willkürlich angenommenen Prinzipien beruht. Ob dieser Kalkul wirklich den realen Operationen des Geistes entspricht und geeignet ist, den Vernunftschluß zu ersetzen, ist eine Frage der Philosophie. Der formale Wert dieses Kalkuls und sein Interesse für den Mathematiker ist ganz unabhängig von seiner Interpretation und seiner Anwendung auf logische Probleme. Verf. stellt sich auf diesen rein mathematischen Standpunkt, setzt also in dem Kalkul nicht sowohl Logik als vielmehr Algebra auseinander.

Inhaltsübersicht: 1. Einleitung. 2. Die beiden Interpretationen des logischen Kalkuls („interprétation conceptuelle et propositionnelle"). 3. Begründung des logischen Kalkuls nach dem Vorgange von Schröder durch die fundamentale Beziehung zwischen zwei Termen („relation d'inclusion"). 4. Definition der Gleichheit. 5. Prinzip der Identität. 6. Prinzip des Syllogismus. 7. Definition der Multiplikation und Addition. 8. Prinzipien der Vereinfachung und Zusammensetzung. 9. Gesetze der Tautologie und Absorption. 10. Theoreme der Multiplikation und Addition. 11. Erste Formel für die Transformation der Inklusionen in Gleichungen. 12. Distributives Gesetz. 13. Definition von 0 und 1. 14. Gesetz der Dualität. 15. Definition der Negation. 16. Prinzipien der Kontradiktion und des ausgeschlossenen Mittels. 17. Gesetz der doppelten Negation. 18. Zweite Formel für die Transformation der Inklusionen in Gleichungen. 19. Gesetz

Digitized by Google

der Kontraposition. 20. Postulat der Existenz. 21. Entwickelungen von 0 und 1. 22. Eigenschaften der Konstituenten. 23. Logische Funktionen. 24. Gesetz der Entwickelung. 25. Formeln von De Morgan. 26. Disjunkte Summen. 27. Eigenschaften der entwickelten Funktionen. 28. Grenzen einer Funktion. 29. Formel von Poretzky. 30. Satz von Schröder. 31. Eliminationsresultante. 32. Fall der Unbestimmtheit. 33. Summen und Produkte von Funktionen. 34. Ausdruck einer Inklusion mittels einer Unbestimmten. 35. Ausdruck einer doppelten Inklusion mittels einer Unbestimmten. 36. Lösung der Gleichung mit einer Unbekannten mittels einer Unbestimmten. 37. Elimination in einer Gleichung mit mehreren Unbekannten. 38. Satz über die Werte einer Funktion. 39. Bedingungen der Unmöglichkeit und der Unbestimmtheit. 40. Auflösung der Gleichungen mit mehreren Unbekannten. 41. Problem von Boole. 42. Methode von Poretzky. 43. Gesetz der Formen. 44. Gesetz der Konsequenzen. 45. Gesetz der Ursachen. 46. Anwendung des Gesetzes der Formen auf die Konsequenzen und Ursachen. 47. Beispiel: Vennsches Problem. 48. Geometrische Schemata von Venn. 49. Logische Maschine von Jevons. 50. Tabelle der Konsequenzen. 51. Tabelle der Ursachen. 52. Zahl der möglichen auf n Terme bezüglichen Behauptungen. 53. Besondere Sätze. 54. Lösung der Ungleichung mit einer Unbekannten. 55. System einer Gleichung und einer Ungleichung. 56. Spezielle Formeln. 57. Äquivalenz einer Implikation und einer Alternative. 58. Gesetz der Importation und Exportation. 59. Reduktion der Ungleichheiten auf Gleichheiten. 60. Schluß. — Bibliographie. Liste der Bezeichnungen und Abkürzungen.

Das kleine Büchlein enthält, wie man aus obiger Inhaltsübersicht ersieht, auf verhältnismäßig kleinem Raume einen überaus reichen Stoff, der vom Verf. in ansprechender, klarer Weise behandelt worden ist; es kann daher als Einführung in diese prinzipiell wichtige mathematische Disziplin angelegentlich empfohlen werden.

Charlottenburg. G. Wallenberg.

Brunn, H. Beziehungen des Du Bois-Reymondschen Mittelwertsatzes zur Ovaltheorie. X u. 138 S. 4. Berlin 1905, G. Reimer. Preis geh. ℳ 7,—

In der vorliegenden Schrift handelt es sich um die verschiedenen Erscheinungsformen eines einzigen Satzes. Von diesen Formen ist die fundamentalste das sogen. Abelsche Lemma, das sich auf endliche Summen und reelle Größen bezieht, so daß die Arbeit auch „Verallgemeinerungen des Abelschen Lemmas auf komplexem Gebiete“ genannt werden könnte. Die *bekannteste* Form des bewußten Satzes ist aber der Du Bois-Reymondsche Mittelwertsatz für bestimmte Integrale, und aus diesem Grunde hat Verf. diesen in den Titel aufgenommen, gleichzeitig aber auch die Theorie der Ovale, deren Verwertung für die Arbeit charakteristisch ist. — Die Abhandlung ist nicht rein analytisch gestaltet, um Längen zu vermeiden; doch ist die Analyse stets so weit geführt, daß die geometrischen Fassungen nur zur Vereinfachung der Darstellung, nicht zur Verschleierung unbewältigter Schwierigkeiten dienen. Das Hauptziel des Verf. ist die Verallgemeinerung des Abelschen Lemmas und des Du Bois-Reymondschen Mittelwertsatzes (Satz 317).

Digitized by Google

Die Sätze des Verf. sind ein Beispiel dafür, wie die zum Teil aus reellen, zum Teil aus komplexen Größen gebildeten Funktionen bisweilen eine eigentümlich selbständige Mittelstellung zwischen den bloß aus reellen und den bloß aus komplexen Elementen zusammengesetzten Funktionen einnehmen, und wie diese mittlere Funktionsart zu Sätzen Veranlassung geben kann, die sich nicht durch Spezialisierung aus den für rein komplexe Funktionen geltenden Sätzen ableiten lassen.

Es haben nunmehr drei der bedeutendsten Mittelwertsätze: der erste (verallgemeinert von Weierstraß und veröffentlicht in Hermites Cours lithographié, 3. Ed. p. 58) und der zweite Mittelwertsatz für bestimmte Integrale und der Höldersche Mittelwertsatz (verallgemeinert in des Verf. Habilitationsschrift „Kurven ohne Wendepunkte", S. 65 ff.) bei ihrer Verallgemeinerung auf Eigebilde geführt. Der gemeinsame Grund ist leicht erkennbar: man wird überall da, wo das arithmetische Mittel

$$\frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$$

aus n Größen x_i eine offene oder versteckte Rolle spielt, auf das Hervortreten von Eigebilden gefaßt sein müssen.

Inhalt: Vorrede. I. Von der Summe $\varepsilon_0 a_0 + \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \ldots + \varepsilon_n a_n$: Reelle a, reelle positive nie steigende ε: Abelsches Lemma. Verallgemeinerung desselben. Komplexe a, reelle positive nie steigende ε. Eigebiete. Komplexe a, reelle monotone ε. Punktsummen- und Punktdifferenzgebiete. Komplexe a, komplexe monotone ε. — II. Von der Reihe $\varepsilon_0 a_0 + \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \ldots$.: Komplexe a, reelle positive nirgends steigende ε. Komplexe a, reelle monotone ε. — III. Vom Integral $\int f(x, y)\, g(x, y, i)\, d(x + iy)$. (Verallgemeinerung des zweiten Mittelwertsatzes der bestimmten Integrale): An die Bonnetsche Form anknüpfend; $f(x, y)$ reell, auf dem Integrationswege nirgends steigend; erste Form der Verallgemeinerung, geometrische und analytische Einkleidung; zweite Form der Verallgemeinerung; $f(x, y)$ reell und monoton auf dem Integrationswege. — An die Weierstraß-Du Bois-Reymondsche Form anknüpfend. Das Randproblem: Die Bonnetsche Form des Mittelwertsatzes scheint stets eine umkehrbare Gebietsgleichung zu geben, während dies für die Du Bois-Reymondsche Form nicht unter allen Umständen gilt, und gerade in jenen Fragefällen i. a. nicht, mit deren Beantwortung sie über die Bonnetsche Form hinausgeht.

Zum Schluß möge bemerkt werden, daß die vorliegende Arbeit vielfache Berührungspunkte mit der Abhandlung von A. Schönflies „Beiträge zur Theorie der Punktmengen. II." aufweist.

Charlottenburg. G. Wallenberg.

Myller, A. Gewöhnliche Differentialgleichungen höherer Ordnung in ihrer Beziehung zu den Integralgleichungen. Diss. 36 S. gr. 8. Göttingen 1906, Dieterichsche Univ.-Buchdruckerei.

Einleitung: Die mathematische Physik hat seit langer Zeit die Mathematiker auf Integralgleichungen geführt. Trotz ihres häufigen Vorkommens sind aber die Eigenschaften und die wichtige Rolle, welche diese Gleichungen in vielen Problemen spielen, erst in der letzten Zeit bekannt geworden.

Digitized by Google

Die physikalischen Probleme, in welchen die Integralgleichungen auftraten oder auftreten konnten, wurden im allgemeinen mit Hilfe von Differentialgleichungen, die neben den Integralgleichungen als gleichberechtigt für die Untersuchung standen, gelöst.

Hilbert hat, nachdem schon Neumann und Fredholm Methoden zur Lösung von Integralgleichungen gefunden hatten, den Wert der Integralgleichungen in ganzem Umfange erkannt. In einer Reihe von Mitteilungen an die Göttinger Ges. der Wiss. betrachtet er zwei Arten von linearen Integralgleichungen: Integralgleichungen erster Art, welche die Form

$$f(s) = \int_a^b K(s,t)\,\varphi(t)\,dt,$$

und Integralgleichungen zweiter Art, welche die Form

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s,t)\,\varphi(t)\,dt$$

haben. Dabei ist $K(s,t)$ eine Funktion der reellen Veränderlichen s und t, $f(s)$ eine gegebene, $\varphi(s)$ eine zu bestimmende Funktion und λ ein Parameter. Jede der Veränderlichen kann sich im Intervalle von a bis b bewegen. Die Funktion $K(s,t)$ heißt der Kern der Integralgleichung. — In seiner ersten Mitteilung (Gött. Nachr. 1904, Heft 1) begründet Hilbert die Theorie, indem er von dem Problem der orthogonalen Transformation einer quadratischen Form von n Variabeln ausgeht und durch strenge Ausführung des Grenzüberganges für $n = \infty$ zur Lösung des transzendenten Problems der Integralgleichungen gelangt. — In der zweiten Mitteilung (l. c., Heft 3) sind Anwendungen auf Differentialgleichungen zweiter Ordnung behandelt. Hier zeigen sich die Vorteile der Methode der Integralgleichungen. Verschiedene Randwertaufgaben, gleichviel ob sie bei gewöhnlichen oder partiellen Differentialgleichungen vorkommen, und unabhängig von der Art der auferlegten Randbedingungen, können, wenn einmal die ihnen entsprechenden Integralgleichungen gefunden sind, nach derselben allgemeinen Methode untersucht werden.

An diese letzte Mitteilung von Hilbert schließt sich die vorliegende Arbeit an. Sie ist ein Beitrag zur Theorie der Randwertaufgaben bei Differentialgleichungen höherer als zweiter Ordnung. Es stellt sich heraus, daß diese Differentialgleichungen auf dieselbe Art von Integralgleichungen wie diejenige zweiter Ordnung führen. Daraus ergibt sich auch hier die Möglichkeit, die allgemeinen Sätze der Theorie der Integralgleichungen anzuwenden. Unter anderem wird die Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Funktionen, die eine Differentialgleichung höherer Ordnung befriedigen, erörtert. — Die Gleichung

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(B(x)\frac{d^2u}{dx^2}\right) = \lambda A(x)\,u,$$

welche bei der Untersuchung der transversalen Schwingungen eines elastischen dünnen Stabes vorkommt, ist als Beispiel herangezogen. Rayleigh (Theory of sound, I) hat, auf mechanische Prinzipien gestützt, diese Gleichung zuerst untersucht. Davidoglou (Ann. de l'éc. norm supér. 1900

Digitized by Google

u. 1906) hat sie später mit Hilfe der Methode der sukzessiven Annäherungen behandelt. Die Beziehungen dieser Gleichung zu der Integralgleichungstheorie hat Verf. im „Bulletin de la soc. des sciences de Bucarest" (Februar 1905) angedeutet. Im Herbst 1905 ist eine Arbeit von Westfall („Zur Theorie der Integralgleichungen", Göttingen) erschienen, in welcher viele früher in der Note des Verf. behandelte Fragen abermals in Betracht gezogen sind. — I. Gewöhnliche Differentialgleichungen vierter Ordnung. Allgemeine Betrachtungen. II. Die allgemeine Differentialgleichung des schwingenden Stabes: 1. Beide Enden festgeklemmt. 2. Beide Enden gehalten. 3. Ein Ende festgeklemmt, ein Ende gehalten. 4. Ein Ende festgeklemmt, ein Ende frei. 5. Ein Ende gehalten, ein Ende frei. 6. Beide Enden frei. III. Die Differentialgleichung des homogenen schwingenden Stabes (dieselben 6 Fälle wie in II). IV. Die Schwingungen eines spitzen Stabes. V. Erweiterung auf beliebige Differentialgleichungen gerader Ordnung.

Charlottenburg. G. Wallenberg.

Lesser, Oskar. Die Entwicklung des Funktionsbegriffes und die Pflege des funktionalen Denkens im Mathematikunterricht unsrer höheren Schulen. (Enthalten in der Festschrift zur 50-Jahrfeier der Klinger-Oberrealschule zu Frankfurt a. M.). Mit Figuren. 74 S., Lex.-8. Frankfurt a. M. 1907, Gebr. Knauer. Preis geh. *M* 1,80.

Seitdem als eines der wichtigsten Ziele der Reformbestrebungen auf dem Gebiete des mathematischen Unterrichts die klare Entwicklung des Funktionsbegriffs hingestellt ist, haben auch gleich an verschiedenen Stellen die praktischen Versuche eingesetzt, die auf die planmäßige, methodische Durchführung der soeben genannten Forderung von unten auf ausgehen. In der vorliegenden Schrift berichtet uns der Verfasser über seinen Ideengang, soweit in erster Linie der Unterricht in den Mittelklassen in Betracht kommt. Er will darlegen, wie man der Aufforderung der Lehrpläne von 1901 nachkommen kann, den Schülern ein eingehendes Verständnis des Funktionsbegriffs zu erschließen, und wie sich die Forderung von F. Klein erfüllen läßt, daß der Funktionsbegriff den ganzen mathematischen Unterricht wie ein Ferment durchdringen soll.

Die Arbeit zerfällt in 2 Teile, nämlich 1) der Funktionsbegriff im Unterricht der Arithmetik und der Algebra, 2) das funktionale Denken im geometrischen Unterricht.

In dem ersten Teile wird unter Auseinanderhaltung der einzelnen Klassenstufen von Quarta bis Untersekunda in eingehender Weise entwickelt, wie das Prinzip der graphischen Darstellung in allen Teilen des algebraisch-arithmetischen Unterrichts von Anbeginn an eine vorherrschende Rolle zugewiesen erhalten kann, und wie es den Schüler befähigt, nicht — wie bei der gewöhnlichen Lösung von Gleichungen — nur ein Augenblicksbild oder einen Spezialfall, sondern den völligen Zusammenhang zwischen den jeweils in Betracht kommenden Größen zu überschauen. Von den Elementen der Arithmetik an bis zu den quadratischen und höheren Gleichungen, den trigonometrischen Funktionen und den Logarithmen findet es andauernde Verwendung. Bei den Logarithmen würde ich es allerdings in der Weise angewandt haben — wie ich es in Hamburg an der Oberrealschule vor dem Holstentore im letzten Sommer in der Tat gemacht habe —, daß ich zunächst auf gewöhnlichem

Digitized by Google

Wege durch fortgesetzte Quadratwurzelausziehung bis auf höchstens 3 Dezimalstellen die Werte von $\sqrt{10}$, $\sqrt[4]{10}$, $(\sqrt[4]{10})^3$, $\sqrt[8]{10}$, $(\sqrt[8]{10})^3$, $(\sqrt[8]{10})^5$ und $(\sqrt[8]{10})^7$ bestimmen lasse. Die erhaltenen Zahlen werden unter Hinzunahme von 10^0 und 10^1 zu einem graphischen Bilde vereinigt, welches dann sofort auch bis auf 2 Dezimalen die Ablesung der Werte von log 2, log 3, $\cdots$ log 9 gestattet. Ehe der Schüler überhaupt eine gedruckte Logarithmentafel in die Hand bekommt, hat er sich auf die angegebene Weise in den Besitz einer graphischen Tabelle gesetzt und selbst die ungefähren Werte einiger Logarithmen gefunden.

Im zweiten die Geometrie betreffenden Teile zeigt der Verf. in fesselnder Weise, wie fruchtbar sich die Erfassung des Abhängigkeitsbegriffs auch hier erweist, und wie es bei geometrischen Problemen immer darauf ankommt, ein durch die Aufgabe bestimmtes Funktionsintervall deutlich zu erkennen. In diesem Zusammenhange kommt er dann auf die Diskussion der sog. unbrauchbaren, dem Sinn einer Aufgabe zunächst nicht entsprechenden Lösungen, die aber sehr häufig, z. B. bei Einführung negativer Flächen, doch einen vernünftigen Sinn haben. Besonderes Gewicht wird auf die klare Begründung der Determination bei geometrischen Aufgaben aller Art gelegt. Um präzise Determinationen zu gewinnen, muß man in jedem Falle die ganze Reihe der erhaltenen Konstruktionsbilder unter stetiger Variierung eines der Bestimmungsstücke durchlaufen, womit wieder durch das Prinzip der Beweglichkeit der Figuren dem Funktionsbegriff auch hier eine führende Rolle zufällt. Wenn so der geometrische Unterricht an Leben und Frische gewinnt, so soll damit doch nicht à tout prix die euklidische Beweismethode ganz aufgegeben werden. Nach dem Verfasser wird man gerade auf der Mittelstufe zweckmäßig so verfahren können, daß nach Auffindung und Formulierung eines Satzes durch Behandlung voraufgegangener Aufgaben der strenge Beweis folgt. Bezüglich der Fassung der Lehrsätze wird möglichst Zusammenfassung verwandter Sätze zu einem allgemeineren Satze empfohlen. Schließlich wird angeregt, für die Kegelschnitte eine mehr aus allgemeineren Gesichtspunkten fließende, gemeinschaftliche Form der Behandlung anzustreben und eine Trennung erst dann eintreten zu lassen, wenn es sich um das Studium der besonderen Eigenschaften der einzelnen Kurven handelt.

Beigegeben ist der Arbeit eine ganze Reihe gut ausgeführter graphischer Darstellungen sowie ein ausführlicheres Verzeichnis von Arbeiten, auf die sich der Text bezieht.

In Anbetracht der sorgfältigen Form der Darstellung und der Wärme des Tones, die das Ganze beherrscht, wird sich die Lektüre der Abhandlung für jeden auf Fortschritt im Unterricht bedachten Schulmann zu einem rechten Genuß gestalten und nachhaltige Anregungen hinterlassen.

Hamburg. J. Schröder.

Fack, Michael. Zur didaktischen Darstellung von Stoffen aus der niederen und höheren Mathematik. 50 S. mit 1 Tafel. gr. 8. (Beiträge zur Lehrerbildung und Lehrerfortbildung, 37. Heft, hrsg. von K. Muthesius.) Gotha 1907, E. F. Thienemann. Preis geh. *M* 1,40.

Die Abhandlung beginnt im ersten ihrer 7 Kapitel mit höchst sonderbaren, man könnte sagen, mystischen Auslassungen über den Funktionsbegriff und versteigt sich sogar zu folgendem famosen Satze (p. 7): „Manche Mathe-

Digitized by Google

matiker betonen bei der Definition der Funktion die Abhängigkeit gewisser Größen. Daher auch die Redeweisen: 'Die Ordinate ist eine Funktion der Abszisse'. 'Die Fallstrecke ist eine Funktion der Fallzeit'. Usf. Für uns handelt es sich in der Funktion um die Form gewisser Zahlwerte, und es kommt uns wenig darauf an, ob gewisse Größen in der einen oder andern äußeren Weise von einander abhängig sind. Will man in der Definition des Begriffs der Funktion auf den Begriff der Abhängigkeit Bezug nehmen, so möge man wenigstens nur von der Abhängigkeit gewisser Maßzahlen, also von einer arithmetischen Abhängigkeit, reden." Dieser eine Satz, dem eine ganze Herde ähnlicher Expektorationen folgt, kennzeichnet schon zur Genüge das ganze Elaborat, das augenscheinlich auch noch durch die Menge der Literaturhinweise den Anspruch auf Wissenschaftlichkeit erheben möchte. Solche Aufsätze aber werden von jedem Fach- und Sachverständigen a limine zurückgewiesen!

Hamburg. J. Schröder.

Schülke, A. Differential- und Integralrechnung im Unterricht. Mit 7 Figuren im Text. 30 S. gr. 8. Leipzig und Berlin 1907, B. G. Teubner. Preis geh. ℳ 1,—.

Nicht eine vollständige systematische Behandlung der Grundzüge der Differential- und Integralrechnung beabsichtigt diese kleine Schrift zu geben, sondern der Verfasser will „aus dem weiten Gebiete einen Ausschnitt geben, der in der Schule leicht bewältigt werden kann und zugleich durch das Zusammenwirken von reiner und angewandter Mathematik dem Schüler die Grundlagen der Infinitesimalrechnung zu voller Klarheit bringt." Auf 24 Seiten wird, zum Teil in gedrängtester Form, der sich in 3 Hauptabschnitte gliedernde Stoff behandelt. Das erste Kapitel (Differentialrechnung) bringt Erörterungen über das Wachstum einer Funktion, den Grenzwert, den Differentialquotienten, die Fehlerbestimmung, Maximalaufgaben, über den zweiten Differentialquotienten, Anwendungen auf die Physik, die Umkehrung der Differentialrechnung und endlich unter weiteren Übungen noch insbesondere einiges über die Exponentialfunktion und den Logarithmus. Im zweiten Kapitel (Integralrechnung) folgt die Behandlung von Potenzsummen, die Auswertung der Inhalte von Flächen und Rotationskörpern, die Bestimmung des Drehmomentes und Schwerpunktes, des Trägheitsmomentes und der Arbeit. Das letzte Kapitel enthält die Schnittpunktsbestimmung von Geraden und Kurven, die Ermittlung des Krümmungskreises, Newtons Näherungsmethode, die Theorie der Interpolation und der Reihen.

Was die Form der Darstellung angeht, so ist sie klar und einfach, allerdings stellenweise etwas knapp gehalten, wie z. B. p. 16 bei Behandlung der Maximalaufgaben und p. 23 bei der Bestimmung des Drehmomentes und Schwerpunktes, wo auch die Formulierung der Aufgabe erwünscht gewesen wäre. Daß der Verfasser die Heranziehung des Grenzbegriffes erst auf ein späteres Stadium verschiebt und ihn nicht, was ich unter anderen Bedingungen ohne weiteres befürworten würde, zur Grundlage schon der ersten Differentiationsübungen macht, rechtfertigt sich durch den vom Verfasser gemachten Vorschlag, den Anfang der Differentialrechnung bereits in Obersekunda mit der Aufstellung der Differentiale rationaler ganzer Funktionen zu machen.

Digitized by Google

Von da ab soll dann, überall wo sich eine passende Gelegenheit darbietet, der Unterricht mit Betrachtungsweisen der Infinitesimalrechnung durchsetzt werden. Auf solche Weise will der Verfasser, der ja in Fachkreisen längst als ein eifriger Verfechter der auf eine zeitgemäße Reform des mathematischen Unterrichts abzielenden Bestrebungen bekannt ist, dem Unterricht die ersprießliche Gestaltung mitverleihen helfen, die man vor allem von der stärkeren Betonung des Funktionsbegriffes erhofft. Diesem Endzwecke dienen natürlich auch die zum Teil hübsch ausgewählten Aufgaben aus den mancherlei Anwendungsgebieten, insbesondere für die Fehlerbestimmung. Im Schlußkapitel hat die etwas mühsame Behandlung des Krümmungskreises meinen Beifall nicht gefunden, dagegen empfehle ich die Art, wie der Verfasser die Reihenentwicklungen unter Betonung der Approximation durch Parabeln verschiedener Ordnung durchführt, der Beachtung der Fachkreise. Die Namen „Maclaurinsche“ und „Taylorsche Reihe finden sich allerdings im Texte nicht.

Ich bin überzeugt, daß das Buch sich vielen Fachgenossen, die den Reformbestrebungen sympathisch gegenüberstehen, als ein brauchbarer Berater erweisen wird, zumal wenn das in den bereits früher erschienenen Aufgabensammlungen des Verfassers vorliegende Material mit herangezogen wird.

Hamburg. J. Schröder.

Adler, A. Theorie der geometrischen Konstruktionen. Sammlung Schubert LII. Mit 177 Figuren. VIII u. 301 S. 8. Leipzig 1906, C. J. Göschen. Preis geb. ℳ 9,—.

In der bewährten Schubert-Sammlung ist als 52. Band ein kleines Meisterwerk erschienen, welches von allen Mathematikern, insbesondere von Freunden der Geometrie, mit großer Freude begrüßt werden wird; Ref. kann wohl sagen, daß er selten durch das Studium eines Lehrbuches in gleicher Weise angeregt worden ist. Verf. hält vollauf, was er in den folgenden Stellen des Vorwortes verspricht: „Dieses Buch ist dem Wunsche entsprungen, die anziehenden und für den Anfänger ungemein anregenden Methoden und Theorien zur Auflösung geometrischer Konstruktionsaufgaben in zusammenhängender Weise und mit einer gewissen Vollständigkeit darzustellen. Es setzt keine eingehenderen Kenntnisse aus der höheren Mathematik voraus; alle notwendigen Hilfssätze werden angegeben; der Beweis derselben wird aber oft nur angedeutet, sodaß der kundige Leser nicht ermüdet, während der Anfänger zum Beweise dieser einfachen Sätze angespornt wird. — Um seinen Zweck als Lehrbuch zu erfüllen, sind zahlreiche Übungsaufgaben hinzugefügt worden, deren Lösungen meist kurz angegeben werden. Ein Teil des Lehrstoffes konnte in diesen Aufgaben untergebracht werden, sodaß der Leser trotz des mäßigen Umfanges des Buches über alle rein geometrischen Fragen, welche die geometrischen Konstruktionen betreffen, orientiert wird“. — Es möge nun in großen Umrissen das reichhaltige Inhaltsverzeichnis folgen:

Einleitung (geschichtlicher Überblick). I. Abschnitt: Methoden zur Auflösung geometrischer Konstruktionsaufgaben. II. Abschnitt: Konstruktionen, ausgeführt durch bloßes Ziehen von geraden Linien, wenn gegebene Figuren zur Benutzung vorliegen. (Steinersche Konstruktionen). III. Abschnitt: Konstruktionen, ausgeführt durch bloßes Schlagen von Kreisbogen. (Mascheroni-

Digitized by Google

sche Konstruktionen). IV. Abschnitt: Konstruktionen mit Hilfe eines Parallellineales (zwei parallele Linien in konstantem Abstande); Konstruktionen mit Hilfe eines beweglichen rechten und eines beliebigen Winkels; Konstruktionen mittels des Lineales und eines Eichmaßes; Konstruktionen mittels des Winkelhalbierers. V. Abschnitt: Konstruktionsaufgaben ersten und zweiten Grades. VI. Abschnitt: Unmöglichkeitsbeweise. VII. Abschnitt: Kreisteilung. (Konstruktion regelmäßiger Polygone). VIII. Abschnitt: Geometrische Konstruktionen dritten und vierten Grades (Verdoppelung des Würfels; Trisektion des Winkels; Graphische Auflösung der Gleichungen dritten und vierten Grades). IX. Abschnitt: Geschichtliche Bemerkungen über die Quadratur des Zirkels; näherungsweise Rektifikation des Kreises; Regeln für genaues Konstruieren. X. Abschnitt: Geometrographie.

Zum Schluß noch einige Wünsche des Ref. im Interesse des Werkchens für eine eventuelle Neuauflage: 1. Berichtigung einiger störender Druckfehler (S. 33, Fig. 25 (statt 52); S. 266 Ludolf, S. 267 Liouville) und Unrichtigkeiten (S. 39 Dreieck APB *nicht* $\sim A'P'B'$). 2. Beseitigung einiger stilistischer und sachlicher Mängel (S. 244 „In dem Winkel gehören . . .“; S. 93 fehlt die Bestimmung des Punktes E). 3. Eingehendere Berücksichtigung der Konstruktionen bei ungünstigen Lageverhältnissen (schleifender oder unzugänglicher Schnitt: Benutzung des Höhensatzes). 4. Die elementare Parallelenkonstruktion des Ref. mittels des Parallellineals. 5. Die Güntschesche Konstruktion des regelmäßigen 17-Ecks (Ber. d. B. M. G. **2**, 10—15). 6. Reichhaltigere Literatur über die Winkelteilung und die Konstruktionen dritten und vierten Grades (z. B. Lampe Ber. d. B. M. G. **5**, 17—27; London, Schlömilch Z. **41**, 129—152). 7. Ausführlichere Behandlung der „Genauigkeit geometrischer Konstruktionen“ (Die Bravaissche Fehlerellipse, vergl. z. B. Haentzschel, Ber. d. B. M. G. **5**, 54—57). 8. Eventuell Konstruktionen der absoluten Geometrie.

Es sei ausdrücklich hervorgehoben, daß diese wenigen Ausstellungen den Wert des Buches in keiner Weise beeinträchtigen. Das verdienstliche, mit zahlreichen Figuren ausgestattete Werkchen kann allen Freunden der Geometrie, insbesondere Autodidakten und Lehrern dieses Faches warm empfohlen werden: sie werden auf alle einschlägigen Fragen dort die Antwort finden sowie vielfache Anregung und Bereicherung des Lehrstoffes, zu der Verf. selbst durch seine Arbeiten auf diesem Gebiete nicht wenig beigetragen hat. — Das Lehrbuch darf fortan in keiner Schulbibliothek fehlen.

Charlottenburg. G. Wallenberg.

Fuchs, L. Gesammelte Mathematische Werke. Herausgegeben von R. Fuchs und L. Schlesinger. 2. Band: Abhandlungen (1875—1887), redigiert von L. Schlesinger. X u. 485 S. Lex.-8. Berlin 1906, Mayer u. Müller. Preis geh. ℳ 30,—, geb. ℳ 34,50.

Der jetzt vorliegende zweite Band der gesammelten mathematischen Werke von L. Fuchs, deren erster Band bei seinem Erscheinen vom Ref. in dieser Zeitschrift eingehend besprochen worden ist, enthält die 35 in der Zeit von Ostern 1875 bis Ende des Jahres 1887 veröffentlichten Abhandlungen. Die redaktionelle Arbeit wurde in derselben sorgfältigen Weise wie beim ersten Bande ausgeführt; die in diesem Bande besonders zahlreichen in französischer

Digitized by Google

Sprache geschriebenen Arbeiten hat wieder Herr H. Vogt in sprachlicher Hinsicht revidiert.

Aus den im Nachlaß vorgefundenen, an Fuchs gerichteten Briefen von Ch. Hermite konnte der Herausgeber in den Anmerkungen zu den Abhandlungen XXIV und XXVI einige für die Entstehungsgeschichte dieser Arbeiten wichtige Auszüge mitteilen.

Auch dieser Band enthält mehrere Arbeiten, die bahnbrechend gewirkt haben: zunächst die beiden in Crelles Journal erschienenen klassischen Abhandlungen über die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche algebraische Integrale besitzen; diese haben ebenso wie die spätere hierher gehörige Arbeit aus den Acta Mathematica (Bd. 1) „Über lineare homogene Differentialgleichungen, zwischen deren Integralen homogene Relationen höheren als ersten Grades bestehen" eine reiche Literatur auf den verschiedensten Gebieten der Mathematik, wie Invariantentheorie, Gruppentheorie und selbst Geometrie, hervorgerufen. — Eine zweite Gruppe von Arbeiten beschäftigt sich mit den Umkehrungsproblemen, zu denen die Lösungen der linearen Differentialgleichungen Anlaß bieten; sie stellen eine Erweiterung der einschlägigen Untersuchungen von Abel und Jacobi dar und haben Herrn Poincaré zu seiner großartigen Schöpfung der Fuchsschen Funktionen die erste Anregung gegeben.

Von prinzipieller Wichtigkeit sind endlich einige Abhandlungen aus der Theorie der algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung, so diejenigen über die Form des allgemeinen Integrals, falls es algebraisch ist, und über die „Punkte der Unbestimmtheit" (eine von Fuchs eingeführte Terminologie) der Lösungen einer Differentialgleichung erster Ordnung; insbesondere aber die Arbeit „Über Differentialgleichungen, deren Integrale feste Verzweigungspunkte besitzen"; diese, eine Erweiterung der Arbeiten von Briot und Bouquet, bildet den Ausgangspunkt für eine ganze Reihe von neuen Untersuchungen, die hauptsächlich mit den Namen Hamburger, Picard, Poincaré und Painlevé verknüpft sind.

Charlottenburg. G. Wallenberg.

Weinstein, B. Die philosophischen Grundlagen der Wissenschaften. Vorlesungen, gehalten an der Universität Berlin. XIV u. 543 S. 8. Leipzig und Berlin 1906, B. G. Teubner. Preis geb. ℳ 9,—.

Der Verfasser hat sich die Aufgabe gestellt, die Stammbegriffe und die letzten Grundsätze der Wissenschaft in leicht verständlicher Form, dabei in voller Gründlichkeit darzustellen, die vorhandenen Abhängigkeiten der Begriffe und Sätze von einander hervortreten zu lassen und die in unserem Seelenvermögen liegenden Quellen der Erkenntnis aufzuzeigen; die allgemeine Naturwissenschaft bildet den Hauptgegenstand der Untersuchung, doch handeln die letzten drei Vorlesungen auch von der Dichtung und dem Leben. Das Werk bietet durchaus selbständig Erdachtes und, wo es auf den Schultern anderer ruht, innerlich Angeeignetes; dabei ist sein Inhalt ungemein reichhaltig und vielseitig; das Weltganze, wie es in der Erfahrung sich darstellt, sucht es erklärend und deutend zu umfassen, ohne die Entwickelung in den festen Rahmen einer vorgefaßten Lehrmeinung einzuspannen. Dieses Verfahren bewahrt sicher vor Einseitigkeit, erschwert indessen dem Leser die Übersicht, zumal Wiederholungen und Hinweise auf spätere Erörterungen auffallend häufig sind.

Digitized by Google

Die ersten sechs Vorlesungen, etwa ein Sechstel des Buches, handeln von dem Begriff und der Einteilung der Grundlagen überhaupt, von der Seele und ihren Tätigkeiten, aus denen weiterhin die äußere und die innere Welt abgeleitet wird. Nachdem dann vom Erkennen und Wahrnehmen die Rede gewesen ist, werden der Zeitlichkeit, der Räumlichkeit, der Substanzialität und der Ursächlichkeit als den Stammbegriffen der Seele die zugehörigen Vergegenständlichungen, nämlich der Raum, die Zeit, die Substanz und die Ursachen entgegengestellt. Vorlesungen über die Vorgänge und die Erscheinungen, die Einheit und die Erhaltung der Welt, die Erfahrung und die Hypothesen bilden den Schluß der naturphilosophischen Betrachtungen. Ziemlich ausgedehnt behandelt dabei der Verfasser die Dreidimensionalität des Raumes, die Theorie der Materie, das Energieprinzip, die Entropie und das Prinzip der kleinsten Wirkung.

Wegen seiner Selbständigkeit und seiner Mannigfaltigkeit kann das Buch keiner bestimmten Schule zugerechnet werden. Sein philosophischer Grundgedanke ist der Kantische des transzendentalen Idealismus; Raum, Zeit, Substanzen und Ursachen sind die durch die Seelentätigkeit geschaffenen Formen, unter denen alle Erfahrung erscheint; in der Bemühung, die Anschauungs- und Denkformen aus einer gemeinschaftlichen Wurzel herzuleiten, folgt der Verfasser Schopenhauer. Doch wird das Verhältnis der jenseitigen zur Erfahrungswelt ebenso wenig klar, wie dies bei Kant der Fall gewesen ist; nur gegen die materialistisch-mechanistische Weltauffassung verwahrt sich der Verfasser.

Das Ziel des Buches, leicht verständlich zu sein, ist zweifellos erreicht; denn es wird überall deutlich, was gemeint ist, und wo die Ausführungen nicht hinreichen, um dem unkundigen Leser genaue Vorstellungen zu vermitteln, z. B. beim Entropiebegriff und dem Gesetz der geringsten Wirkung, tritt die Absicht, den Gegenstand nur oberflächlich zu behandeln, durchaus zutage. Weniger sicher erscheint dagegen, ob auch der Wunsch des Verfassers sich erfüllen wird, den Fachgelehrten zu dienen. Wer, wie Mach in seiner Mechanik, den historisch-kritischen Weg der Darstellung wählt, vermag den Laien zu belehren und zugleich die wissenschaftliche Einsicht zu vertiefen; da aber Herr Weinstein nicht eigentlich forschend verfährt, sondern bei Zwistigkeiten, z. B. über das Wesen der Seele, des Raumes, der Materie, die landläufigsten Meinungen nur anführt, um sich schließlich mehr oder minder bestimmt zu einer zu bekennen, ohne das Fürundwider zu endgültiger Entscheidung zu bringen, so gebührt ihm zwar das Lob weitgehender Besonnenheit; doch wird bei solchem Verfahren der Prinzipienforscher, sofern er restlose Aufklärung sucht, zumeist leer ausgehen.

Eine Eigenheit des Verfassers ist es, solche zu tadeln, die ohne die nötige Sachkenntnis über wissenschaftliche Gegenstände volkstümlich schreiben und so ihr Publikum täuschen, dagegen die Klarheit und Gediegenheit seiner Darstellung zu empfehlen. Er biete Blumen; „der Kohl aber, um beim Bilde zu bleiben, wuchert in den Nebengärten, die den Garten der Wissenschaft, wie die Buden den Mainzer Dom einengen, und die eben von Unberufenen bebaut werden" (S. 6). Würde solch Lob des Buches, zumal wenn es reichlich oft wiederkehrt, im Munde der Leser nicht anmutiger klingen?

Berlin. P. Johannesson.

Digitized by Google

Willard Gibbs, J. Scientific papers. Bd. I. Thermodynamics, mit Porträt. Bd. II. Dynamics, Vector Analysis, Multiple Algebra, Elektromagnetic theory of light. London, New York and Bombay 1906, Longmans, Green and Co.

In zwei stattlichen, sehr schön ausgestatteten Bänden liegt das wissenschaftliche Lebenswerk von Gibbs vor und das Hauptinteresse konzentriert sich natürlich auf die im ersten Bande enthaltenen thermodynamischen Abhandlungen, von denen ich die dritte: „Über das Gleichgewicht heterogener Substanzen" besonders hervorhebe. Sie nimmt drei Viertel des Bandes ein; und dokumentiert sich dadurch schon äußerlich als die bedeutungsvollste. Vorangeschickt ist den Abhandlungen eine kurze, aber von liebevoller Verehrung für Gibbs zeugende Biographie, verfaßt von dem einen der beiden Herausgeber, H. A. Bumstead.

Im zweiten Bande ist unter anderem eine von Gibbs für seine Hörer geschriebene, bisher nur als Manuskript gedruckte Einführung in die Vektoranalysis enthalten, die von wundervoller Präzision und Kürze ist. Schade nur, daß die Bezeichnungsweise so total verschieden von der in der math. Enzyklopädie durchgeführten ist; die Lektüre ist auf diese Weise unnötig erschwert.

Endlich mache ich aufmerksam auf die Untersuchungen zur elektromagnetischen Lichttheorie (1882—1889), die analytisch äußerst elegant und interessant sind, wenn auch der Herausgeber, wie ich glaube, ihre Bedeutung zu hoch veranschlagt, wenn er sagt: ... „Diese Gibbsschen Arbeiten würden genügt haben, der Maxwellschen Theorie zum Siege zu verhelfen, selbst wenn die Hertzschen Entdeckungen nicht vorhanden wären." Ich glaube im Gegenteil, daß keine noch so bedeutende theoretische Untersuchung der elektromagnetischen Lichttheorie hätte zum Siege verhelfen können, ohne die Hertzschen oder ihnen äquivalente *Versuche*. Doch wird man diese Übertreibung des Herausgebers der Verehrung für den Meister der theoretischen Physik in Amerika gerne zu Gute halten. Eine weitere Empfehlung der wertvollen Ausgabe erübrigt sich demnach.

Breslau. Cl. Schaefer.

Orlich, E. Aufnahme und Analyse von Wechselstromkurven. Aus: Elektrotechnik in Einzeldarstellungen herausgegeben v. Dr. G. Benischke. 7. Heft. Mit 71 Abb. VIII u. 117 S. gr. 8. Braunschweig 1906, F. Vieweg & Sohn. Preis geh. ℳ 3,50; geb. ℳ 4,—.

Dieses Heft aus der bekannten Sammlung „Elektrotechnik in Einzeldarstellungen", kam mit der Behandlung eines gesuchten Stoffes recht zeitgemäß. Fourier hat sich in seiner Theorie der Wärme 1822 auf Reihenentwicklungen gestützt, die vor ihm bereits Taylor und Euler bei dem Problem der Saitenbewegungen angewendet hatten. Er wurde auf seine berühmten Theoreme der unendlichen periodischen Reihen geführt. Also dem praktischen Bedürfnis, zur Erkennung zusammengesetzter Erscheinungen der Natur sie in übersichtliche Teilvorgänge zu zerlegen, verdankt das Reich der reinen Mathematik den Erwerb einer neuen fruchtbaren Provinz. Die Fouriersche Reihe bot eine scharfe Waffe dar, mit der man in allen Gebieten der Naturwissenschaften vielen Fragen erfolgreich an den Leib rücken konnte. So ist es auch in allen Ge-

Digitized by Google

bieten der technischen Wissenschaften geblieben. Nicht nur der reine Mathematiker und Physiker, sondern auch der Techniker kann ihrer nicht mehr entraten. Beim Massenausgleichsproblem, in der Hydraulik, bei den Wechselstromaufgaben, überall begegnet er den periodischen Kurven und diesen Fourierschen Reihen. Mit den Instrumenten zur Kurvenaufnahme war ein Werkzeug geschaffen worden, mit dem man, gleichwie der Dampfmaschinenbauer mit dem Dampfindikator, den Vorgängen den Puls fühlen konnte. Aus den wissenschaftlichen Laboratorien mit ihren idealen Zwecken nahmen diese Apparate ihren Weg in die gelderwerbenden Probiersäle der elektrischen Fabriken, ein Beweis, wie sie zum täglichen Bedürfnis geworden waren. Fast in jedem Hefte eines technischen Blattes wird das Thema infolge seines weiten Einflusses berührt. Dem Schreiber dieses wird z. B. soeben die Vereinszeitschrift deutscher Ingenieure von 9. II. 1907 gebracht. Sie enthält tatsächlich die oszillographischen Aufnahmen des elektrischen Stromes und der Spannung für die Eisenbahnschienen der elektrisch betriebenen Simplonbahn. Die Lehrbücher und Vorträge über Elektrotechnik behandeln, von einzelnen abgesehen, den Gegenstand als zu mathematisch noch immer nicht gründlich und ausführlich. Von den rühmlichen Ausnahmen sei das Transformatorenbuch Feldmanns und das Wechselstromwerk Dr. Arnolds, von den Vorträgen jener meisterhafte von Prof. Seyders an der elektrotechnischen Hochschule zu Delft über Einleitung in die Elektrotechnik hervorgehoben. Und das vorliegende Buch behandelt erfreulicherweise den Gegenstand als Monographie, womit es nach allen obigen Bemerkungen einem wirklichen, beileibe keinem papierenen Bedürfnisse nachkommt.

Das Heft gliedert den Stoff in vier Teile: Die mathematische Darstellung von Strömen beliebiger Kurvenform, die Kurvenaufnahmen, die experimentelle und mathematische Analyse und die harmonischen Analysatoren.

Auf den Seiten 1—11 wird die mathematische Darstellung von Kurvenformen hinsichtlich der Fourierschen Reihen erörtert. Aus der Trapezform werden die dreieckige und rechteckige entwickelt. Die wichtigen Begriffe der Form- und Scheitelfaktoren, der effektiven Spannungs- und Stromwerte, sowie der Mittelwerte folgen.

Nun finden auf 51 Seiten die Methoden und die Beschreibung der Apparate für Kurvenaufnahmen Platz. Vorerst für punktförmige Aufnahmen die Frankeschen und Hospitalierschen, worauf sich die Kompensationsmethode und die Apparate von Goldschmidt und Ryan anschließen. Dann wird der elektrochemischen Methoden von Grützner, Janet und der geistreichen Verbesserung von Prof. Blondel gedacht. Ausführlich wird nebst einer Theorie der Oszillographen der Apparat von Gehrcke mit Glimmlicht erörtert. Der dritte Teil von Seite 13—65 fügt sich mit der experimentellen und mathematischen Analyse naturgemäß an. Für die erstere wird auf des Coudres' Lösung und andre, bei der letzteren namentlich auf Houston und Kennelly, sowie Fischer-Hinnen hingewiesen. Eine neuere, an diese anschließende Methode ist nach dem Erscheinen dieses Buches durch K. H. Haga (Archiv d. Math. (3) **11**, 239—244, 1907) veröffentlicht worden.

In den Seiten 90—109 werden die harmonischen Analysatoren zur mechanischen Zergliederung der Kurven von Kelvin, Henrici, Coradi und anderen beschrieben. Der Apparat von Michelson und Stratton wird warm empfohlen. Ein vollständiger Literaturnachweis und eine Namen- und Sach-

Digitized by Google

liste beschließen das Buch, welches nicht nur dem Inhalte sondern auch der äußeren Form nach allen gerechten Anforderungen entspricht. Er läßt keinen anderen Wunsch beim Leser aufkommen, als sich beim berufenen Verfasser für seine schöne Gabe zu bedanken, der gewiß eine weite Verbreitung und eine dauernde Anerkennung beschieden sein wird.

Budapest. JOSEPH HERZOG.

Schulz-Euler. Leonhard Euler. Ein Lebensbild zu seinem 200. Geburtstage nach Quellen und Familienpapieren. Mit zwei Porträts 39 S. Frankfurt a. M. 1907, C. Fr. Schulz. Preis geh. ℳ 1,50.

Aus der interessanten Schrift, die einen Nachkommen Eulers zum Verfasser hat, ist besonders hervorzuheben, daß in der Eulerschen Familie der vierte April als Geburtstag des großen Mathematikers angesehen wird auf Grund der biographischen Notizen, die Eulers ältester Sohn auf ein Holztäfelchen, welches sich unter Glas auf der Rückseite des Handmannschen Kupferstiches befindet, aufgeschrieben hat. Dabei ist allerdings zu bemerken, daß der 15. April im heutigen Kalender dem 4. des alten Kalenders entspricht.

In Ergänzung seiner Schrift verdanke ich dem Herrn Verfasser noch die liebenswürdige Mitteilung, daß sein Großvater, der im Jahre 1885 zu Frankfurt a. M. verstorbene Geheime Justizrat Dr. L. H. Euler, manche Euler-Reliquie besessen habe, daß aber nach seinem Tode seine Sammlungen, Handschriften, Wappen und Familienpapiere an das Germanische Nationalmuseum zu Nürnberg gekommen sind. Vielleicht, daß sich an dieser Stelle noch neue Eulerbilder und Eulerbriefe finden dürften.

Und weiter teilt mir der Herr Verfasser mit, daß er im Besitze des Siegelringes Leonhards ist, welcher das bekannte Wappen Eulers (ein springendes Pferd) trägt.

Von den beiden Porträts, die der Schrift beigegeben sind, ist eins die Wiedergabe des oben erwähnten Handmannschen Kupferstiches (1756), während das andere von Darbes (1782) herrühren soll.

Berlin. E. JAHNKE.

Zimmermann, H. Rechentafel nebst Sammlung häufig gebrauchter Zahlenwerte. 5. Auflage. XXXIV u. 204 S. Lex.-8. Berlin 1907, W. Ernst und Sohn. Preis geb. ℳ 5,00.

Die sichere Handhabung und allseitige Verwertung des Rechenschiebers verlangt, außer der Kenntnis der Logarithmen, ein scharfes Auge und viele Übung im Ablesen und Schätzen von Teilungswerten. Dabei liefert der Rechenschieber die gesuchten Zahlen nur mit mäßiger Genauigkeit. Die vorliegende Tafel bietet einen Ersatz für den Rechenschieber. Es ist eine einfache, handliche Rechentafel, deren Hauptinhalt gewissermaßen ein großes Einmaleins bildet, welchem am Fuße jeder Seite noch die Quadrat- und Kubikzahlen, die Quadrat- und Kubikwurzeln, die Kreisbogenlängen und Kreisinhalte und die reziproken Werte und Logarithmen angereiht sind. Da also die vorliegende Tafel in erster Linie diejenigen Rechnungen erleichtern soll, die sich logarithmisch weniger bequem ausführen lassen, so sind die Logarithmen nur aufgenommen, um sie für einige seltene, in anderer Weise schwer zu behandelnde

Digitized by Google

Fälle (Berechnung einer höheren Wurzel, Auflösung einer Exponentialgleichung u. dgl.) bereit zu haben.

Im übrigen läßt das Erscheinen der fünften Auflage erkennen, daß sich das Buch andauernden Beifalls zu erfreuen hat. Als Beweis für das große Vertrauen, das in die Zuverlässigkeit der Tafel allenthalben gesetzt wird, verdient noch hervorgehoben zu werden, daß die Rechentafel durch einen Erlaß des Preußischen Ministers der öffentlichen Arbeiten für den Dienstgebrauch empfohlen worden ist.

Berlin. E. Jahnke.

P. Duhem. Les origines de la statique. Tome premier, Paris 1905. A. Hermann.

Bis in die letzte Zeit hinein waren die Vorstellungen, welche uns die Lehrbücher über das Werden der Mechanik gaben, etwa die folgenden: Aristoteles besitzt einige unklare Ideen von dem Prinzip der virtuellen Arbeiten, Archimedes beweist den Hebelsatz. Dann kommt das ganze Mittelalter hindurch gar nichts von Bedeutung, erst Lionardo da Vinci, Cardano und Guido Ubaldo arbeiten im Aristotelischen Gedankenkreise weiter, ohne jedoch zu durchgreifenden Erfolgen zu kommen; und dann erst, am Ende des 16. Jahrhunderts beginnt die moderne machtvolle Entfaltung der Mechanik mit Simon Stevins Endeckung der Gesetze der schiefen Ebene und des Kräfteparallelogrammes, sowie mit Galileis Erforschung des freien Falles.

Wie kindlich aber diese Ansichten vom Entstehen der Mechanik, speziell der Statik als Wissenschaft waren, zeigt uns das vorliegende Werk Duhems. Nachdem schon andere Forscher einzelne dunkle Punkte in der Geschichte der Mechanik aufgehellt hatten, gibt uns hier Duhem einen zusammenhängenden Abriß der ganzen Entwicklung der Statik bis auf Descartes und stützt sich dabei, soweit ich es als Nichthistoriker beurteilen kann, auf zahlreiches, neu gesammeltes, sorgfältig und scharfsinnig bearbeitetes Material. Wir haben hier zweifellos den ersten Band einer Geschichte der Mechanik großen Stils vor uns.

Wie sieht nun bei Duhem der Werdegang der Statik aus? An dem Bild, das wir uns von den Leistungen der Alten machten, ändert er nicht viel: Aristoteles kommt zum richtigen Hebelgesetz auf einem recht unklaren Wege von seinen uns heute falsch erscheinenden kinetischen Anschauungen her; Archimedes beweist den Satz in großer Strenge aus gewissen einfachen, jedermann einleuchtenden Axiomen. Die anderen Schriften, die uns aus dem Altertum erhalten sind und meist der alexandrinischen Schule angehören, bringen außer den Schwerpunktssätzen, die zum Teil auch schon Archimedes angehören, für die Statik der festen Körper nichts wesentlich Neues, auch nicht die Schriften der Araber, die sich als Übersetzungen griechischer Arbeiten erweisen.

Die neue Entwicklung beginnt mit Jordanus de Nemore, von dessen Person man leider noch nichts sicher weiß, als daß er etwa um 1200 gelebt hat.[1]) Er beschäftigt sich ausschließlich mit dem Hebelgesetz und kommt sachlich nicht wesentlich weiter als die Alten; was aber wichtig ist, er begründet das Hebelgesetz durch ein neues klares und richtiges Prinzip: „Das, was ein

1) Ich möchte hier auf den beachtenswerten Umstand hinweisen, daß Chamberlain, der Verfasser der „Grundlagen des 19. Jahrhunderts“ die moderne Kulturgeschichte überhaupt um 1200 beginnen läßt.

Digitized by Google

gewisses Gewicht auf eine gewisse Höhe emporheben kann, kann auch ein k mal so großes Gewicht auf eine k mal kleinere Höhe heben." Darin steckt deutlich der Begriff der Arbeit; und Jordanus wendet das Prinzip so an, wie wir heute das Prinzip der virtuellen Arbeiten gebrauchen.

Ein anderer Autor, der in alten Schriften mit Jordanus identifiziert wird, den aber Duhem für jünger hält und den Vorläufer Lionardos nennt, vermag mit diesem Prinzip bereits im 13. Jahrhundert das Gesetz der schiefen Ebene richtig aufzustellen; auch erscheint bei ihm bereits der allgemeine Momentbegriff für ebene Kraftsysteme.

Die Schule des Jordanus beherrscht dann die folgenden Jahrhunderte, obwohl manche wertvolle Erkenntnis, wie das Gesetz der schiefen Ebene, fast ganz wieder verloren geht.

Lionardo da Vinci, der selbst nichts veröffentlicht hat, dessen ungemein reichhaltige Aufzeichnungen aber seine Nachfolger in schamlosester Weise geplündert und in alle Welt zerstreut haben, bereichert die Wissenschaft der Statik namentlich durch zwei wertvolle Gedanken: erstens erkennt er, daß bei drei an einem Punkte sich das Gleichgewicht haltenden Kräften die Momente zweier der Kräfte, bezogen auf einen Punkt in der Angriffslinie der dritten Kraft, einander gleich sein müssen. Merkwürdigerweise gelingt es ihm nicht, daraus das Parallelogramm der Kräfte zu finden, er stellt vielmehr darüber eine ganz falsche Behauptung auf. Zweitens betont er die Unmöglichkeit des Perpetuum mobile und trägt dadurch zur Ausbildung des Arbeitsbegriffes bei.

Guido Ubaldo und Benedetti erscheinen dann Duhem als die Träger einer Reaktion gegen Jordanus. Sie unterwerfen seine Untersuchungen einer zum Teil berechtigten, zum Teil kindischen Kritik, ohne selbst wesentlich Besseres zu leisten und tragen eher dazu bei, seine Resultate vergessen zu machen. Mir will aber scheinen, als ob bei Benedetti insofern wenigstens ein Fortschritt zu bemerken sei, als der Grundsatz der Verschiebbarkeit einer Kraft in ihrer Angriffslinie als Mittel für die Begründung des Momentensatzes zum mindesten angedeutet ist.

Simon Stevin und Galilei stellen nach dieser kritischen Epoche zunächst noch einmal wieder alles sicher, was die Vorgänger schon gehabt haben: den allgemeinen Hebelsatz, das Gesetz der schiefen Ebene. Dazu kommt bei Stevin als ganz neues Ergebnis das Parallelogramm der Kräfte.

Roberval begründet einige Sätze Stevins besser, als es diesem gelungen war, und Descartes endlich spricht das Gesetz der virtuellen Arbeiten schärfer aus als seine Vorgänger: er erkennt zum erstenmale ganz klar den virtuellen Charakter der Verschiebungen und die Tatsache, daß man sich die Verschiebungen unendlich klein zu denken hat.

Mit Descartes schließt der vorliegende erste Band des Duhemschen Werkes ab. Die ganze Entwicklung der Statik, wie sie Duhem sich vor unsern Augen entfalten läßt, zeigt eine außerordentliche Kontinuität. So erwächst aus dem Aristotelischen Chaos der klare Gedanke des Jordanus, der wieder alle seine Nachfolger beeinflußt, und selbst Simon Stevin, der sonst die ganze Richtung des Jordanus als unstreng verwirft und wieder an Archimedes anknüpft, nimmt doch als Grundsatz, auf den er seine Gesetze der schiefen Ebene stützt, die Unmöglichkeit des Perpetuum mobile an, den doch Lionardo gefunden hat, indem er die Gedanken des Jordanus weiter verfolgte. So kommt denn Duhem zu dem Ausspruch, der den Grundgedanken des ganzen

Digitized by Google

Werkes darstellt[1]): „La science mécanique et physique dont s'enorgueillissent à bon droit les temps modernes découle, par une suite ininterrompue de perfectionnements à peine sensibles, des doctrines professées au sein des écoles du moyen âge; les prétendues révolutions intellectuelles n'ont été, le plus souvent, que des évolutions lentes et longuement préparées; les soi-disant renaissances que des réactions fréquemment injustes et steriles; le respect de la tradition est une condition essentielle du progrès scientifique." Wohl eine Überspannung dieses gewiß im ganzen richtigen Satzes hat aber nun den Verfasser verleitet, Galilei in seiner Bedeutung als Begründer einer neuen Kinetik im Gegensatz zur alten Aristotelischen anzugreifen, ja abzusetzen, indem er erklärt[2]): „Jamais Galilée n'a cessé de croire à l'axiome peripatéticien qui proclamait la proportionnalité entre la force et la vitesse; l'opinion qui en fait le créateur de la Dynamique moderne est une légende controuvée."

Ich fürchte, die Tendenz hat hier dem Verfasser einen Streich gespielt. Wenigstens kann ich die angeführten Stellen, welche die obige Behauptung begründen sollen, nicht als zureichend anerkennen. Zunächst beweisen einige Stellen aus älteren Werken Galileis sicher nichts für das „Jamais", zumal wenn sie mit Ergebnissen der Discorsi in Widerspruch stehen. Außerdem kann man bei alten Schriftstellern aus einzelnen Textstellen ohne Kenntnis des ganzen Zusammenhanges nie mit Sicherheit ihre Meinung erschließen; sie drücken sich manchmal ungenau aus, ringen nach Worten — Galilei braucht oft vier Worte für eine Sache — und im besonderen halte ich den Ausdruck: eine Kraft „erzeugt", eine Geschwindigkeit, oder „ruft sie hervor" dem $mdv = kdt$ sogar noch für angemessener, als wenn man in diesem Satze das Wort Geschwindigkeit durch Beschleunigung ersetzt.[3]) Was nun die „Discorsi" angeht, so soll ein in dem ersten Scholium des dritten Tages angedeuteter Beweis für das Gesetz der schiefen Ebene und ein zugehöriger Hinweis auf ein älteres Werk dartun, daß auch hier noch Galilei die kinetischen Anschauungen des Aristoteles geteilt haben soll. Liest man aber die betreffenden Stellen, so scheint mir Galilei die fraglichen Sätze ganz in der Art zu beweisen, wie es die Schule des Jordanus tat, d. h. durch eine richtige Anwendung des Prinzips der virtuellen Arbeiten. Und wenn auch dieses Prinzip historisch aus der Kinetik des Aristoteles hervorgegangen ist, so scheint es sich mir doch schon bei Jordanus von dieser deutlich loszulösen; um wieviel weniger kann also der richtige Gebrauch des Prinzips der virtuellen Arbeiten noch Galilei als einen Gläubigen Aristotelischer Kinetik verpflichten! Für die gegenteilige Behauptung lassen sich vielmehr Stellen[4]) aus den Discorsi anführen; z. B. steht im zweiten Scholium des dritten Tages: „längs der Horizontalen würde aber die in B erlangte Geschwindigkeit ohne Ende beharren", oder zu Anfang des vierten Tages: „Wenn ein Körper ohne allen Widerstand sich horizontal bewegt, so ist aus allem Vorhergehenden, ausführlich Erörterten bekannt, daß

1) Seite IV am Schlusse der Einleitung.
2) Seite 261.
3) Es erscheint mir noch nicht einmal sicher, ob die Aristotelische Mechanik wirklich so sehr in allen Stücken unserer Auffassung zuwiderläuft. Ich glaube, wir stehen den alten Schriftstellern noch viel zu sehr als Philologen gegenüber, suchen Ausdrücke wie *ἰσχύς*, *δύναμις*, virtus, fortitudo zu übersetzen, anstatt auf axiomatischem Wege, d. h. aus den Behauptungen heraus Aufschluß über die verwendeten Begriffe zu suchen.
4) Ich zitiere nach der deutschen Übersetzung in Ostwalds Klassiker-Sammlung.

Digitized by Google

diese Bewegung eine gleichförmige sei und unaufhörlich fortbestehe auf einer unendlichen Ebene." Solche Sätze aber laufen allen Aristotelischen Ansichten stracks zuwider. Ich will nun gewiß nicht behaupten, daß Galilei mit vollem Bewußtsein die Aristotelische Kinetik bereits in allen Teilen umgestoßen habe, aber die Werkzeuge, die er mit seiner nüchternen und streng wissenschaftlichen, aber doch so originalen Arbeit zu dieser Revolution geschmiedet hat, sind so gewaltig, daß man es nicht unternehmen sollte, so nebenher, auf wenigen Seiten eines Buches über die Entstehungsgeschichte der Statik, Galileis Bedeutung für die Kinetik zu verkleinern. Die Sache bedurfte zum mindesten einer sehr viel tiefer gehenden Untersuchung.

Noch über einen zweiten prinzipiellen Standpunkt des Verfassers, der aber mehr eine Geschmackssache betrifft, möchte ich ein paar Worte hinzufügen. Duhem teilt die Mechaniker in zwei Klassen, die Philosophen: Aristoteles, Jordanus, Lionardo, und die Geometer: Archimedes und Simon Stevin. Die einen arbeiten mit allgemeinen Prinzipien von großer Fruchtbarkeit, die anderen mit speziellen Prinzipien von größerer Strenge. Duhem läßt uns nicht im Zweifel darüber, daß er die erste Klasse der zweiten vorzieht, wendet er doch ein von Descartes auf Galilei gemünztes Wort auf Archimedes an: „Archimède explique fort bien quod ita sit, mais non pas, cur ita sit." Ich glaube, man kann darüber zum Teil wenigstens anderer Meinung sein; ich möchte gerade von Archimedes sagen, daß er zeigt, warum es so ist, während es Aristoteles fast nur zufällig einmal gelingt zu sagen, daß es so ist. Natürlich liegt die Sache bei Jordanus und Lionardo schon wesentlich anders; hier sind schon viel bestimmtere und klarere Gedanken anzutreffen; aber jedermann wird zugeben müssen, daß diese Gedanken an sich metaphysisch sind, die man ohne Besitz eines großen Erfahrungsmaterials glauben kann oder auch nicht, während die Axiome des Archimedes durch ihre Einfachheit, Harmonie und, wie ich auch im Gegensatze zu Duhem betonen möchte, durch ihre Allgemeinheit jeden überzeugen.

Aber, wie gesagt, das ist Geschmackssache; und ich möchte zum Schlusse hervorheben, daß natürlich auch meine Ausstellungen über die Behandlung Galileis nichts an dem Urteile ändern können, daß das vorliegende Werk Duhems grundlegend für unsere Kenntnisse über die Geschichte der Statik sein wird.

Brünn. HAMEL.

Geyger, Erich. Lehrbuch der darstellenden Geometrie für den Gebrauch an technischen Hochschulen, mittleren gewerblichen und technischen Lehranstalten, Kunstgewerbeschulen, Fortbildungsschulen usw. und für das Selbststudium. *I. Teil:* Mit zahlreichen angewandten Beispielen und 290 Figuren. XVIII u. 321 S. gr. 8. Leipzig 1906, G. J. Göschen. Preis geh. ℳ 8,—, geb. ℳ 8,60.

Das vorliegende Lehrbuch soll eine Fortsetzung des von J. Schröder in der Sammlung Schubert erschienenen I. Teiles der darstellenden Geometrie sein (wo im wesentlichen bloß die Darstellung geradliniger und ebenflächiger Gebilde sowie des Kreises mittels Auf- und Grundriß behandelt wurde), schließt sich jedoch weder der Form noch dem Inhalt nach systematisch an jenes Werk an. Doch dies ist beim Wechsel des Verfassers verständlich.

Digitized by Google

Weniger verständlich ist jedoch das Ziel, das dem Verfasser des vorliegenden Bandes vor Augen schwebte. Ein für sämtliche im Titel angeführten Schulgattungen brauchbares Lehrbuch zu schreiben, dünkt mir unmöglich, dazu ist die mathematische Vorbildung der in Betracht kommenden Schüler, ja schon deren Fähigkeit Gedrucktes aufzufassen, zu verschieden. Ein Schüler einer gewerblichen Fortbildungsschule z. B. wird aus dem vorliegenden Bande wohl nur wenige Seiten verstehen können. Nach der Vorrede zu urteilen, hätte der Verfasser, der ja selbst Oberlehrer an einer Baugewerkschule ist, hauptsächlich gewerbliche Mittelschulen („Lehrende und Lernende") vor Augen gehabt, denn er schließt mit den Worten: „Möge das Buch an seinem Teile dem gewerblichen Schulwesen wie der gewerblichen Praxis zugute kommen." Sollte dies der Fall sein, dann müßte ich aus ziemlich genauer Kenntnis der preußischen Baugewerkschulen erklären, daß das Buch seinen Zweck verfehlt habe. Denn was ein Baugewerkschüler mit den 214 Seiten rein geometrischer, von den Anwendungen in der darstellenden Geometrie fast ganz losgelöster Betrachtungen (Affinität und Perspektivität ebener Figuren, Theorie der Kegelschnitte) beginnen soll, vermag ich nicht einzusehen, selbst wenn er ausnahmsweise die Vorbildung zu deren Verständnis besäße.

Es bleibt also nur übrig, daß das Buch in erster Linie für technische Hochschulen oder Lehrer der darstellenden Geometrie an gewerblichen Mittelschulen berechnet ist. Auch dann erscheint mir die geometrische Beigabe noch zu reichlich, läßt sich aber damit erklären, daß alle größeren deutschen Werke über darstellende Geometrie einen Abriß der projektiven Geometrie enthalten. Gänzlich überflüssig erscheinen jedoch manche Seiten Rechnung (z. B. S. 29 f., Nr. 47—49). Wenn aber das Buch in erster Linie für technische Hochschulen bestimmt war, dann hätte an gar manchen Stellen ein höherer Standpunkt eingenommen werden können. In einem so weit ausholenden Werke sollte z. B. ein Beweis des Pohlkeschen Satzes nicht fehlen, dürfte die allgemeine schiefe Axonometrie nicht übergangen sein, wenngleich ihre Unterschätzung ziemlich allgemein verbreitet ist; es müßte der Satz (S. 306), daß zwei Kegelflächen 2. O. mit gemeinsamer Kurve 2. O. sich noch in einer zweiten Kurve 2. O. schneiden, begründet sein und bei der Definition eines Kegelschnittbüschels (Nr. 37) auch der Fall imaginärer Grundpunkte berücksichtigt werden.

Der eigentlich darstellend-geometrische Teil behandelt die orthogonale Axonometrie, die schiefe Projektion, die Raumkurven (sehr kurz), die Kugel und die Kegel- und Zylinderflächen, insbesondere deren ebene Schnitte und Durchdringungen. Die ziemlich zahlreichen Beispiele über Steinschnitt sind meist gut ausgewählt. Die Figuren lassen in bezug auf Nettigkeit der Ausführung öfter zu wünschen übrig. Bei Fig. 248 fehlt in der Projektion der Raumkurve auf die Normalebene (Ebene durch Haupt- und Binormale) die Spitze.

Dieser jedenfalls mit großem Fleiß verfaßte I. Teil wird sicherlich von vielen mit Nutzen verwendet werden, aber Eigenartiges fiel mir weder in sachlicher noch in pädagogischer Hinsicht auf. In letzterer Beziehung könnte ich sogar auf manche Verstöße aufmerksam machen (z. B. S. 271, 272 auf die Zusammensetzung von ebenen Kurven aus Halbkreisen zur Darlegung der Formen der gewöhnlichen singulären Punkte; S. 279 auf die Definition der allgemeinen Schraubenlinie durch das konstante Verhältnis zwischen Krümmung und Torsion).

Wien. E. Müller.

Digitized by Google

v. Oettingen, Arthur. Die perspektivischen Kreisbilder der Kegelschnitte. Mit 85 Abb. im Text und auf vier Tafeln. VIII u. 118 S. gr. 8. Leipzig 1906, W. Engelmann. Preis geh. *M* 5,—.

Das vorliegende Buch knüpft an die 1901 erschienenen „Elemente des geometrisch-perspektivischen Zeichnens" desselben Verfassers an (vgl. die Besprechung in dieser Zeitschr. (3) **4** (1902), S. 134—136) und ist auch in demselben Geiste, nämlich ohne Kenntnis der auf diesem Gebiete vorhandenen Literatur, abgefaßt. „In der Überzeugung, daß es eine dankbare Aufgabe wäre, die Eigenschaften der Kegelschnitte an Kreisbildern darzustellen, entschloß sich der Verfasser, die Studie selbst durchzuführen", heißt es in der Vorrede. Nun ist es aber für die Untersuchung gleichgültig, ob man einen Kreis als Zentralbild eines Kegelschnittes oder den Kegelschnitt als Zentralbild des Kreises betrachtet, und letztere Methode zur Untersuchung der Kurven 2. O. wurde seit Poncelet von allen Geometern verwendet.

Wien. E. Müller.

Loria, Gino. Vorlesungen über darstellende Geometrie. Autorisierte, nach dem italienischen Manuskript bearbeitete deutsche Ausgabe von Fritz Schütte. In 2 Teilen. Erster Teil: Die Darstellungsmethoden. A. u. d. T.: Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Bd. XXV, 1. Mit 163 Figuren im Texte. XI u. 219 S. gr. 8. Leipzig und Berlin 1907, B. G. Teubner. Preis geh. *M* 6,80.

Das Werk, dessen erster Teil hier vorliegt, ist das Ergebnis der Vorlesungen über darstellende Geometrie, die der Verfasser an der Universität Genua seit dem Wintersemester 1897/98 gehalten hat, also wohl das erste für Universitäten bestimmte Lehrbuch dieses Gegenstandes. Ob in pädagogischer Hinsicht die Stoffauswahl für diesen Zweck getroffen ist, darüber werden die Meinungen sehr verschieden ausfallen. Mir erschiene es jedenfalls nicht empfehlenswert, einem Anfänger in einem Zuge die ganze Methodenlehre des vorliegenden Bandes vorzutragen und dann erst ihre Anwendungen auf Körper und Flächen zu bringen. Doch der Verfasser kann ja bloß für die Veröffentlichung die Methodenlehre abgesondert und beim Vortrage Gegenstände aus dem zweiten Teile eingeflochten haben. Über den voraussichtlichen Inhalt dieses zweiten Teiles enthält die Vorrede nur die Mitteilung, daß seinen Schluß eine Geschichte der darstellenden Geometrie bilden soll. Darauf muß man nach den bisherigen historischen Arbeiten des Verfassers gespannt sein; denn die allgemein bewunderte grundlegende Arbeit Chr. Wieners auf diesem Gebiete hat erst recht das Bedürfnis geweckt, mehr über die geschichtliche Entwicklung einzelner Teile und Methoden der darstellenden Geometrie zu erfahren.

Der Verfasser verfolgt das Ziel, seinen Lesern einen Begriff von den modernen Anschauungen der darstellenden Geometrie zu geben und sie in den Stand zu setzen, Untersuchungen auf diesem Gebiete verfolgen zu können. Er behandelt daher nach einer sehr hübschen Einleitung über die Natur und den Zweck dieser Disziplin, über die „Geometrie des Zirkels" und die „Geometrographie", nicht nur das Auf- und Grundrißverfahren (von ihm „Methode der doppelten Orthogonalprojektion" genannt), die Zentralprojektion, die ko-

Digitized by Google

tierte Projektion, die orthogonale und schiefe Axonometrie, sondern hat auch die perspektive Axonometrie und Photogrammetrie in den Bereich der Betrachtung gezogen. Das Hauptgewicht ist natürlich in erster Linie auf die Orthogonalprojektion, in zweiter auf die freie Perspektive gelegt. Einer Methodenlehre entsprechend, handelt es sich, von wenigen Fällen abgesehen, nur um die Darstellung von Punkten, Geraden und Ebenen und um die Lösung der sie betreffenden Grundaufgaben; in der schiefen Axonometrie wird auch auf die Lösung dieser Aufgaben nicht mehr eingegangen. Die Zyklographie findet nur gelegentliche Erwähnung. Entgegen dem Gebrauche in den meisten deutschen Lehrbüchern wird die projektive Geometrie als bekannt vorausgesetzt, was für Universitätsvorlesungen ganz angemessen erscheint.

Daß die Darlegungen des Buches nicht nur klar und deutlich, sondern in wissenschaftlicher Hinsicht auch einwandfrei sind, bedarf bei dem Namen des Autors wohl keiner besonderen Erwähnung. Ja das Buch besitzt anderen gegenüber den Vorzug, daß es möglichst vollständig die bemerkenswerten Sonderfälle hervorhebt und bei Konstruktionen die Möglichkeit ihrer Durchführung beweist oder ihre Grenzen untersucht. Verschiedene Elementaraufgaben sind auf eigenartige Weise gelöst. Nr. 22 z. B. enthält eine Konstruktion der Schnittlinie zweier Ebenen, deren Spuren sich in unzugänglichen Punkten schneiden, unter Verwendung des Satzes vom Höhenschnittpunkt eines Dreiecks; in Nr. 27 wird die schiefe Projektion (insbesondere auf die Koinzidenzebene) zur Lösung von Aufgaben in orthogonaler Darstellung herangezogen; in Nr. 29 ist die zweite Lösung der Aufgabe, die gemeinschaftlichen Transversalen von vier gegebenen, paarweise sich nicht schneidenden Geraden (das „nicht" fehlt im Buche versehentlich) zu suchen, beachtenswert, deren Grundgedanke von Timerding stammt. Hübsch ist auch die Konstruktion der Spur und Fluchtlinie der Ebene durch drei gegebene Punkte in Nr. 69. Die in Nr. 33 gegebene Konstruktion einer Winkelhalbierenden wird in orthogonaler Darstellung wohl niemand verwenden; hingegen hätte dieses Prinzip in der schiefaxonometrischen Darstellung zur Lösung von Aufgaben verwendet werden sollen. Die Zentralprojektion wird auch in der von W. Fiedler herrührenden Verallgemeinerung betrachtet, daß die Rolle der unendlichfernen Ebene eine endlich ferne Ebene übernehme. Aus dem Sonderfall, daß diese Ebene zur Bildebene parallel und das Projektionszentrum als der unendlichferne Punkt der zur Bildebene normalen Geraden gewählt wird, ergibt sich dem Verfasser die kotierte Projektion. Das letzte Kapitel der Photogrammetrie enthält einige wenig bekannte allgemeine Sätze.

Gegen die in der Fußnote auf S. 173 gemachte Bemerkung möchte ich Stellung nehmen. Es heißt dort, daß gewisse Verkürzungsverhältnisse in der orthogonalen Axonometrie „am meisten gebraucht werden". Wer sie braucht, wird weder hier noch in anderen Lehrbüchern gesagt, wo sich ähnliche Bemerkungen finden. Ich halte die Bestimmung des Achsenkreuzes durch die Verkürzungsverhältnisse für theoretisch ganz interessant, aber für praktisch wertlos, da man beim Zeichnen eines axonometrischen Bildes wohl stets die Achsen wählt und für sie dann die Verkürzungsverhältnisse ermittelt. Bei Verwendung von Maßstäben oder Verkürzungswinkeln ist es ganz gleichgültig, ob diese Verhältnisse rational oder irrational ausfallen.

Um nicht zu weitläufig zu werden, will ich die Bedenken gegenüber gewissen Benennungen oder Bezeichnungen in diesem Buche unterdrücken, auch

Digitized by Google

nicht die bemerkten Druckfehler erwähnen. Hingegen fordert es die Referentenpflicht, auf die in den Figuren bemerkten tatsächlichen Fehler hinzuweisen, wobei ich von einer Aufzählung der ziemlich zahlreichen Übersehen in der Beschriftung absehe.

In Fig. 24 ist das gezeichnete perspektive Bild das Spiegelbild des geforderten Bildes (π ist nach falscher Seite umgeklappt).

„ „ 106 soll (A) im Schnitt von (g) mit (C) A' liegen. J' ist nicht bezeichnet, Flucht- und Spurpunkt der Geraden AB sind unrichtig.

„ „ 149 ist Dreieck T_x, T_y, T_z kein Spurendreieck des gezeichneten Achsenkreuzes. Ferner fehlen hier an den Buchstaben die Sterne zur Bezeichnung des axonometrischen Bildes. Letzterer Fehler findet sich öfter.

„ „ 150 ist die Konstruktion von M^* aus M'^* falsch.

„ „ 151 u. 153 ist wieder T_x, T_y, T_z kein Spurendreieck des gegebenen Achsenkreuzes.

Sieht man von diesen den Anfänger irreleitenden oder verwirrenden Fehlern in den Figuren ab, so wird das Buch nicht nur allen, die sich mit den gebräuchlichen Methoden der darstellenden Geometrie bekannt machen wollen, wertvolle Dienste leisten, sondern auch Lehrern dieses Faches viel Interessantes und für den Unterricht Verwertbares bieten.

Wien. E. Müller.

Schlink, Wilhelm. Statik der Raumfachwerke. Mit 214 Abbildungen und 2 Tafeln. XIV u. 390 S. gr. 8. Leipzig und Berlin 1907, B. G. Teubner. Preis geb. ℳ 9,—.

Das vorliegende Buch ist das umfassendste, das bisher über räumliche Fachwerke auf Grund der neueren von Föppl, Henneberg, Mohr, Müller-Breslau begründeten Methoden erschienen ist. Es soll durch dasselbe der Leser befähigt werden, einerseits jedes beliebige Raumfachwerk zu berechnen, andererseits für jede gegebene architektonische Überdeckungsform ein zweckmäßig gebautes System in einfacher Weise herzustellen.

Das Buch zerfällt in zwei Abschnitte:

1. Raumfachwerke im allgemeinen,
2. Dachfachwerke.

Um den Leser leichter in die Raumfachwerke einzuführen, werden im ersten Abschnitt zunächst die allgemeinen, das ebene Fachwerk betreffenden Sätze und Methoden hergeleitet. Der Satz von Föppl, nach welchem jedes statisch bestimmte Fachwerk auch kinematisch bestimmt ist, wird entwickelt und dessen Bedeutung ausführlich besprochen. Sodann werden die verschiedenen Methoden für die Spannungsbestimmung gegeben und deren Zusammenhang und Übergang ineinander erörtert. Ebenso werden die allgemeinen Bildungsgesetze der ebenen Fachwerke entwickelt und durch Beispiele erläutert. Um kompliziertere Fachwerke auf einfachere zurückzuführen und umgekehrt, um aus einfacheren Fachwerken kompliziertere herzuleiten, wird die Methode der Stabvertauschung vielfach mit Nutzen verwandt. Es wird auch gezeigt, wie durch diese Methode der Stabvertauschung die Stabilitäts-

Digitized by Google

untersuchung erleichtert wird. Die ganze Untersuchung erstreckt sich sowohl auf freie wie auf gestützte Systeme.

In gleicher Weise werden die Raumfachwerke behandelt und deren Bildungsgesetze eingehend entwickelt, wobei die Methode der Stabvertauschung wieder zur Verwendung kommt. Die für die Raumfachwerke wichtige Aufgabe, eine Kraft in drei oder in sechs Komponenten zu zerlegen, ist nach den verschiedenen Methoden (Momentenmethode, Projektionsmethode, Methoden von Mohr und Müller-Breslau) gelöst und der Zusammenhang der einzelnen Methoden besprochen. Sodann werden die verschiedenen allgemeinen Methoden für die Spannungsbestimmung gegeben, sowohl die statischen wie die kinematischen von Mohr und Müller-Breslau, und in Zusammenhang gebracht.

Besonderer Wert ist stets auf die Stabilitätsuntersuchung gelegt. Bei derselben ist der Satz, nach welchem jedes Gelenksystem statisch und kinematisch bestimmt ist, sobald im belastungslosen Zustande alle Spannungen eindeutig Null werden, mit Vorteil verwandt. Speziell sind die Stabilitätsverhältnisse des Auflagerringes untersucht.

Im zweiten Abschnitt sind verschiedene Arten von Dachfachwerken behandelt und zwar:

Die Schwedler-Kuppel,
Netzwerkkuppel und Zimmermannsche Kuppel,
Scheibenkuppel,
Geschlossene Kuppel,
Flechtwerkdächer von Föppl.

Bei allen diesen Kuppeln sind die Formeln für die Spannungsbestimmung vollständig entwickelt. Hierbei ist die Rechnung durch Zahlenbeispiele erläutert. Die Schwedler-Kuppel ist auch graphisch für beliebige Last behandelt.

Besonderer Wert ist auf Kapitel 7 und die folgenden Kapitel zu legen, die fast durchweg Neues enthalten. Es werden in denselben die Grundformeln für die offenen und geschlossenen Kuppeln und die allgemeinen diesbezüglichen Sätze und Formeln entwickelt. Sodann werden durch Spezialisierung neue Kuppeln und insbesondere ein- und mehrstöckige Scheibenkuppeln entworfen. Ferner wird gezeigt, wie mit Hilfe der hergeleiteten Sätze den architektonischen Forderungen entsprechend günstige Kuppeln sich herstellen lassen.

Das klar und einfach geschriebene und auch infolge der guten Zeichnungen leicht verständliche Buch möge den Technikern warm empfohlen werden; doch auch der Mathematiker wird in dem Buche vieles finden, was ihn interessiert.

Darmstadt. L. Henneberg.

Smith, D. E. History of modern Mathematics. 4. Auflage. New York 1906.

Wenn man auf 77 Druckseiten eine Geschichte der modernen Mathematik schreiben will, so ist eine straffe Beschränkung auf die Hauptepochen notwendig und eine präzise Begrenzung des darzustellenden Gebietes vorgeschrieben. Das hat Smith zunächst dadurch erreicht, daß er sich nur auf die reine Mathematik beschränkt und von der angewandten nur die Potentialtheorie bei der Funktionentheorie in den Kreis seiner Betrachtung einbezieht, während die zeitliche Begrenzung im wesentlichen durch das letzte Jahrhundert geboten ist. Nur in einzelnen Fragen geht er über die Zeit vor Gauß zurück, um an

Digitized by Google

Newton, Leibniz und Euler anknüpfen zu können. Es versteht sich von selbst, daß eine Charakterisierung der einzelnen Arbeiten und der Resultate einzelner Forscher in einem solch knappen Rahmen ganz unmöglich ist. Es ist daher durchweg für die meisten Mitarbeiter an der Lösung der Probleme nur eine Aufzählung der Namen möglich gewesen, dagegen wird man nichts sagen können; aber es fragt sich doch, ob nicht wenigstens bei diesen Namen eine Angabe über die Publikationen nach Ort und Zeit möglich gewesen wäre, jedenfalls würde dann die Angabe für den Lernenden nutzbringender gewesen sein. Denn was hat der Student davon, daß ihm zehn Namen von Autoren genannt werden, die über das fragliche Gebiet Arbeiten publiziert haben, wenn er nicht erfährt, wo er die Arbeiten finden kann? Meines Erachtens hätte der Verfasser entweder die Namen fortlassen sollen, um dadurch Raum zu gewinnen, sachlich etwas mehr sagen zu können, oder die Arbeiten hätten nachgewiesen werden müssen. Abgesehen von dieser Ausstellung kann man aber die Darstellung nur anerkennend loben, indem nicht nur die Hauptfragen durchweg richtig charakterisiert sind, sondern auch für jedes Kapitel die wichtigsten Monographien angegeben sind, aus welchen man sich orientieren kann.

Smith beginnt mit der Zahlentheorie seit 1801 und zählt auch die hervorragendsten Forscher dieses Gebietes mit ihren wesentlichsten Resultaten auf, aber es wird jedem deutschen Leser auffallen, daß v. Mangoldt gar nicht und Hilbert nur bei dem Beweise für die Transzendenz von π genannt ist; desgleichen vermisse ich E. Busche bei der Liste der Zahlentheoretiker. An die Zahlentheorie im engeren Sinne schließen sich die Abschnitte über Quaternionen und Ausdehnungslehre. Die Theorie der Gleichungen beginnt mit Newton, springt dann aber sofort auf Lagrange und Gauß über und vergißt Eulers sehr wesentliche Arbeiten, der ebenfalls bei der Kettenbruchentwicklung nicht genannt wird. Es findet die Lehre von den Gleichungen fünften Grades eine etwas breitere Darstellung. Ebenso geht der Verfasser auf die Gruppentheorie von Ruffini und Galois näher ein, aber die neueren Autoren werden nur ohne Inhaltsangabe und ohne Zeitfolge aufgezählt. Die Theorie der Invarianten, einschließlich der Theorie der Formen, der Invarianten und Kovarianten, findet in einer Würdigung der Verdienste Cayleys gebührende Beachtung, auch hebt Smith die durch Aronhold begründete, durch Clebsch erweiterte deutsche Richtung gegenüber der englischen Schule hervor.

Das Kapitel über Differential- und Integralrechnung umfaßt nicht nur die Variationsrechnung mit, sondern auch die Eulerschen Integrale, welche zu den Γ-Funktionen führen und die Potentialfunktion wie auch die Anwendung der Infinitesimalrechnung in der Physik. Hieran schließt der Verfasser das Kapitel über Differentialgleichungen. Daß er die Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen mit Lagrange beginnt, ist wohl nicht ganz richtig, da die Mehrzahl der Lagrangeschen Resultate sich bereits bei Euler findet. Aber die Weiterentwicklung dieser wichtigen Disziplin von Gauß bis Lie, Fuchs und Poincaré wird durch Hinweis auf die markantesten Fortschritte in dem knappen Raum gut wiedergegeben. Die Theorie der unendlichen Reihen wird bis auf Jacobi in den Hauptzügen übersichtlich dargestellt, die neueren Arbeiten werden aber nur durch die Namen der Beteiligten angedeutet. In dem Kapitel über Funktionentheorie macht der Verfasser richtig darauf aufmerksam, daß nicht erst Landen die elliptischen Formen entdeckt habe, sondern daß, abgesehen von vereinzeltem Vorkommen bei Jacob und Johann

Digitized by Google

Bernoulli, die Theorie von Euler begründet ist, wie es Legendre schon nachgewiesen hat. Die Geschichte der Funktionentheorie wird bis zu Kleins Modulfunktionen in großen Strichen skizziert. Endlich in der analytischen Geometrie verweilt der Verfasser bei Monge und Plücker, von denen ersterer in der darstellenden Geometrie wieder die Hauptrolle spielt, während in der projektiven Geometrie Poncelet, Gergonne, Steiner und von Staudt ausführlichere Erwähnung finden.

Es ist sonach auf dem engen Raum eine große Fülle historischer Angaben zusammengebracht; aber es zeigt sich doch auch, wie schwer es ist, eine Charakterisierung des Fortschrittes in so gedrängter Kürze zu geben, denn diese Fortschritte liegen nicht nur in der extensiven Mitarbeit fast der gesamten Welt im Gegensatz zum Zustand vor 100 oder gar 150 Jahren, sondern besonders in der intensiven Durchforschung schon bekannter Gebiete, wie das in dem Schlußkapitel des Smithschen Buches sehr glücklich zum Ausdruck kommt.

Hamburg. Edm. Hoppe.

H. Durège. Elemente der Theorie der Funktionen einer komplexen veränderlichen Größe. In fünfter Auflage neu bearbeitet von Ludwig Maurer. Mit 41 Figuren im Text. X u. 397 S. gr. 8. Leipzig und Berlin 1906, B. G. Teubner. Preis geh. ℳ 9,—, geb. ℳ 10,—.

Das in der Überschrift genannte Werk hat mit dem Durègeschen nur die Einleitung und den Zweck gemeinsam, den Leser in die Riemannsche Anschauungsweise der in Frage stehenden Disziplin einzuführen — im übrigen hat es eine völlig andere Gestalt angenommen. Der Herr Verfasser beschränkt sich hierbei nicht auf die Theorie der komplexen Funktionen, sondern bringt im ersten Abschnitt eine gedrängte Übersicht über diejenigen Teile aus der Theorie der reellen Funktionen, die ihm für die Begründung der komplexen Funktionentheorie erforderlich erscheinen. Bei der Darstellung der letzteren sind eine große Anzahl von Betrachtungen und Sätzen hinzugekommen, welche entweder der modernen Entwicklung der Funktionentheorie Rechnung tragen oder sonst dem Herrn Verfasser als passende Ergänzungen erscheinen. Hierzu gehört eine ausgiebigere Betrachtung der Abbildungstheorie, eine Reihe von Untersuchungen aus der Theorie der periodischen Funktionen und der Algebra, Darstellung von Funktionen mit gegebenen Null- und Unendlichkeitsstellen und neben anderem vor allem eine etwas weitergehende Theorie der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Dieselbe ist aufgenommen, um einerseits die funktionentheoretischen Prinzipien zu erläutern und andererseits den naturgemäßen Zugang zu der Theorie der automorphen Funktionen zu eröffnen. Im Gegensatz hierzu sind die Integrale der algebraischen Funktionen weit kürzer behandelt als in den früheren Auflagen.

Das Werk ist mit großer Sachkenntnis, elegant und frisch geschrieben und bedeutet gegenüber den älteren Auflagen einen entschiedenen Fortschritt. Freilich will es dem Referenten erscheinen, als wenn die Einheitlichkeit und Geschlossenheit, welche das Durègesche Werk charakterisierte, in dem neuen nicht mehr in demselben Umfange vorhanden ist. Dazu ist der Stoff, der auf dem verhältnismäßig kurzen Raume von 400 Seiten behandelt wird, gar zu groß und verschiedenartig gestaltet, die Darstellung an einigen Stellen zu kurz ausgefallen.

Digitized by Google

Schließlich mögen noch die folgenden Einzelheiten herausgegriffen werden. Der Herr Verfasser unterwirft eine komplexe Funktion w der Bedingung, daß sie eine *stetige* Derivierte w' besitze — nach den neueren Untersuchungen von Herrn Goursat und anderen kann die Annahme der Stetigkeit fortfallen. Ungewöhnlich und sicher auch unzweckmäßig ist die S. 34 gegebene Definition einer im Intervalle (ab) differenzierbaren Funktion als einer solchen, welche in jedem Punkte x von (ab) eine endliche und mit x *stetig* veränderliche Derivierte besitzt. Selbst wenn man mit dem Verfasser das Auftreten einer unendlich großen Derivierten nicht mehr als „Differenzierbarkeit" bezeichnen wollte (obschon auch diese Festsetzung zu Unzuträglichkeiten führt, da man ja allgemein „Differenzierbarkeit" als äquivalent mit „Existenz einer bestimmten Tangente" anzusehen pflegt), so müssen doch naturgemäß Funktionen in allen denjenigen Fällen als differenzierbar im Intervall (ab) bezeichnet werden, in denen sie in allen Punkten desselben *endliche bestimmte* Differentialquotienten besitzen — ob diese Differentialquotienten *stetig* oder *unstetig* sind, dürfte dabei als gleichgültig anzusehen sein. In bezug auf diese Bemerkung möge auf den Artikel von Herrn Pringsheim über die Grundlagen der allgemeinen Funktionenlehre im 2ten Bande der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften verwiesen werden.

Dresden. MARTIN KRAUSE.

Technik und Schule. Beiträge zum gesamten Unterrichte an technischen Lehranstalten. Herausgegeben von Prof. M. Girndt. I. Band, 3. Heft, 64 S. gr. 8. Leipzig und Berlin 1907, B. G. Teubner. Preis geh. ℳ 1,60.

Für das Fachschulwesen existierte als besonderes periodisches Organ bis vor kurzem nur die „Zeitschrift für gewerblichen Unterricht." Die von Herrn M. Girndt neuerdings begründete und zwanglos, je nach Material, erscheinende Zeitschrift unterscheidet sich äußerlich jedenfalls sehr vorteilhaft von der älteren Schwester, indem die Verlagshandlung sie in dem ansprechenden Kleide der im gleichen Verlage herauskommenden Zeitschrift „Monatshefte für den naturwissenschaftlichen Unterricht" hinaussendet. — Von dem mir zur Besprechung überwiesenen Heft 3 interessiert den Mathematiker vorwiegend der Bericht über die auf der Maschinenbauschulmännerversammlung in Bremen gepflogenen Verhandlungen über die Einführung der Infinitesimalrechnung in den Lehrplan der Maschinenbauschulen. Tatsächlich wird die Infinitesimalrechnung in irgend einer Form wohl an den meisten höheren Maschinenbauschulen bereits gelehrt; man sollte sich also dazu verstehen, das verkappte Differenzieren und Integrieren zu ersetzen durch eine „ehrliche Infinitesimalrechnung", um einen Ausdruck aus Felix Kleins neuester ausgezeichneter Publikation über diese Frage (Klein und Schimmack, „Der mathematische Unterricht", Teil I, 1907) zu gebrauchen. Freilich scheint dem von Seiten der Fachschulmänner noch vielfacher Widerstand entgegengesetzt zu werden, und wenn man sieht, daß es nötig ist, für diese Kreise eine Ableitung der einfachsten Differentialformeln zu geben, wie in diesem Hefte in einem Artikel geschieht, um den Gegnern das Gruseln vor $\frac{dy}{dx}$ zu benehmen, so muß man schließen, daß der Widerstand in vielen Fällen nur auf Unkenntnis der Sache beruht. — An Artikeln mathematischen Inhalts enthält dies Heft

Digitized by Google

noch einen solchen vom Herausgeber, der dem Heft freilich nicht zu Glanz und Ruhm gereicht. Auf Grund eines nicht verstandenen Zitats kommt der Herr Herausgeber zu dem Resultat, daß auf der Baugewerkschule „Algebra“ überhaupt nicht getrieben wird. Das mathematische Pensum ist dort zwar sehr beschnitten, Gleichungen ersten Grades werden aber doch noch behandelt. Quadratische Gleichungen sind jedoch — abgesehen natürlich von den rein quadratischen — verpönt, was sich, nach einem im gleichen Heft enthaltenen Artikel über den „Unterricht im Eisenbetonbau“ zu schließen, wohl bereits als fühlbarer Mangel erwiesen hat. Freilich wird in dem Artikel des Herausgebers die arithmetische Welt des Baugewerkschülers genau zirkumskribiert und z. B. festgestellt, daß das Rechnen mit Potenzen und Wurzeln nicht über den Exponenten 4 hinausgeht. Als ob der Unterricht an Baugewerkschulen nicht ohnehin bereits handwerksmäßig genug wäre!

Magdeburg, Herbst 1907. W. Ahrens.

Petronievics, Branislav. Die typischen Geometrieen und das Unendliche. 87 S. 8. Heidelberg 1907, Carl Winters Universitätsbuchhandlung.

Der Verfasser zählt, wie zumeist alle, die die Lehre vom Unendlichen von Grund aus umwälzen wollen, zu denen, die den Grenzbegriff noch nicht erfaßt haben. Nichts ist dafür charakteristischer, als sein Versuch, der Cantorschen transfiniten Zahl ω eine unmittelbar vorangehende Zahl vorzusetzen. Aber auch ein ganz elementares Beispiel (in einer Fußnote, S. 22) überzeugt uns davon: „Jede Kurve, die eine Tangente hat, hat mit dieser, wie sich direkt beweisen läßt [den Beweis bleibt Verf. schuldig, d. Ref.], nicht einen, wie dies gewöhnlich behauptet wird, sondern zwei Punkte gemeinsam, nur muß man dabei voraussetzen, daß diese beiden Punkte keine Linie bilden, was sie in dem Kontinuum auch in der Tat nicht zu tun brauchen, da hier zwei Punkte, die sich unmittelbar miteinander berühren (und man muß von den zwei gemeinsamen Punkten der Kurve und ihrer Tangente voraussetzen, daß sie sich unmittelbar miteinander berühren), kein Linienstück zwischen einander haben können, ihre Distanz also $= 0$ sein muß . . . . Da nun eine Kurve nur in einem inkonsekutiven Raume möglich ist, in diesem aber keine konsekutiven Punkte möglich und doch für die zwei gemeinsamen Punkte der Kurve und der Tangente nur das Verhältnis der Konsekution vorausgesetzt werden könne . . ., so kommen wir damit auf eine Schwierigkeit in dem Unendlichkeitsbegriff, die von prinzipieller Bedeutung ist, auf die wir aber hier nur hinweisen können und nur noch bemerken wollen, daß hier in dieser Schwierigkeit das Geheimnis der Infinitesimalmethode liegt, was wir an einem andern Orte ausführlich darlegen werden.“

Mich mit dem Verfasser selbst auseinanderzusetzen, dazu fehlt es mir an Zeit und dieser Zeitschrift an Raum. Denn der Verfasser hat sehr viel gelesen, und Cantor, Bolzano, Peano, Hilbert, Veronese u. a. werden dauernd zitiert, mit mehr oder meist minderem[1]) Verständnis. Daher

1) Die Definition der Wohlordnung lautet nach des Verf. Ansicht: In jeder wohlgeordneten Menge gibt es ein erstes, und zu jedem Element (mit Ausnahme eines evtl. vorhandenen letzten) ein unmittelbar folgendes

Digitized by Google

sei nur kurz bemerkt, daß Verfasser die logische Möglichkeit einer konsekutiven Raumform verteidigt, bei der jeder Punkt einer Geraden einen unmittelbar benachbarten hat. Hiermit werden zunächst offene Türen eingerannt. Da aber Verfasser seiner Geraden Grenzpunkte zuschreibt und keine Lücken haben will, kommt er auf S. 59 ganz richtig zu dem „fundamentalen" Satz, daß seine Punktreihe endlich sein muß. Wie er daraus Widersprüche („Antinomieen" genannt) herleitet, die er der Cantorschen Lehre von den transfiniten Zahlen in die Schuhe schiebt, das mag derjenige selbst nachlesen, den es interessiert.

Bemerkenswert scheint mir noch, daß Verfasser Mitarbeiter der von Ostwald herausgegebenen „Annalen der Naturphilosophie" ist oder war, („Über die Größe der unmittelbaren Berührung zweier Punkte. Beitrag zur Begründung der diskreten Geometrie." Ann. der Nat. Ph. Bd. IV. Heft 2.), daß ferner die Verlagshandlung auf der Umschlagseite zwei begeisterte Ausschnitte aus Besprechungen des *„Literarischen Zentralblattes"* (Nr. 30, 1905) und der englischen *„Nature"* (Nr. 1856, 1905) abdruckt, die sich auf eine frühere Arbeit des Verfassers beziehen. Als dritte im Bunde ist noch eine Äußerung Couturats wiedergegeben (Bulletin des sciences math., 1905, März, und Revue de Métaphysique et de Morale, Nr. 2 1905), die ich ohne Kommentar hierhersetze: „Il était intéressant de tirer du finitisme toutes ses conséquences scientifiques; à cet égard, le travail de M. Petronievics ne sera pas inutile, car il constitue une sorte de réduction à l'absurde du finitisme, qui en est peut-être la meilleure réfutation . . ."

Grunewald. GERHARD HESSENBERG.

Edward V. Huntington. La Kontinuo. Elementa teorio starigita sur la ideo de ordo kun aldono pri transfinitaj nombroj. (Im Original: The continuum as a type of order: an exposition of the modern theory with an appendix on the transfinite numbers. Harvard Univ., Cambridge, Mass.) Ins Esperanto übersetzt von Raoul Bricard. 126 S. kl. 8. Paris, 1907. Gauthier-Villars.

Kap. I. Mengen im allgemeinen. (Äquivalenzbegriff, endliche und unendliche Mengen.) Kap. II. Einfach geordnete Mengen. (Begriff des Ordnungstypus, erstes, letztes, unmittelbar folgendes Element etc.). Kap. III. Diskrete geordnete Mengen, insbesondere die Reihe der ganzen Zahlen. (Typus ω, Induktionsschluß, Addition und Multiplikation der ganzen Zahlen, Begriff der Abzählbarkeit). Kap. IV. Dichte Mengen, insbesondere die Menge der Rationalzahlen. Kap. V. Stetige Mengen, insbesondere die Menge der reellen Zahlen. Kap. VI. Mehrdimensionale stetige Mengen. Anhang: Wohlgeordnete Mengen und Cantors transfinite Zahlen.

Zweck der Arbeit ist, Studierende in elementarer und leicht verständlicher Weise in die Grundbegriffe der Mengenlehre einzuführen. Schwierigere Fragen, wie die Kettentheorie, der Äquivalenzsatz, der Wohlordnungssatz und die Paradoxien werden nicht behandelt. Wie weit ungefähr die einleitenden Kapitel gehen, habe ich durch die eingeklammerten Zusätze anzudeuten versucht. Die Entwicklung ist streng und baut sich, mit zahlreichen Beispielen belebt, auf Postulaten auf, deren Unabhängigkeit nachgewiesen wird. Der Übergang von den reinen Ordnungspostulaten zu den arithmetischen Operationen

Digitized by Google

wird auch in Kap. IV und V kurz gestreift. Der Übersetzer hat eine Tafel der Kunstausdrücke in Esperanto, Französisch, Englisch und Deutsch angefügt, sowie einige Notizen über seinen Gebrauch des Esperanto. Referent, der selbst des Esperanto unkundig ist, hat das Werkchen mühelos gelesen und kann es nur warm empfehlen.

Grunewald. GERHARD HESSENBERG.

Jos. Lengauer. Bardeys Aufgabensammlung für bayerische Mittelschulen nach der neuesten Auflage bearbeitet. IV und 192 S. gr. 8. Leipzig und Berlin 1907, B. G. Teubner. Preis geb. ℳ 2,20.

A. Schülke. Aufgabensammlung aus der Arithmetik nebst Anwendungen auf das bürgerliche Leben, Geometrie und Physik. In zwei Teilen. Erster Teil für die mittleren Klassen höherer Schulen. Mit sieben Figuren im Text. VIII und 194 S. gr. 8. Leipzig und Berlin 1907, B. G. Teubner. Preis geb. ℳ 2,20.

H. Müller und M. Kutnewsky. Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik, Trigonometrie und Stereometrie. Ausgabe B, für reale Anstalten und Reformschulen. II. Teil. 2. Auflage. XII und 304 S. gr. 8. Leipzig und Berlin 1907, B. G. Teubner. Preis geb. ℳ 3,—.

Franz Napravnik. Vollständig gelöste Maturitätsaufgaben aus der Mathematik. Für Schüler der obersten Klassen an Realschulen und Gymnasien sowie zum Selbststudium. IV und 233 S. gr. 8. Wien 1907, Franz Deuticke. Preis geb. ℳ 3,—.

Lengauer hat Bardeys Aufgabensammlung für bayerische Gymnasien und Realschulen bearbeitet. Die nicht dem Lehrplan dieser Schulen angehörigen Abschnitte wurden gestrichen, an vielen Stellen wurde gekürzt. Hinzugefügt wurden zahlreiche historische Notizen. Die theoretischen Einleitungen und der Abschnitt über graphische Darstellungen wurden erweitert. Die geschickte Bearbeitung zeigt als Ganzes und in vielen Einzelheiten die Hand des in der Praxis erprobten Schulmannes.

Auf die Teile der Schulmathematik, in denen gerechnet wird, beschränkt auch Schülke seine Aufgabensammlung. In dem ersten hier zu besprechenden Teil beziehen sich die Übungen auf die Klassen Quarta bis Untesekunda, wenn die preußischen Lehrpläne zugrunde gelegt werden. Schülkes beachtenswertes Buch enthält vieles Eigenartige und wird jeden Fachmann interessieren. Für die Benutzung seitens der Schüler ist eine größere Gleichmäßigkeit im Umfang der theoretischen Einleitungen zu fordern. Entweder werden diese durchgehends gestrichen, oder es ist an den Stellen, wo sich jetzt gar nichts findet (z. B. vor den Gleichungen ersten Grades mit zwei und mehr Unbekannten S. 93 und 101 und vor den Gleichungen zweiten Grades S. 109), Entsprechendes hinzuzufügen. Daß Schülke die Einführung der Buchstaben von der der negativen Zahlen trennt, ist praktisch, mag man nun Schülkes Aufeinanderfolge wählen oder die umgekehrte. Praktisch ist auch, daß schon § 1 Einsetzübungen und Gleichungen bringt. In gleichem Sinne hätte dem in der Einleitung S. IV Ausgeführten entsprechend eine weitergehende Einschiebung der Gleichungen in die früheren Paragraphen erfolgen können. Angenehm berührt das offene Eingestehen des Willkürlichen in Definitionen, die durch die Zweckmäßigkeit, nicht durch die Notwendigkeit be-

Digitized by Google

stimmt sind. Zu weitgehend ist in dem den Funktionen gewidmeten Abschnitt III das Eingehen auf die Parabel und die Hyperbel mit ihren Asymptoten. Im vierten Abschnitt (Anwendungen) gibt Nr. 38 hübsches Material für verschiedenartige Rechenaufgaben an der Hand von statistischen Angaben aus unserem staatlichen Leben. Die letzten drei Seiten bieten ein Inhaltsverzeichnis, das recht Ungleichartiges zusammenstellt. Man vergleiche etwa das für „absoluten Wert", „Euler" und „Wald" zu Entnehmende. Das Inhaltsverzeichnis wird sich, wenn die theoretischen Einleitungen vervollständigt sind, auf diese beschränken können.

Für Müller-Kutnewskys Aufgabensammlung bringt die zweite Auflage des zweiten Teils von Ausgabe B die entsprechende Kürzung, wie sie für Ausgabe A hier in Bd. X. 1906 S. 189 besprochen wurde. Neu ist ein Abschnitt über Versicherungsmathematik. Er zeichnet sich durch klare, leichtfaßliche Darstellung und angemessene Aufgaben aus; doch sind die letzten Zeilen vor III auf S. 76 noch durchsichtiger zu formulieren. Neu ist ferner bei den Aufgaben zur Funktionslehre die Berücksichtigung des Differentialquotienten. Auch hier erscheint das Gebotene recht zweckentsprechend, da der Fehler, zuviel bieten zu wollen, vermieden ist. Die graphische Ermittelung von Grenzstellen für Funktionen ist besser auf die Fälle zu zu beschränken, wo die Art der Kurve bekannt ist. Ein Zeichnen auch für viele Funktionswerte ergibt bei $y = x^4 - 3\frac{1}{3}\,x^3 - 2\,x^2 + 8\,y - 19$ (S. 114 Nr. 16a) keine befriedigende Festlegung der Grenzstellen. Da Müller-Kutnewsky sonst für alle Gebiete Material geben, wird die Sammlung durch Aufnahme der bisher ausgeschlossenen darstellenden Geometrie noch gewinnen.

Napravnik gibt in 85 Gruppen 337 Aufgaben mit vollständigen Auflösungen. Das Buch ist in erster Linie für österreichische Verhältnisse bestimmt und zwar für Realschul- und Gymnasialabiturienten, für Kandidaten des Lehrfachs an Bürgerschulen und Frequentanten der Einjährig-Freiwilligenkurse. Seine Benutzung kann aber auch an anderen Stellen empfohlen werden, zumal da, wo die Beifügung der Lösungen erwünscht ist, wie etwa für den Fachlehrer, dessen Schüler das Buch nicht in der Hand haben. Manche Aufgaben sind recht leicht und würden der preußischen Reifeprüfungsordnung nicht entsprechen, so S. 41 Nr. 2 die Umformung von $x = m\,sin\,\alpha - cos\,\alpha$ in eine logarithmische Form. An mehreren Stellen (z. B. S. 13 A. 1, S. 17 A. 2, S. 19 A. 8, S. 167 A. 1) ist „Gleichung" durch „Gleichungssystem" zu ersetzen. Bei der Ballonaufgabe S. 176 werden besser zwei Beobachter eingeführt, da der Ballon auch bei ruhigstem Wetter nicht so lange still stehen wird, bis ein Beobachter an den verschiedenen Stellen gemessen hat (zumal bis auf Sekunden genau!). Auf S. 70, wo die Winkel bis auf Sekunden genau gegeben werden, ist der Zusatz „ziemlich gut" bei Winkelmeßinstrument zu streichen. Die Aufgabenlösungen sind klar und, soweit Stichproben dies ergaben, korrekt. An einigen Stellen wären besser kürzere Lösungen gewählt worden, so S. 63, 4c, wo die Länge der Zentrale die Entscheidung gibt, S. 195, 3, wo mit Hilfe des aus g, $a + b$ und $\frac{w}{2}$ konstruierten Dreiecks ohne Ellipse auszukommen ist, S. 16, 7 und S. 48, 1, wo die Teilbarkeit von $x^5 + y^5$ resp. $x^3 + y^3$ durch $x + y$ benutzt werden kann. Bei planimetrischen Aufgaben wie S. 59, 2 vermißt man ungern die Analysis.

Gera. E. Kullrich.

Digitized by Google

W. H. Blythe. On Models of Cubic Surfaces. Mit mehreren Textfiguren. 106 S. 8. Cambridge 1905, University Press.

Wenn jemand dieses kleine, gut ausgestattete Büchlein (es hat ungefähr das Format der »Sammlung Schubert«) zur Hand nimmt, so glaubt er wohl nach dem Titel eine Darlegung zu finden, wie man den vielerlei Formen, die Flächen 3. Ordg. bieten können, durch Modelle nahekommen kann, insbesondere auch, wie man solche Modelle am zweckmäßigsten herstellt. Aber der Leser wird sich dann etwas getäuscht finden. Denn das Werkchen gibt zunächst über die Hälfte des Textes Entwicklungen zur Theorie der Flächen 3. Ordg., Entwicklungen, die für einen Anfänger zu viel voraussetzen und auch den Vorgeschritteneren nicht ganz befriedigen, da sie zu knapp und doch wieder zu lose sind. Im folgenden wird dann allerdings beschrieben, wie eine F_3 mit vier konischen Knoten und eine solche mit 27 reellen Geraden herzustellen sei. Aber das Schlußkapitel gibt wieder nur an, welche Veränderungen bei Lösung von Knoten eintreten; ferner wird ein Modell einer F_3 mit drei biplanaren Knoten B_3 und ein solches mit einem B_5 beschrieben und auch abgebildet. Die für die Anschauung so wichtige Clebsch sche »Diagonalfläche« ist aber nirgends erwähnt. Auch die sieben neuen Wiener schen Fadenmodelle von Kegeln 3. Ordg. (M. Schilling, Halle 1901) scheint der Verfasser nicht zu kennen. Er gibt ja im Vorwort auch selbst zu, von der einschlägigen deutschen Literatur nur durch etwaige englische oder französische Übersetzungen Kenntnis erlangt zu haben. Da auf weiterbildende Literatur auch nur ganz gelegentlich hingewiesen ist, müssen wir das Büchlein, auch wenn wir seinen geringen Umfang in Betracht ziehen, im ganzen als etwas dürftig bezeichnen.

Speyer. H. Wieleitner.

W. Weitbrecht. Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Sammlung Göschen Nr. 302. 180 S. Leipzig 1906, Göschen. Geb. ℳ 0,80.

A. Cappilleri. Einführung in die Ausgleichungsrechnung (Methode der kleinsten Quadrate). 132 S. Wien 1907, F. Deuticke. Geb. ℳ 3,00.

Eine Einführung in die Ausgleichungsrechnung kann entweder auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung gegründet werden und ihren Ausgangspunkt von dem Gaußschen Fehlergesetz und seiner Definition des mittleren Fehlers nehmen oder einen durchaus elementaren Zugang wählen, wie ihn Herr A. Vogler mit großem Geschick durchgeführt hat. Dabei verdient hervorgehoben zu werden, daß die elementare Darstellung jene Begründung der Methode der kleinsten Quadrate nicht ausschließt, welche auf dem Satz beruht, daß diese Methode den Unbekannten der Ausgleichung günstigste Werte erteilt.

Den ersteren Weg schlägt Herr Cappilleri ein, während Herr Weitbrecht den letzteren vorzieht. Allerdings verzichtet Herr Weitbrecht darauf, das Prinzip der Ausgleichungsrechnung nachträglich durch den Nachweis zu stützen, daß die Unbekannten auf Grund der Methode der kleinsten Quadrate kleinste mittlere Fehler, also größte Gewichte erhalten. Er begnügt sich, das Prinzip durch eine Umdeutung in einen wohlbekannten Satz der Dynamik plausibel zu machen. Solche dynamischen Umdeutungen von Sätzen der Ausgleichungsrechnung in Verbindung mit ausgiebiger Heranziehung der graphi-

Digitized by Google

schen Methode beleben in angenehmer Weise die Darstellung des Herrn Weitbrecht.

Herr Cappilleri beginnt mit der Bestimmung der Wahrscheinlichkeit dafür, daß der zufällige Fehler einer Beobachtung zwischen v und $v + dv$ liege, gleich $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 v^2} dv$, wo die Konstante h als Genauigkeitsmaß der Beobachtung gedeutet wird, und stützt die Methode der kleinsten Quadrate nachträglich durch den erwähnten Nachweis.

Im weiteren Verfolg behandeln beide Werke die Ausgleichung direkter Beobachtungen bei gleicher und ungleicher Genauigkeit, die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen und endlich die Ausgleichung bedingter Beobachtungen. Den einzelnen Abschnitten sind Zahlenbeispiele beigegeben. Es verdient noch hervorgehoben zu werden, daß ein Kapitel des Weitbrechtschen Buches dem Ausgleichungsverfahren für trigonometrische Punkteinschaltung (Vorwärts- und Rückwärtseinschnitt) gewidmet ist, und daß auch dieses Verfahren an einem Zahlenbeispiel durchgeführt wird.

Berlin. E. Jahnke.

J. Riollot. Les carrés magiques. 119 S. Paris 1907, Gauthier-Villars. Geh. 5 frcs.

Eine Monographie über magische Quadrate könnte an sich eine verdienstvolle Publikation sein. Das Interesse für diese Gebilde ist seit den Tagen Albrecht Dürers, der eins der merkwürdigen Zahlenquadrate auf seinem bekannten Stich „Melencolia" anbrachte, rege gewesen und ist heute, wie vielfache Zuschriften und Anfragen aus Laienkreisen zeigen, ein recht weit verbreitetes. Demzufolge ist auch die Literatur dieses Gebietes eine sehr umfangreiche; die Autoren schenken jedoch vielfach allen übrigen einschlägigen Publikationen nicht die geringste Berücksichtigung, ja kennen sie oft ersichtlich gar nicht. An einem Buche, das eine zusammenfassende Darstellung dieses Gebietes gäbe, das also einerseits alles Wichtige über diese Quadrate (die verschiedenen Methoden zu ihrer Herstellung, ihre merkwürdigen Eigenschaften usw.) aus einheitlichen Gesichtspunkten darstellte, andererseits die Literatur erschöpfend berücksichtigte und aufzählte und hierbei womöglich jede Publikation mit kurzen charakterisierenden und kritischen Notizen versähe, fehlt es noch. Andererseits müßte eine solche Monographie den mancherlei Liebhabern sehr erwünscht sein, da sie sich jetzt nur schwer über Spezialfragen orientieren und oft selbst ungeheure Geduldsarbeiten ziemlich nutzlos verrichten. Herrn S. Günthers „Historische Studien über die magischen Quadrate" (s. dessen „Vermischte Untersuchungen zur Gesch. der mathem. Wissenschaften", 1876, Kap. IV) sind doch vorwiegend vom Standpunkt des Historikers, also ohne strenge Systematik, verfaßt und berücksichtigen zudem vorwiegend nur die ältere Zeit. Das jetzt vorliegende Werk füllt diese Lücke nun keineswegs aus und will dies vermutlich auch gar nicht. Welche Aufgaben der Verfasser sich gestellt hat, ist schwer zu sagen, zumal ein Vorwort fehlt. Dem Mathematiker bietet es recht wenig.

Magdeburg. W. Ahrens.

Digitized by Google

W. Rouse Ball. Récréations mathématiques et problèmes des temps anciens et modernes. 2. franz. Ausg. von J. Fitz-Patrick. Teil I (Arithmetik, Algebra, Zahlentheorie). 365 S. Paris 1907, A. Hermann. Geh. 5 frcs.

Herr Fitz-Patrick hat bereits 1898 eine französische Ausgabe des Ball schen Werkes veranstaltet. Aus dem damaligen ersten Kapitel ist durch vielerlei Zusätze und Erweiterungen jetzt ein selbständiger Band von etwa fünffachem Umfange geworden. Neu hinzugekommen ist gleich der erste Abschnitt: „Geschichte der Zahlen", der in mancher Hinsicht an die vor 300 Jahren bisweilen beliebten Werke erinnert, von deren einem Euler einmal sagt, daß er „nicht das geringste Merkwürdige" darin gefunden: „Er durchgehet der Ordnung nach alle Zahlen von 1, 2, 3 bis tausend, und merkt von einer jeden an, wo solche in der Heil. Schrift und andern Auctoribus vorkommen; als bei 38 bringt er nichts anderes vor, als das Exempel des Kranken beim Teich zu Betesda, welcher 38 Jahre daselbst gelegen." Auf biblische und andere alte Quellen beschränkt sich das vorliegende Buch freilich nicht; so hören wir z. B. im Zeichen der Dreizahl, daß Bismarck, dessen Name übrigens auch außerhalb des deutschen Reiches richtig geschrieben werden sollte, drei kaiserliche Herren, drei Besitzungen, drei Kinder und drei Haare hatte, daneben aber auch vielerlei Lehrreiches — immerhin weniger wäre mehr gewesen. Hinzugefügt sind ferner vielerlei elementare Aufgaben aus der griechischen „Anthologie", aus der dem „Triparty" Chuquets angefügten Aufgabensammlung von 1484, aus Bachets „Problèmes plaisants" usw. Im letzten Teil treten dazu zahlentheoretische Gegenstände, die auch jetzt noch Interesse besitzen, wie die eingehend behandelten Mersenneschen Zahlen, der große Fermatsche Satz, das Goldbachsche Theorem, bei dem übrigens unter den Literaturnachweisen die Arbeit von P. Stäckel (Gött. Nachr. 1896) fehlt, usw. Der Liebhaber „amüsanter Arithmetik" wird in dem Buche vielerlei Interessantes finden; auch für Schüler höherer Lehranstalten bietet es passende Gelegenheit zur gleichzeitigen Übung in Arithmetik und französischer Lektüre.

Magdeburg. W. Ahrens.

W. Jordan. Handbuch der Vermessungskunde. Dritter Band: Landesvermessung und Grundaufgaben der Erdmessung. Fünfte erweiterte Auflage von C. Reinhertz. VIII, 678 u. 72 S. Stuttgart 1907, J. B. Metzler. Geb. ℳ 15,—.

Die vorliegende 5. Auflage des III. Bandes des Jordanschen Handbuchs der Vermessungskunde hat im Vergleich mit der vorhergehenden, noch von Jordan selbst bearbeiteten 4. Auflage (1896) durch den nun ebenfalls schon der Weiterführung entrissenen Bearbeiter, Prof. Dr. C. Reinhertz in Hannover, etwas weiter gehende Veränderungen erfahren, als dies bei den Neuauflagen der zwei anderen Bände des Werks der Fall war. Schon die äußeren Verhältnisse des Umfanges bekunden dies: von 593 u. [64] Seiten der 4. Auflage ist der III. Band auf 677 u. [72] Seiten in der 5. gewachsen, während diese Zahlen beim II. Band sind: 785 u. [47] Seiten für die 5. Auflage (1897), 863 u. [47] Seiten für die 6. Auflage (1904), und beim I. Band: 574 u. [21] Seiten in der 4. Auflage (1895) gegen 582 u. [21] Seiten in der 5. Auflage (1904).

Der Vergleich des jetzigen III. Bandes mit der 4. Auflage zeigt haupt-

Digitized by Google

sächlich folgende Änderungen in der Einteilung des Stoffes: Während in den Kapiteln I bis III wenig verändert ist und insbesondere in II und III alle von Jordan für die vorige Auflage neu bearbeiteten Paragraphen unverändert herübergenommen sind, so daß z. B. unter anderem auch neben

$$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \quad \text{an} \quad V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi}$$

festgehalten wird, ist nunmehr im Kapitel IV der neuen Auflage alles auf die sphärische Dreiecks- und Koordinatenberechnung der Landmessung nebst einfachem Übergang auf das Ellipsoid für lineare und für geographische Koordinaten sich Beziehende im Zusammenhang behandelt Die neuen Kapitel V bis VII entsprechen den Kapiteln VI bis VIII der vorigen Auflage, und auch hier sind die von Jordan in früher VII und VIII neu behandelten Paragraphen unverändert übernommen worden. Die elf Paragraphen der Jordanschen Kapitel IX und X sind in das, übrigens genau gleich eingeteilte, jetzige Kapitel VIII zusammengezogen; ebenso sind die Kapitel XI und XII der letzten Auflage in dem jetzigen Kapitel IX, Grundaufgaben der Erdmessung, vereinigt und, unter möglichster Wahrung des alten Textes, doch nicht unwesentlich erweitert. Besonders sind die jetzigen §§ 102, 105, 107 und 108 neu hinzugefügt; die zwei letzten behandeln die Variationen der Schwerkraft an der Erdoberfläche (ohne auf die Ausführung der g-Messungen näher einzugehen) und ihre geodätischen Folgen, z. B. für das Nivellieren, für das die „Schwereverbesserung" unter Zurückgreifen auf die §§ 126 und 127 der 6. Auflage des II. Bandes entwickelt wird.

Neu hinzugefügt hat endlich Reinhertz ein kurzes (33 Seiten umfassendes) Schlußkapitel X: „Orientierung eines Dreiecksnetzes durch Polhöhe und Azimut", z. T. in Anlehnung an Jordan, „Grundzüge der astronomischen Zeit- und Ortsbestimmung", Berlin, Springer 1885, und mit Benutzung von Albrecht, „Formeln und Hilfstafeln für geographische Ortsbestimmungen", 3. Aufl., Leipzig, Engelmann 1894. Die behandelten Methoden sind absichtlich wenig zahlreich, nämlich für Δu Zenitdistanzmessungen von Sternen nahe beim Ost- und Westvertikal, für das Azimut Horizontalwinkelmessung zwischen Polaris und dem terrestrischen Zielpunkt, endlich für φ Zenitdistanzmessungen von Sternen in Zirkummeridianstellung, einschließlich Polaris (in nicht zu kleinen Breiten) zu beliebiger, bekannter Zeit. Die φ-Bestimmung mit dem Zenitteleskop wird nur angeführt; dagegen sind, für Zwecke mit weniger weitgehender Genauigkeit, auch Messungen für Zeit, Breite und Azimut mit Benutzung der Sonne erörtert. Die in diesem neuen Kapitel besprochenen Messungen sind durch Zahlenbeispiele erläutert, denen Beobachtungen von Herrn Cand. math. W. Wagemann, früher einige Semester lang Schüler von Reinhertz, z. Z. Assistent bei Prof. Dr. Ambronn auf der Sternwarte Göttingen, zugrunde liegen. Herr Wagemann hat auch den diese Beispiele begleitenden Text geliefert, wobei er sich an die vorhandenen schriftlichen Skizzierungen von Reinhertz angeschlossen hat.

Mit dem vorliegenden Buche ist nun die, leider einzige Bearbeitung des Jordanschen Handbuchs durch Reinhertz abgeschlossen; es ist dem umfassenden Werke, aus dem seit 30 Jahren so viele Belehrung geschöpft haben, zu wünschen, daß eine Fortführung in ebenso berufene Hände gelangen möge wie die 6. Auflage des II. und die 5. Aufl. des I. und dieses III. Bandes.

Stuttgart. E. Hammer.

Digitized by Google

H. Wedding. Das Eisenhüttenwesen. Erläutert in acht Vorträgen (Aus Natur und Geisteswelt, 20. Band.) 3. Auflage. Mit 15 Figuren. VI u. 116 S. Leipzig 1908, B. G. Teubner. Geh. ℳ 1,—, in Leinwand geb. ℳ 1,25.

Der Altmeister der Eisenhüttenkunde veröffentlicht hier 8 Vorträge, die er vor Eisenarbeitern gehalten hat. Wieder ein Beispiel dafür, wie gern hochstehende Fachleute sich in gemeinverständlicher Weise über ihre Wissenschaft äußern. Die Neigung dazu mag in einem Lehrtriebe edelster Art gesehen werden, der in weitern Kreisen ein Verständnis für die Arbeit des Fachgelehrten wecken und die Bestrebungen und Ergebnisse der eigenen Lebenstätigkeit al Glied des Ganzen zeigen möchte, ein gewisses Bedürfnis nach einer richtig zu verstehenden Universalität, das glücklicherweise so oft im Herzen des auf der Höhe seines Faches stehenden Forschers keimt. Wie gerade dieser am besten imstande ist, in wirklich *gemeinverständlicher* Weise sein Gebiet darzustellen, dafür gibt die vorliegende Schrift ebenfalls einen Beleg. Auch für diese Tatsache liegt die Erklärung nahe. Der vollkommenste Überblick über den Stoff ermöglicht die richtige Auswahl des für den vorgesetzten Zweck Wichtigsten, und die Gefahr, in pseudowissenschaftliche Unverständlichkeit zu verfallen, ist dem gründlichsten und fruchtbarsten Forscher am fernsten. „Es gibt nichts, was sich hinterher nicht mit einfachen Mitteln darstellen ließe", hat einmal William Thomson gesagt.

Nach einer Einleitung über die wirtschaftliche Bedeutung des Eisens, gibt der Verfasser dem vorausgesetzten Leserkreise angepaßte Erläuterungen über einige notwendige chemische, physikalische und geologische Grundbegriffe, behandelt dann eingehender die Eisenerze und Brennstoffe und leitet durch Beschreibung der verschiedenen Eisensorten zu ihrer Herstellungsweise über. Dem Erzeugen des Roheisens und des schmiedbaren Eisens folgen die Verfeinerungsarbeiten (Kohlung, Desoxydation, Schweißen, Dichten usw.) und endlich die hüttenmäßige Weiterverarbeitung (Gießen, Schmieden, Walzen, Pressen).

Frühere Hörer des Verfassers werden besonders auch durch die einfache, aber dem allgemeinen Verständnisse künstlerisch, man möchte sagen raffiniert angepaßte Sprache an die lebendige, klare mündliche Vortragweise des Verfassers erinnert werden. Nur wenige Stellen der kleinen Schrift möchte man zugunsten noch besserer Einsicht trotz des gegebenen engen Rahmens etwas eingehender behandelt sehen. So wird der Zweck der Verkohlung der Brennstoffe dem Unkundigen nicht recht zum Verständnisse kommen, das auch wegen der allgemeineren Bedeutung dieses Verfahrens erwünscht wäre. Das Wort „Anreicherung" wird in dem Zusammenhange noch nicht zu einem Begriffe. Gerade der Verfasser würde imstande gewesen sein, den nicht leicht zu verstehenden Zweck des von alters her ausgeübten Verfahrens faßlich zu begründen. Besonders aber würden noch mehr zahlenmäßige Angaben erwünscht sein. Schriften solcher Art, wie die vorliegende, sind nicht nur für naturwissenschaftliche und technische Laien nützlich, sondern auch für Angehörige anderer Fachgebiete. Wie viel Nicht-Hüttenleute mag es geben, deren Wissen vom Eisen annähernd durch den Umfang dieser Schrift gekennzeichnet wird, obwohl sie täglich mit der Verwendung des Eisens zu tun haben? Diesen Kreisen namentlich würde beispielweise mit Angaben über den Brennstoffverbrauch bei den verschiedenen Hüttenprozessen gedient sein, die Schrift würde dadurch nicht umfangreicher,

Digitized by Google

ihr Wert noch erheblich gesteigert. Vielleicht sieht sich der künftige Bearbeiter in der nächsten Auflage zur Erfüllung dieses Wunsches veranlaßt, den auch viele Laien zur besseren Beurteilung der wirtschaftlichen Seite des Stoffes teilen werden. Der Verfasser selbst ist ja inzwischen gestorben.

Möchte diese in Anlage und Sorgfalt der Ausführung als allgemeinverständliche Darstellung vorbildliche Schrift allgemeine Verbreitung finden, auch in Schulen. Das Lesen der Schrift über einen der wichtigsten Gegenstände unseres wirtschaftlichen Lebens ist für jeden ein Genuß, der sich wirklich belehren lassen will. Die überall eingestreuten Anknüpfungen und Hinweise auf andere technische Gebiete, auf das soziale und kulturhistorische, zeigen den trotz aller Spezialisierung weitblickenden Fachmann, der bei einer festlichen Gelegenheit scherzhaft von sich sagte: „Sie wissen, meine Herren, daß ich von nichts etwas verstehe als vom Eisen."

Berlin. A. Rotth.

J. A. de Séguier. Théorie des groupes finis. Éléments de la théorie des groupes abstraits. 176 S. Paris 1904, Gauthier-Villars.

Mag auch, um mit Poincaré zu sprechen, die Idee des Gruppenbegriffes implizit so alt wie der mathematische Gedanke sein, so hat sie sich doch zuerst bei der Behandlung algebraischer Gleichungen klar und deutlich dargeboten. Die Permutationsgruppen bilden daher den Ausgangspunkt der Gruppentheorie. Lagrange, Ruffini, Cauchy, Abel und Galois sind die Begründer der Disziplin, und C. Jordans fundamentaler Traité des substitutions et des équations algébriques bedeutet für sie einen Markstein. Die Erkenntnis, daß bei einer Gruppe nicht die Art der Darstellung der Symbole, sondern das Gesetz für ihre Kombination den springenden Punkt bildet, die Prinzipien der Theorie der Permutationsgruppen also einem abstrakteren, allgemeineren Gedankenkreise angehören, ist wohl am frühesten von Cayley und Kronecker ausgesprochen worden.

Wieviel auch die Theorie der Permutationsgruppen Frankreichs Forschern zu verdanken hat, so kann man nicht behaupten, daß die abstrakte Gruppentheorie, die vornehmlich von englisch und deutsch sprechenden Gelehrten ausgebaut wurde, die französischen Mathematiker besonders angezogen hat. Um so erfreulicher ist es, ein von einem französischen Gelehrten geschriebenes Werk der abstrakten Gruppentheorie anzeigen zu können. Der vorliegende erste Teil behandelt unter dem Titel „Éléments" ausschließlich die abstrakte Gruppentheorie, ohne von der Natur der Elemente irgend welchen Gebrauch zu machen. Ein zweiter Teil, in dem auch die Permutationsgruppen verwendet werden sollen, wird unter dem Titel „Compléments" erscheinen. Auf den ersten sechs Seiten erfahren die Mengen nach G. Cantor eine kurze Behandlung, um sie in endliche und unendliche einzuteilen. Hierauf definiert der Verf. die Gruppe als eine besondere Gattung eines corps. Unter einem corps wird von de Séguier durchgehend eine Menge von endlich oder unendlich vielen Elementen verstanden, die miteinander nach einer derartigen Vorschrift komponiert werden können, daß für irgend drei Elemente stets das assoziative Prinzip erfüllt ist. Kommen zu diesem Postulat des assoziativen Charakters noch die zwei weiteren hinzu, daß zu irgend zwei Elementen a und b des corps stets in ihm erstens ein Element x existieren soll, so daß $ax = b$ wird, und zweitens in ihm ein Ele-

Digitized by Google

ment y vorhanden sein soll, so daß $ya = b$ wird, so ist der corps eine Gruppe im üblichen Sinne. Die Abgeschlossenheit ihrer Elemente in bezug auf die Komposition erscheint dann als beweisbarer Lehrsatz. Dies ist die erste von Huntington (Bulletin American M. S. **8**, 296) gegebene Gruppendefinition durch drei unabhängige Postulate. De Séguier setzt übrigens nicht voraus, daß a alle Elemente des corps durchläuft; es genügt, daß für a alle erzeugenden Elemente des corps gesetzt werden, d. h. alle diejenigen, durch deren Komposition sämtliche Elemente des corps entstehen. An Stelle der gegebenen Definition würde man gegenwärtig wohl zweckmäßiger eine auch von Huntington in einem neueren Aufsatze (Transactions American M. S. **6**, 183, 1905), als „more convenient" bezeichnete Definition von Moore durch unabhängige Postulate treten lassen. Ich würde sie in der Dicksonschen Form (Transactions American M. S. **6**, 199, 1905,) wählen. Nach ihr wird ein corps eine Gruppe, wenn außer dem Postulat der Assoziativität (I) noch die folgenden drei Postulate gelten:

II. Das Produkt irgend zweier Elemente des corps ist ein ihm angehöriges eindeutig bestimmtes Element.

III. Der corps enthält wenigstens ein rechtshändiges Einheitselement i, so daß für jedes Element des corps die Gleichung $ai = a$ gilt.

IV. Existieren derartige Einheitselemente i, so soll für ein besonderes i und jedes a des corps die Gleichung $ax = i$ innerhalb des corps lösbar sein.

Die drei vom Verf. angegebenen Huntingtonschen Postulate zur Definition einer Gruppe sind, ebenso wie die vier Moore-Dicksonschen, voneinander unabhängig, d. h. keines von ihnen ist aus den anderen als beweisbarer Lehrsatz herleitbar. Fügt man zu den drei Huntingtonschen oder den vier Moore-Dicksonschen Postulaten noch das weitere, daß der corps nur die endliche Anzahl n von Elementen besitzen soll, so wird durch die Hinzunahme des weiteren Postulats die Unabhängigkeit nicht gestört. Um dies nachzuweisen, reichen de Séguiers Betrachtungen nicht aus; vielmehr wäre die Unabhängigkeit der Postulate bei der Voraussetzung, daß der corps n Elemente enthalten soll, etwa nach Huntington zu erweisen. Der Zusatz „abélien" auf S. 8, Z. 10 von unten bei dem Nachweis der Unabhängigkeit der drei Postulate und der Satz „Cette condition est toujours remplie si G est abélien" (S. 7, Z. 12) widersprechen sich; beide zitierte Stellen sind zu streichen.

Sehr eingehend untersucht Verf. die Definition einer Gruppe durch ein System von Gleichungen. Hieran schließt sich eine kürzere Betrachtung der rationalen und irrationalen Zahlen, die sich sowohl in bezug auf additive, als auch auf multiplikative Verknüpfung als Gruppen auffassen lassen. Der Schluß des ersten Kapitels behandelt sehr gründlich den endlichen Galoisschen Körper. Des Verf. Ausgangspunkt ist ein Abelscher corps C, dessen Elemente auf zwei Arten verknüpfbar sind. In bezug auf die erste Art der Verknüpfung, die als Addition bezeichnet wird, ist C eine additive Gruppe. Ihre Einheit sei mit 0 bezeichnet. Für die zweite Art der Komposition, die Multiplikation heiße, soll $C - 0$ (d. h. C mit Ausschluß der Einheit der additiven Gruppe) ebenfalls eine Gruppe sein. Für irgend welche x und y in C soll $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$ sein; hieraus folgt, daß, wenn $xy = 0$ ist, entweder $x = 0$ oder $y = 0$ ist. Schließlich soll die Multiplikation in bezug auf die Addition distributiv sein. Ein derartiger corps heißt nach allgemeinem Gebrauch ein Körper oder Feld (champ).

Digitized by Google

Abstrakte Definitionen für einen Körper oder ein Feld gehen auf H. Weber (Math. Annalen **43**) und E. H. Moore zurück. Die Frage nach Definitionen eines Körpers durch voneinander unabhängige Postulate wird gegenwärtig von Dickson und Huntington (Transactions American M. S. **4**, 1903 und **6**, 1905) eifrig studiert. Die Worte des Verf.: „Les postulats qui le (le champ) caractérisent sont évidemment indépendants" (S. 27) sind unzulänglich. Enthält C nur eine endliche Anzahl von Elementen, so hat man nach einem Mooreschen Satze einen endlichen Galoisschen Körper, dessen Ordnung eine Primzahlpotenz ist.

Kap. II behandelt die Untergruppen, ihre Zerlegung nach einem einfachen oder einem Doppelmodul, den Homomorphismus, die Sylowschen Sätze, Kompositions- und Hauptreihen einer Gruppe, schließlich die zerlegbaren Gruppen. Im Zusammenhang mit der Kompositionsreihe beschäftigt sich Verf. eingehend mit dem von ihm sogenannten „groupe spécial." Auf S. 89 muß seine Charakterisierung lauten: „Si tout groupe facteur $A_{i-1}/A_i (A_0 = G)$ d'une seule série principale $G, A_1, A_2, \ldots, A_r = 1$ d'un groupe G a ses éléments normaux dans G/A_i, G est spécial." Ebenso ist auf S. 89, Z. 9 „dans G" in „dans G/B" zu ändern. Die vom Verf. sogenannte spezielle Gruppe ist auch sonst in der Literatur aufgetreten (W. Burnside, Theory of groups of finite order, S. 115). Eine charakteristische Eigenschaft für sie ist ferner noch, daß sich jede ihrer Untergruppen in eine Kompositionsreihe einordnen läßt (vgl. des Ref. Aufsatz in den Math. Annalen **55**, 67).

Das dritte Kapitel ist den Abelschen Gruppen gewidmet. Wie überall werden auch hier, obgleich die endlichen Gruppen der vornehmlichste Gegenstand der Untersuchung sind, die unendlichen in den Kreis der Betrachtung gezogen. Die vom Verf. (S. 98) untersuchten unendlichen Abelschen Gruppen, die eine Basis besitzen und keine Elemente unendlicher Ordnung enthalten, hat übrigens auch H. Weber (Math. Ann. **48**, 439) betrachtet.

Das Schlußkapitel gilt der eingehenden Behandlung der Gruppen von Primzahlpotenzordnung. Zu ihrer Charakterisierung bedient sich der Verf. des Begriffes „figure", den er auf folgende Weise definiert: „$1, A_1, A_2, \ldots, A_n = G$ étant une série spéciale du $g_{p^m}^m = G$ et A_i/A_{i-1} ayant le type $(a_i, b_i, \ldots)$ (117, non 115), je dirai que le symbole $(a_1, b_1, \ldots), (a_2, b_2, \ldots), \ldots$ est la figure de G" (S. 113). Die Reihe $1, A_1, A_2, \ldots, A_n = G$ heißt eine Spezialreihe, wenn die Faktorgruppe A_i/A_{i-1} le central von G/A_{i-1} ist (S. 87). Gruppen, die eine Spezialreihe besitzen, sind identisch mit den oben erwähnten speziellen Gruppen. Die Gesamtheit invarianter Elemente einer Gruppe nennt Verf. le central der Gruppe (S. 57). Der Typus $(k_1, k_2, \ldots, k_\varrho)$ einer Abelschen Gruppe von Primzahlpotenzordnung p^k bedeutet in üblicher Weise die Ordnungen $p^{k_1}, p^{k_2}, \ldots, p^{k_\varrho}$ der ϱ erzeugenden Elemente eines Basissystems. Ich habe hier an einem Beispiel eine Reihe vom Verf. neu eingeführter Bezeichnungen wiedergegeben.

Hoffentlich wird der zu erwartende zweite Teil zur bequemeren und leichteren Orientierung einen ausführlichen Index bringen. Durch die zahlreichen neuen Namen und eine kurze Ausdrucksweise hat Verf. auf dem geringen Raume ein sehr großes Material zusammengetragen. Zwar sind die benutzten Hilfssätze, wenn sie sich darboten, bewiesen; trotzdem hat de Séguier, wie mir scheint, infolge der knappen und kondensierten Darstellung mehr ein

Digitized by Google

Handbuch als ein zur Einführung bestimmtes Lehrbuch geschaffen. Die neueste Literatur ist dem Verf. wohl bekannt und von ihm auf das geschickteste benutzt worden. In zwei beigefügten Noten werden die Bewegungsgruppen sowie Elementarteiler, lineare Gleichungen und lineare Kongruenzen behandelt.

Freiburg i. Br., März 1906. A. Loewy.

Friedrich Kuhn. Fragen und Aufgaben aus dem Anfangskapitel der Planimetrie. 8°. VIII u. 48 S. München 1906, R. Oldenbourg. Geh. ℳ 0,80.

M. Schuster. Geometrische Aufgaben und Lehrbuch der Geometrie. Planimetrie — Stereometrie — Ebene und sphärische Trigonometrie. Nach konstruktiv analytischer Methode. Ausgabe B. Planimetrie für Progymnasien und Realschulen. Mit 2 lithographischen Tafeln. Zweite Auflage. 8°. VIII u. 118 S. Leipzig 1906, B. G. Teubner. Geb. ℳ 1,80.

Kuhn sucht den Weg zu zeigen, auf dem es möglich ist, die Schwierigkeiten des planimetrischen Anfangsunterrichtes ohne Hilfe eines Vorkursus zu überwinden. Doch ist sein Buch auch für die Verwendung an Schulen bestimmt, die, den preußischen Lehrplänen entsprechend, einen propädeutischen Kursus haben. Das Büchlein, das besonders auch zu frühzeitigem Zeichnen mit Zirkel und Lineal anregt und die praktische Verwertbarkeit vielfach betont, ist durchaus empfehlenswert.

Schusters Planimetrie Ausgabe B hat in der zweiten Auflage an Brauchbarkeit entschieden noch gewonnen. Bei gewissen vorbildlichen Aufgaben wurde die Frageform durch die Aussageform ersetzt, so daß aus der Aufgabe das Musterbeispiel wurde. Den wichtigsten Lehrsätzen wurden knappe Beweise hinzugefügt. Außerdem wurden einige Umstellungen vorgenommen. Wie hier schon 1903 in Band V S. 153 ausgesprochen wurde, dürfte es zweckmäßiger sein, Kapitel III und IV in anderer Einzelgruppierung zusammenzuarbeiten, einmal wegen der ja auch von Schuster beachteten Zusammenbehandlung von Kongruenzsätzen und Konstruktionsaufgaben, anderseits um der natürlichen Reihenfolge: einfaches Dreieck (ohne Transversalen), Dreieck mit Transversalen besser zu entsprechen.

Gera. E. Kullrich.

Wilhelm Winter. Stereometrie. Lehrbuch und Aufgabensammlung für Schulen. Vierte Auflage. 8°. IV u. 116 S. München 1906, Theodor Ackermann. Geb. ℳ 1,60.

Von Winters Stereometrie wurden die ersten beiden Auflagen in den Lit. Ber. XXXVIII und LVI hier anerkennend besprochen. Die neuen Figuren der vierten Auflage sind brauchbar. Wenn die dritte und vierte Auflage sonstige Änderungen nicht gebracht haben, so ist das bezüglich der Nichtberücksichtigung der Einführung ins Körperzeichnen zu bedauern. Zu den kleinen künftig abzustellenden Mängeln gehören Sätze wie S. 30 Z. 9 von unten: „Dies in die erste Gleichung eingesetzt gibt“ und der entsprechende Satz S. 65 Mitte.

Gera. E. Kullrich.

Digitized by Google

A. Sickenberger. Übungsbuch zur Algebra. Erste Abteilung. Erste und zweite Stufe der Rechnungsarten einschließlich der lineären Gleichungen mit einer und mehreren Unbekannten. Fünfte Auflage. Bearbeitet von Alexander Schmid. 8°. VI u. 106 S. München 1906, Th. Ackermann. Geb. ℳ 1,35.

Franz Močevar. Lehr- und Übungsbuch der Arithmetik für die unteren Klassen der Gymnasien und verwandten Lehranstalten. Mit 3 Figuren. Sechste Auflage. 8°. IV u. 152 S. Wien 1906, F. Tempsky. geb. 2 K 10 h.

Von den recht brauchbaren arithmetischen Büchern von Sickenberger und Močevar sind neue Auflagen notwendig geworden. In die erste Sammlung wurden mit Recht noch einige weitere zweckentsprechende Textaufgaben aufgenommen. Fortbleiben können künftighin Übungen wie $7a + + + 6a$ (S. 10). Der Einführung dreifacher Zeichen bedarf es wirklich nicht. Močevars Lehr- und Übungsbuch ist ein unveränderter Abdruck der für Österreich „durch Ministerialerlaß allgemein zulässig erklärten" fünften Auflage. Auch anderweit kann das klar und praktisch geschriebene Buch gut verwendet werden. Es bietet den Stoff der preußischen Lehrpläne für VI bis U III und außerdem die linearen Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

Gera. E. Kullrich.

H. Thieme. Leitfaden der Mathematik für Gymnasien. Erster Teil: Die Unterstufe. Dritte Auflage. 8°. 103 S. Leipzig 1907, G. Freytag. Geb. ℳ 1,60.

F. Pietzker. Lehrgang der Elementar-Mathematik in zwei Stufen. Teil I. Lehrgang der Unterstufe (enthaltend den Lehrstoff für die sechsklassigen höheren Schulen, sowie für die unteren und mittleren Klassen der Vollanstalten). 8°. XII u. 318 S. Leipzig 1906, B. G. Teubner. Geb. ℳ 3,20.

Das Hornsche Lehrbücherverzeichnis für Preußen weist in seiner zweiten Ausgabe von 1906 als gegen 1901 neu hinzugekommen auch Thiemes Mathematik nach (Nr. 858); möge eine recht bald folgende Ausgabe Horns gleich Günstiges über die Einführung von Pietzkers Lehrbuch zu berichten haben! Jedenfalls sind die beiden ersten, oben im Titel angezeigten Teile von Thiemes und Pietzkers Lehrbuch als sehr erfreuliche Erscheinungen zu bezeichnen, da sie der Aufgabe, die sie sich stellen, in vollstem Maße gerecht werden. Dabei ist freilich diese Aufgabe für beide Bücher eine durchaus verschiedene. Thieme will den unentbehrlichsten Stoff in denkbar größter Kürze bieten; dahingegen will Pietzker ein in methodologischer Beziehung neues Schulbuch schaffen und muß daher eine breitere Ausgestaltung eintreten lassen. So wird, wer knappe Lehrbücher liebt, dem Schüler nicht gerade Pietzker in die Hand geben, auch wenn er selbst das Buch gern dankbar benutzt. Wer eine ausführliche Darstellung den Schülern mitgeben will, dem wird andrerseits Thieme nicht genügen.

Auch von Thiemes Standpunkt aus erscheint neben manchem Arithmetischen in der Geometrie als zu kurz behandelt: der verallgemeinerte pythagoreische Lehrsatz und der Satz von den Ergänzungsparallelogrammen, die beide nur als Übungen Aufnahme finden. Demgegenüber macht sich im Vorkursus

Digitized by Google

manches Formelhafte allzu breit. Umstellungen werden sich empfehlen auf S. 24, da die Höhen erst später zu behandeln sind, und auf S. 34, wo eine organische Verbindung der Grundaufgaben für die Dreieckskonstruktion mit den Kongruenzsätzen vorteilhafter wäre. S. 26 unten bleibt künftig „derselben Ebene" besser fort.

Pietzker will durch sein Lehrbuch die von der Meraner Kommission empfohlene Gestaltung des Unterrichtsganges in der Schulbuchliteratur, wo sie bisher keinem Buche das besondere Gepräge aufgedrückt hatte, zur Geltung bringen. Während an der Stoffverteilung gegen die geltenden preußischen Lehrpläne nichts geändert ist, soll die Erziehung zur Gewohnheit des funktionalen Denkens dem Lehrbuch sein besonderes Gepräge geben. Das meiste Dargebotene wird die vielseitigste Zustimmung finden, da überall peinlichste Sorgfalt und langjährige Unterrichtserfahrung die Feder geführt haben. Einige Druckfehler, die Redewendung „reimt sich" und die Ausdrücke „natürlich" und „selbstverständlich" werden leicht zu beseitigen sein. Referent würde die S. 202 benutzte Ähnlichkeit im Raum zurückstellen und erst S. 283 angliedern. Nicht korrekt genug ist die Angabe S. 253 arcsin $\frac{21}{29}$ sei der „Bogen *oder* Winkel" vom Sinus im Werte $\frac{21}{29}$ und wenig glücklich die Bezeichnung arc log sin $(9{,}85982-10)$ auf S. 256 (es ist dies zu lesen: der arcus, dessen log sin den Wert $9{,}85982-10$ hat). Am besten werden solche zusammengesetzten Bezeichnungen ganz vermieden, was sehr gut möglich ist.

Für die Geometrie geben Thieme und Pietzker auch zweckmäßiges Aufgabenmaterial. Daß die sorgfältige Durchführung der Zeichnung bei einer Konstruktionsaufgabe das eigentliche Ziel ist, hätte mehr betont werden können. Es tritt nicht genug hervor, wenn Thieme S. 40 sagt: „Die Konstruktion ist die Angabe der einzelnen Zeichnungen, mittels deren man aus den gegebenen Stücken die gesuchte Figur erhält". Pietzker äußert sich auf S. 144 ähnlich. Bei beiden wird nicht auf das Parallelenziehen mittels des Schiebedreiecks hingewiesen.

Im Anhang wird von Pietzker im wesentlichen das Mehr an Stoff für die Realanstalten behandelt, und den Beschluß macht bei ihm ebenso wie bei Thieme ein hübscher Abschnitt über graphische Darstellung von Funktionen und die graphische Lösung von Gleichungen.

Der Druck und die Figuren sind in beiden Büchern gut. Pietzker benutzt in der Projektionslehre 3 Farben. Leider schließen sich dabei die verschiedenen Farben in einer Figur nicht immer genau genug aneinander an.

Gera. E. Kullrich.

Heinrich Müller. **Vierstellige Logarithmen-Tafeln.** Für die Hand der Schüler zusammengestellt. 8^0. 6 S. Leipzig 1906, B. G. Teubner. Geh. *M* —,25.

O. Richter. **Dreistellige logarithmische und trigonometrische Tafeln.** Taschenformat. 8 S. Leipzig 1907, B. G. Teubner. Geh. *M* —,20.

Heinrich Müllers Tafeln empfehlen sich da, wo man mit vierstelligen Tafeln auskommen kann, durch ihre Wohlfeilheit. Sie werden noch bequemer zu benutzen sein, wenn künftig Tafel A auf S. 2 und 3 kommt, die Tafeln B und C entweder auf S. 1 oder auf S. 6. Bei vierstelligen Tafeln kann und

Digitized by Google

muß man eine Anordnung vermeiden, die ein Umblättern bei Benutzung einund derselben Tafel erfordert.

O. Richters Tafeln sollen in Schulen, die der fünfstelligen Logarithmentafel nicht entraten können, neben diesen und zwar im besondern bei Auswertung der von den Schülern angestellten Beobachtungen als Ersatz eines Rechenschiebers dienen. Sie sind als recht handlich und preiswert zu empfehlen. In den Erläuterungen auf S. 2 wäre zu vermeiden gewesen, daß log tan und α auf zwei verschiedenen Zeilen stehen; auch ist log tan α nicht = 9,166, sondern 9,166 — 10; endlich stört in derselben Zeile das Gleichheitszeichen zwischen $\frac{45}{13}$ und 3.

Gera. E. Kullrich.

Paul Zühlke. Ausführung elementargeometrischer Konstruktionen bei ungünstigen Lageverhältnissen. 8°. 46 S. Leipzig, B. G. Teubner. Steif geh. ℳ 1,—.

Zühlkes an einen in der Berliner Mathematischen Gesellschaft (25. X. 05) gehaltenen Vortrag anknüpfende Arbeit ist empfehlenswert als wohlgeeignet zur Förderung liebevollen Zeichnens in der Geometrie. Für jeden Lehrer ist es notwendig, sich über die wirkliche Durchführung des Zeichnens bei ungünstigen Lageverhältnissen zu orientieren, und gelegentlich wird auch im Unterricht hiervon etwas geboten werden können. Besonders den für die Mathematik interessierten Schülern wird man Zühlkes Schrift zum Selbststudium und zur Anregung der Selbstbetätigung in die Hand geben können.

Gera. E. Kullrich.

Astronomischer Kalender für 1907. Herausgegeben von der k. k. Sternwarte zu Wien. 8°. 151 S. und Notizblätter. Wien 1907, Karl Gerold's Sohn. Geb. ℳ 2,40.

Der Jahrgang 1907 des früher schon hier empfohlenen Astronomischen Kalenders bringt nur geringe Änderungen. In den Beilagen behandelt Weiß wiederum „Neue Planeten und Kometen" und außerdem „Phasen des Saturnringes im Jahre 1907."

Gera. E. Kullrich.

Astronomischer Kalender für 1908. Herausgegeben von der k. k. Sternwarte zu Wien. Neue Folge. 8°. Siebenundzwanzigster Jahrgang. Wien 1908, K. Gerold's Sohn. Geb. ℳ 2,40.

Das Bändchen enthält auf 164 Seiten außer einem ausführlichen und astronomischen Kalendarium eine Fülle von astronomischen Tabellen, aus denen ich nur eine Fortsetzung und Vervollständigung des zuletzt im Jahrgang 1897 gegebenen Verzeichnisses der berechneten Kometenbahnen hervorhebe. Beigegeben sind ferner Abhandlungen der Herren J. Holetschek: Über die Sichtbarkeit eines Planeten, H. Jaschke: Über die rasche Einregulierung von Präzisionspendeln und E. Weiß: Neue Planeten und Kometen.

Berlin. A. Baruch.

Digitized by Google

Vermischte Mitteilungen.

1. Aufgaben und Lehrsätze. Lösungen.

A. Aufgaben und Lehrsätze.

198. Die Kreise, die eine Schar von parallelen Sehnen einer Ellipse mit den Halbachsen a, b zu Durchmessern haben, umhüllen eine neue konzentrische Ellipse, deren große Halbachse die zu den Sehnen konjugierte Richtung besitzt und gleich $\sqrt{a^2 + b^2}$ ist, und deren kleine Halbachse gleich dem in der Sehnenschar vorkommenden Halbmesser der gegebenen Ellipse ist. Die Brennpunkte liegen auf der gegebenen Ellipse in den Endpunkten des zu der Sehnenschar konjugierten Durchmessers. Alle Ellipsen, die man in dieser Weise für jede Richtung der parallelen Sehnen erhält, sind der gegebenen Ellipse umgeschrieben und dem Kreis mit dem Radius $\sqrt{a^2 + b^2}$ eingeschrieben.

Wie heißen die entsprechenden Sätze für Hyperbel und Parabel?

Straßburg i. E. PAUL EPSTEIN.

199. Ein Kurvenbüschel 2. Ordnung ist allgemein durch ein Paar Pol und Polare und durch zwei Paare konjugierter Punkte bestimmt. Welche Gleichung hat dieser Büschel, wenn der Fundamentalecke $x_2 x_3 = 0$ der Strahl $\Sigma a_{1i} x_i = 0$ polar und den beiden anderen Ecken des Dreiseites $x_1 x_2 x_3 = 0$ die Punkte $\varrho x_i = \beta_i$ und $\varrho x_i = \gamma_i$ konjugiert sind?

Holzminden. G. KOBER.

200. Déterminer les courbes gauches qui sont en même temps courbes de Bertrand et : 1^0 géodésiques de cônes; 2^0 courbes sphériques.

Nivelles (Belgique). J. ROSE.

201. Gegeben ein Kreis und die Tangente im Endpunkte B eines festen Durchmessers AB. Man ziehe von einem beliebigen Punkte P der Tangente die Gerade PA und die Tangente PC an den Kreis und ziehe PZ, sodaß Winkel CPZ gleich Winkel APB ist. Gesucht die Umhüllungskurve der Geraden PZ nebst den aus der Konstruktion leicht sich ergebenden Eigenschaften.

Münster. stud. math. ARTHUR WIEFERICH.

Digitized by Google

B. Lösungen.

Zu **14** (Bd. I, S. 370) (E. N. Barisien). — L'hyperbole d'Apollonius relative à chacun des points d'une ellipse enveloppe une Kreuzkurve. Les points d'intersection des deux hyperboles d'Apollonius relatives à deux points conjugués de l'ellipse sont situés sur une Kreuzcurve homothétique à la précédente. —

Les pieds des trois normales menées du point (α, β) à l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ sont situés sur l'hyperbole d'Apollonius $c^2xy + b^2\beta x - a^2\alpha y = 0$. Le point (α, β) étant sur la même ellipse, ses coordonnées seront $(a \cos \varphi, b \sin \varphi)$. Ces valeurs transforment l'équation précédente en

$$c^2xy + b^3x \sin \varphi - a^3y \cos \varphi = 0.$$

Dérivant par rapport à φ, il vient

$$b^3x \cos \varphi + a^3y \sin \varphi = 0.$$

Tirons de là les valeurs de $\sin \varphi$, $\cos \varphi$ et formons la somme des carrés; nous aurons alors pour équation de l'enveloppe de l'hyperbole: $\frac{a^6}{x^2} + \frac{b^6}{y^2} = c^4$, équation qui représente une Kreuzcurve. D'ailleurs cette courbe est aussi: 1^0 le lieu du pôle de la corde normale MN en un point M de l'ellipse par rapport à cette ellipse (voir Zeitschrift für math. u. naturw. Unterricht, 7. u. 8. (Doppel-)Heft des 38. Jahrgangs, Aufg. 138, p. 543); 2^0 si les rayons vecteurs MF, MF' d'un point d'une ellipse rencontrent la courbe une seconde fois en P, P', le lieu du point de rencontre de la corde PP' avec la tangente menée en M (v. Mathesis, t. X, 1890, Question 687, p. 261). — Le lieu des points d'intersection des deux hyperboles relatives à deux points conjugués $(a \cos \varphi, b \sin \varphi)$, $(-a \sin \varphi, b \cos \varphi)$ de l'ellipse résulte par l'élimination de φ entre les équations:

$$c^2xy + b^3x \sin \varphi - a^3y \cos \varphi = 0,$$
$$c^2xy + b^3x \cos \varphi + a^3y \sin \varphi = 0,$$

d'où il suit facilement le lieu cherché: $\frac{a^6}{x^2} + \frac{b^6}{y^2} = 2c^4$. On voit donc que les deux courbes sont homothétiques.

Remarque: On peut généraliser la première partie de l'énoncé de manière que le point (α, β) se meut sur une circonférence concentrique avec l'ellipse et de rayon quelconque, sans que la nature de la courbe se change (voir aussi Mathesis (2), VII, 1897, Question 1093, p. 257).

Berlin. cand. math. Werner Gaedecke.

Zu **40** (Bd. II, S. 357) (O. Stolz). — Errichtet man in jedem Punkte M einer stetigen und rektifizierbaren Raumkurve die Normalebene derselben und beschreibt darin von M aus einen Kreis mit dem festen Radius r, wovon ein beliebiger Punkt mit m bezeichnet sei, so erhält man eine Fläche. Damit sie einfach sei, ist notwendig und hinreichend, daß der Krümmungsradius r' in keinem Punkte der gegebenen Kurve verschwindet, und r das Minimum desselben, welches eine positive Zahl sein soll, nicht überschreitet. Je nachdem die Kurve geschlossen ist oder nicht, entsteht ein Ring oder ein durch zwei auf dieselbe

Digitized by Google

senkrechte Kreisflächen und eine Mantelfläche begrenzter Schlauch. „Der Inhalt der Oberfläche des Ringes und der der Mantelfläche des Schlauches ist das Produkt aus $2r\pi$ in die Länge λ der Leitkurve, der Inhalt beider Körper das Produkt aus $r^2\pi$ in diese Länge."

Dieser Satz läßt sich leicht mit Hilfe der Guldinschen Regel beweisen. Betrachtet man nämlich zwei unendlich benachbarte Normalebenen n_1 und n_2 der Leitkurve, so kann man sich das zwischen diesen beiden Ebenen befindliche Oberflächenelement durch Drehung z. B. des in n_1 gelegenen Kreises um die Krümmungsachse bis zum Zusammenfallen mit der Ebene n_2 entstanden denken, wobei man nur einen Fehler höherer Ordnung begeht. Mithin ist, wenn man den Abstand des Punktes M von der Drehungsachse mit w, den Winkel der beiden Normalebenen mit $d\varphi$ bezeichnet, der Inhalt dO des Oberflächenelements: $dO = 2\pi r \cdot w\,d\varphi$. Nun kann man bis auf unendlich kleine Größen höherer Ordnung den Weg des Schwerpunktes $w\,d\varphi$ gleich dem Bogenelement $d\lambda$ der Leitkurve setzen. Für die gesamte Oberfläche erhält man dann in der Tat den obigen Ausdruck.[1])

Auf ganz analoge Weise findet man für das Volumen des Körpers $\pi r^2 \cdot \lambda$.

Die Bestimmung des Inhaltes der Oberfläche ergibt sich übrigens auch leicht durch Anwendung der Gleichungen der Fläche (vergl. V. Kommerell: Gleichung und Eigenschaften der Röhrenflächen, dieses Archiv, **3**, 7).

Berlin. cand. math. Werner Gaedecke.

Zu **182** (Bd. XII, S. 186) (H. Wieleitner). — Welche Kurve wird durch die beiden Gleichungen $x = 4r\cos^2\omega\cos 2\omega$. $y = 4r\sin^2\omega\sin 2\omega$ dargestellt, und welches ist die geometrische Bedeutung des Parameters ω?

1. Lösung: Die gegebenen Ausdrücke für x und y lassen sich leicht auf die Form bringen

$$x - r = 2r\cos 2\omega + r\cos 4\omega, \quad y = 2r\sin 2\omega - r\sin 4\omega.$$

Vergleicht man diese mit den Gleichungen der gewöhnlichen Hypozykloide

$$x = (R-r)\cos\varphi + r\cos\frac{R-r}{r}\varphi, \quad y = (R-r)\sin\varphi - r\sin\frac{R-r}{r}\varphi,$$

1) Diese Schlußweise ist natürlich schon immer gebraucht worden, z. B. Resal, Traité de mécanique générale, Tome I, p. 227 (1873): „Extension des théorèmes précédents aux surfaces-canal et aux volumes correspondants. — On sait que ces surfaces sont engendrées par un périmètre plan qui se meut normalement à une courbe directrice que l'un de ses points est assujetti à parcourir, de manière qu'un même rayon du profil coïncide constamment avec la binormale de la directrice. Il est clair que les théorèmes ci-dessus s'appliquent à deux positions consécutives du profil générateur que l'on peut considérer comme tournant autour de la perpendiculaire au plan osculateur de la directrice menée en son centre de courbure. On déduit de là que la surface et le volume, correspondant à un certain déplacement, seront respectivement égaux aux produits du périmètre et de l'aire du profil par le chemin parcouru par leurs centres de gravité." Man vergleiche auch Wernicke, Lehrbuch der Mechanik, **1**, 416 (1900). Die eigentümlichen Kautelen, mit denen die Aufgabe ausgesprochen ist, besonders auch die zugehörige Note, weisen darauf hin, daß Stolz, dem die Ausdehnung der Guldinschen Sätze sehr wohl bekannt war, gerade auf eine Verschärfung der Bedingungen der Verallgemeinerung hinweisen wollte.

Berlin. E. Lampe.

Digitized by Google

worin R der Radius des Grundkreises, r der Radius des erzeugenden Kreises und φ der Winkel ist, den die Zentrale beider Kreise mit der Abszissenachse bildet, so braucht man nur $R = 3r$ und $\varphi = 2\omega$ zu setzen, um zu sehen, daß die vorgelegten Gleichungen eine dreispitzige Hypozykloide darstellen, deren Grundkreis den Radius $3r$ und die Mittelpunktskoordinaten r, 0 hat.

Aussig (Böhmen). stud. math. J. Krug.

Außerdem beweist Herr J. Krug noch den Satz:

Durchläuft ein Punkt den Umfang des einem gleichseitigen Dreieck eingeschriebenen Kreises, so beschreibt der inbezug auf dieses Dreieck zugehörige Winkelgegenpunkt eine dreispitzige Hypozykloide, deren Grundkreis der Umkreis und deren Spitzen die Ecken dieses Dreieckes sind, und fügt bei: „Hieraus folgt eine einfache punktweise Konstruktion unserer Hypozykloide, wobei man auch noch berücksichtigen kann, daß beim gleichseitigen Dreieck die Winkelgegenpunkte zugleich auch Seitengegenpunkte sind."

Dieser Satz ist ein spezieller Fall davon, daß jede Quartik mit drei Spitzen durch quadratische Transformation aus einem dem Grunddreieck einbeschriebenen Kegelschnitt entsteht, während die Verwandtschaft der Winkelgegenpunkte mit der quadratischen Verwandtschaft identisch ist. S. z. B. des Aufgabenstellers *Algebr. Kurven*, Leipzig 1905, S. 143.

Ähnliche Lösungen sandten noch Herr C. Hoffmann (Schorndorf), Herr W. Stegemann (Prenzlau), sowie Herr stud. math. A. Baruch (Berlin) ein. Der letztere bemerkt noch, daß der Winkel ω der Neigungswinkel der Kurventangente gegen die negative x-Achse (Spitzentangente) ist. Red.

2. Lösung: Aus den Gleichungen

$$x = 4r\cos^2\omega\cos 2\omega; \qquad y = 4r\sin^2\omega\sin 2\omega$$

ergibt sich

$$dx = (-8\cos^3\omega\sin\omega + 2\cos\omega\sin\omega)\cdot 4r\,d\omega,$$
$$dy = (10\cos^2\omega - 8\cos^4\omega - 2)\cdot 4r\,d\omega,$$

also

$$ds^2 = 16r^2(-64\cos^6\omega + 96\cos^4\omega - 36\cos^2\omega + 4)\,d\omega^2,$$

abgekürzt

$$(1) \qquad ds = 4r\sqrt{A}\,d\omega.$$

Ferner

$$d^2x = (28\cos^2\omega - 32\cos^4\omega - 2)\cdot 4r\,d\omega^2,$$
$$d^2y = (32\cos^3\omega\sin\omega - 20\cos\omega\sin\omega)\cdot 4r\,d\omega^2,$$

also

$$d^2y\,dx - d^2x\,dy = 16r^2(64\cos^6\omega - 96\cos^4\omega + 36\cos^2\omega - 4)\,d\omega^3$$
$$= -16r^2A\,d\omega^3.$$

Demnach ist

$$(2) \qquad \varrho = \frac{ds^3}{d^2y\,dx - d^2x\,dy} = -4r\cdot\sqrt{A}.$$

Nun stellt man aber unschwer, wenn auch nicht ohne Mühe fest, daß

$$\frac{1}{3}\frac{d}{d\omega}\sqrt{A-1} = i\sqrt{A}.$$

Digitized by Google

Daher ist $i\int\sqrt{A}\,d\omega = \frac{1}{3}\sqrt{A-4}$; also wegen (1) $\frac{is}{4r} = \frac{1}{3}\sqrt{A-4}$ und wegen (2) schließlich

$$9s^2 + \varrho^2 = (8r)^2. \tag{3}$$

Das ist aber in natürlichen Koordinaten die Gleichung einer dreispitzigen (Steinerschen) Hypozykloide (s. Cesàro, *Nat. Geom.* S. 10), deren fester Kreis den Radius $3r$ hat.

Da nach (1) und (2) $\varrho\,d\omega = -ds$, so ist ω der Tangentenwinkel, d. h. der Winkel der beweglichen Tangente mit einer festen. Diese feste Tangente ist eine der Spitzentangenten, weil für $\omega = 0$ $A = 0$, also $s = 0$ und $\varrho = 0$ wird.

Speyer. H. Wieleitner.

3. Lösung: Es ist

$$dx = -4r\sin 2\omega(4\cos^2\omega - 1)d\omega,$$
$$dy = 8r\sin^2\omega(4\cos^2\omega - 1)d\omega,$$

also hat man $dy/dx = -\operatorname{tang}\omega$.

Demnach ist ω der Winkel, um den man die x-Achse im Uhrzeigersinne drehen muß, damit sie mit der Tangente der gesuchten Kurve zusammenfällt. Die Gleichung der Tangente ist

$$y - 4r\sin^2\omega\sin 2\omega = -\operatorname{tang}\omega\,(x - 4r\cos^2\omega\cos 2\omega),$$

oder

$$x\operatorname{tang}\omega + y - 2r\sin 2\omega = 0. \tag{1}$$

Vergleicht man (1) mit

$$ux + vy - 1 = 0, \tag{2}$$

so ergibt sich

$$u = \frac{1}{4r\cos^2\omega}, \qquad v = \frac{1}{2r\sin 2\omega}. \tag{3}$$

Die Elimination von ω aus diesen Gleichungen liefert die Gleichung der gesuchten Kurve in Linienkoordinaten (u, v):

$$u^2 + v^2 - 4ruv^2 = 0. \tag{4}$$

Setzt man $u = \lambda v$, so erhält man

$$u = \frac{1+\lambda^2}{4r}, \qquad v = \frac{1+\lambda^2}{4r\lambda}. \tag{5}$$

Die gesuchte Kurve ist von der 3. Klasse, hat das Geschlecht $p = 0$ und besitzt die Doppeltangente $z = 0$ (unendlich ferne Gerade) mit den unendlich fernen imaginären Kreispunkten $z = 0$, $x \pm iy = 0$ als Berührungspunkten. In den Plückerschen Formeln (vgl. H. Wieleitner, Theorie der ebenen algebraischen Kurven höherer Ordnung, Leipzig 1905, G. J. Göschen, Seite 67) hat man zu setzen: $\nu = 3$, $\varrho = 0$, $\delta = 1$, $p = 0$; dann findet man: $n = 4$, $d = 0$, $r = 3$. Also ist die gesuchte Kurve eine rationale Quartik mit drei Spitzen.

Digitized by Google

Aus der Vergleichung von (5) mit (3) ergibt sich:

$$(6)\qquad \begin{cases} \cos^2\omega = \dfrac{1}{1+\lambda^2}, & \cos 2\omega = \dfrac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}, \\ \sin^2\omega = \dfrac{\lambda^2}{1+\lambda^2}, & \sin 2\omega = \dfrac{2\lambda}{1+\lambda^2}. \end{cases}$$

Setzt man diese Ausdrücke in die von Herrn Wieleitner gegebenen Formeln ein, so erhält man für die Koordinaten der Punkte der gesuchten Kurve folgende rationale Parameterdarstellung

$$(7)\qquad x = 4r\frac{1-\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2}, \qquad y = 4r\frac{2\lambda^3}{(1+\lambda^2)^2}.$$

Benützt man die Formeln (6), so ergibt sich als Gleichung der Tangente der gesuchten Kurve

$$(8)\qquad \lambda x(1+\lambda^2) + y(1+\lambda^2) - 4r\lambda = 0.$$

Um die Enveloppe dieser Geraden zu finden, hat man die Diskriminante der linken Seite von (8) gleich Null zu setzen. Nun ist die Diskriminante von $b_0 + b_1\lambda + b_2\lambda^2 + b_3\lambda^3$ gegeben durch

$$(9)\qquad \Delta = (b_1b_2 - 9b_0b_3)^2 - 4(b_1^2 - 3b_0b_2)(b_2^2 - 3b_1b_3),$$

wobei

$$(10)\qquad b_0 = b_2 = y, \quad b_1 = x - 4r, \quad b_3 = x.$$

Die Gleichung der gesuchten Kurve in rechtwinkeligen Koordinaten ist demnach

$$(11)\qquad 4y^2(r+2x)^2 - [(x-4r)^2 - 3y^2]\cdot[y^2 - 3x(x-4r)] = 0.$$

Die drei Spitzen haben die Koordinaten

$$x = 4r, \quad y = 0; \quad x = -\frac{r}{2}, \quad y = \pm\frac{3r}{2}\sqrt{3}.$$

Die Kurve wird von der y-Achse im Anfangspunkte berührt und in den Punkten $x = 0$, $y = \pm 2r$ geschnitten; sie liegt zur x-Achse symmetrisch. Um die Kurve auf das von den drei Spitzen gebildete gleichseitige Dreieck als Fundamentaldreieck zu beziehen, hat man die Formeln zu benützen:

$$(12)\qquad \varrho x = -r(x_1 + x_2 - 8x_3), \ \varrho y = 3r\sqrt{3}(x_1 - x_2), \ \varrho z = 2(x_1 + x_2 + x_3);$$

dann geht die Gleichung der Kurve über in

$$(13)\qquad x_3^2(x_1 - x_2)^2 - 2x_1x_2x_3(x_1 + x_2) + x_1^2x_2^2 = 0$$

oder

$$x_1^{-\frac{1}{2}} + x_2^{-\frac{1}{2}} + x_3^{-\frac{1}{2}} = 0.$$

Die Spitzentangenten sind

$$(14)\qquad \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 & \text{oder} \quad y = 0, \\ x_2 - x_3 = 0 & \text{oder} \quad x\sqrt{3} + y - r\sqrt{3} = 0, \\ x_3 - x_1 = 0 & \text{oder} \quad x\sqrt{3} - y - r\sqrt{3} = 0; \end{cases}$$

sie schneiden sich bekanntlich in einem Punkte, nämlich

$$x_1 : x_2 : x_3 = 1 : 1 : 1 \quad \text{oder} \quad x = r, \quad y = 0.$$

Digitized by Google

Aus den bisherigen Betrachtungen folgt, daß die gesuchte Kurve die *dreispitzige (Steinersche) Hypozykloide* ist. Die Koordinaten der Punkte dieser Kurve lassen sich darstellen in der Form:

$$\bar{x} = 2r\cos\theta + r\cos 2\theta, \quad \bar{y} = 2r\sin\theta - r\sin 2\theta. \tag{15}$$

Verschiebt man den Nullpunkt um die Strecke r nach links, indem man setzt

$$\bar{x} = x - r, \quad \bar{y} = y, \tag{16}$$

so erhält man

$$x = 2r\cos\theta + r\cos 2\theta + r, \quad y = 2r\sin\theta - r\sin 2\theta. \tag{17}$$

Schreibt man 2ω statt θ, so bekommt man die von Herrn Wieleitner gegebene Darstellung.

Bayreuth. O. Degel.

Zu **187** (Bd. XII, S. 276) (G. Kober). — Wenn man von einem Punkte eines Kegelschnittes die vier Schnittpunkte eines zweiten Kegelschnittes auf diesen projiziert, so erhält man die Schnittpunkte eines dritten Kegelschnittes, der den ersten Kegelschnitt im Projektionszentrum berührt und in den Schnittpunkten der anderen Polare dieses Punktes schneidet.

1. Lösung: Die beiden Kegelschnitte mögen, bezogen auf ein System von Parallelkoordinaten x, y, dessen Ursprung das Projektionszentrum O ist, die Gleichungen haben:

$$F \equiv ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dy \equiv K(x,y) + 2dy = 0$$

und

$$\mathfrak{F} \equiv \mathfrak{a}x^2 + 2\mathfrak{b}xy + \mathfrak{c}y^2 + 2\mathfrak{d}x + 2\mathfrak{e}y + \mathfrak{f} \equiv \mathfrak{K}(x,y) + 2\mathfrak{d}x + 2\mathfrak{e}y + \mathfrak{f} = 0.$$

Sind x, y die Koordinaten eines Schnittpunktes P von F und $\mathfrak{F}$, so ist die Gleichung der Geraden OP

$$\eta = \frac{y}{x}\xi,$$

mit η, ξ als laufenden Koordinaten. Die Elimination von x und y aus den drei Gleichungen führt zur Gleichung der 4 Geraden, die O mit den 4 Schnittpunkten von F und $\mathfrak{F}$ verbinden:

$$S \equiv 4d^2\eta^2 \cdot \mathfrak{K}(\xi,\eta) - 4d\eta(\mathfrak{b}\xi + \mathfrak{e}\eta)K(\xi,\eta) + \mathfrak{f}\cdot K^2(\xi,\eta) = 0.$$

Die Gleichung einer durch die 8 Schnittpunkte von S mit $\mathfrak{F}$ gehenden Kurve ist daher

$$\begin{aligned} S + \lambda\mathfrak{F} \equiv\ & \mathfrak{K}(\xi,\eta)[4d^2\eta^2 + \lambda] \\ & + 2(\mathfrak{b}\xi + \mathfrak{e}\eta)[-2d\eta K(\xi,\eta) + \lambda] + \mathfrak{f}[K^2(\xi,\eta) + \lambda] = 0. \end{aligned}$$

Diese Kurvengleichung zerfällt für $\lambda = -4d^2\eta^2$ in die Gleichungen

$$K(\xi,\eta) + 2d\eta = 0 \equiv F(\xi,\eta)$$

und

$$\mathfrak{f}\cdot K(\xi,\eta) - 4d\eta(\mathfrak{b}\xi + \mathfrak{e}\eta) - 2\mathfrak{f}d\eta = 0 \equiv F_1.$$

Digitized by Google

Wie man sieht, berührt F_1 die Kurve F in O; die andern Schnittpunkte von F_1 mit F liegen [für $K(\xi, \eta) = -2d\eta$] auf der Geraden

$$\mathfrak{b}\xi + \mathfrak{e}\eta + \mathfrak{f} = 0,$$

also der Polare von O bezüglich $\mathfrak{F}$. Da $\mathfrak{K}$ in F_1 nicht mehr auftritt, erhält man, bei festem O und F, dieselbe Kurve F_1 für alle $\mathfrak{F}$, bezüglich deren O dieselbe Polare hat. Außerdem ist klar, daß die Beziehung zwischen F und F_1 reziprok ist.

Schw.-Gmünd. E. KÖSTLIN.

2. Lösung. Der Kegelschnitt

$$K_1 \equiv x_1 x_3 - x_2^2 = 0,$$

welcher das Strahlenpaar $x_1 x_3 = 0$ in den Schnittpunkten des Doppelstrahles $x_2^2 = 0$ berührt und den Einheitspunkt $x_1 = x_2 = x_3$ enthält, schneidet den allgemeinen Kegelschnitt

$$K_2 \equiv \frac{1}{2}\frac{\partial K_2}{\partial x_1} x_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial K_2}{\partial x_2} x_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial K_2}{\partial x_3} x_3 = 0,$$

welcher die drei Strahlen

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\partial K_2}{\partial x_1} &\equiv a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ \frac{1}{2}\frac{\partial K_2}{\partial x_2} \quad & a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ \frac{1}{2}\frac{\partial K_2}{\partial x_3} \quad & a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{aligned}$$

zu Polaren der drei Grundecken hat, auf den vier Strahlen

$$K_2 x_1^2 - 2(a_{13}x_1^2 + a_{33}x_1 x_2 + a_{33}x_2^2)K_1 - a_{33}K_1^2 = 0$$

der Grundecke $x_1 = x_2 = 0$. Die vier Punkte, in denen sie den zweiten Kegelschnitt $K_2 = 0$ zum zweiten Male schneiden, sind, weil ihre Gleichung auf die Form

$$K_2 x_1^2 - \left(\frac{\partial K_2}{\partial x_3} x_1 - a_{33}K_1\right) K_1 = 0$$

gebracht werden kann, die vier Schnittpunkte eines dritten Kegelschnittes

$$K_3 \equiv \frac{\partial K_2}{\partial x_3} x_1 - a_{33}K_1 = 0,$$

der mit $K_1 = 0$ die Tangente $x_1 = 0$ und die Schnittpunkte der anderen Polare $\frac{\partial K_2}{\partial x_3} = 0$ des Berührungspunktes $x_1 = x_2 = 0$ gemein hat.

Holzminden. G. KOBER.

2. Anfragen und Antworten.

(Vacat.)

Digitized by Google

3. Kleinere Notizen.

Richtigstellung einiger Bemerkungen des Herrn v. Stahl.

Am Schlusse einer in **12**, 209—219, dieser Zeitschrift erschienenen Arbeit „Über die Darstellung algebraischer Funktionen und Abelscher Integrale aus gegebenen Elementen" hat Herr v. Stahl in bezug auf meine Habilitationsschrift „Theorie der Riemannschen Thetafunktion" — nicht Thetafunktionen, wie Herr v. Stahl schreibt — (Leipzig, Teubner 1901) einige Bemerkungen gemacht, die einer Richtigstellung bedürfen.

Zunächst befindet Herr v. Stahl sich im Irrtum, wenn er als Hauptzweck der genannten Schrift die Untersuchung von Punktsystemen mit speziellem Charakter ansieht; sie bezweckte vielmehr, wie ich in der Vorrede ausdrücklich bemerkt habe, die Ausfüllung der in der Theorie der Riemannschen Thetafunktion noch vorhandenen Lücken durch Beachtung der Möglichkeit des Auftretens von Punktsystemen mit speziellem Charakter.

Wenn dann Herr v. Stahl weiter sagt, daß diese speziellen Punktsysteme sich einfach aus dem Umstand erklären, daß im Riemann-Rochschen Satze bei einer algebraischen Funktion $R(x, y)$ der m^{ten} Ordnung die Eindeutigkeit in der Bestimmung der p (oder $p - q$) letzten 0^1-Punkte aus den übrigen 0^1-Punkten und den m ∞^1-Punkten aufhören kann, wenn man die $m - p$ (oder $m - p + q$) ersten 0^1-Punkte nicht allgemein wählt, und daß er diese Bemerkungen mir schon im Jahre 1901 mitgeteilt habe, so kann dadurch bei dem Leser die Vorstellung erweckt werden, als ob ich mich den mir zugedachten Belehrungen des Herrn v. Stahl gegenüber ablehnend verhalten hätte. Die Sache liegt aber anders. Am 3. August 1901 schrieb mir Herr v. Stahl auf einer Postkarte: „Was die Einleitung S. III und die Anm. 6 und 11 erwähnten Ausnahmen betrifft, so beschränken sich dieselben, wie die algebraischen Untersuchungen lehren, auf den hyperelliptischen Fall, der ja auch sonst von durchaus speziellem Charakter ist." Darauf entgegnete ich ihm unter dem 6. November 1901: „Ich bin der Überzeugung, daß die von mir betrachteten Punktsysteme von speziellem Charakter auch bei allgemeiner Fläche T (oder in Ihrer Ausdrucksweise bei allgemeiner Beschaffenheit von $F(x, y) = 0$) auftreten", und gab dafür ein Beispiel. In seiner Antwort vom 11. November 1901 schrieb dann Herr v. Stahl: „In der Vorrede A. F. S. VI sage ich ausdrücklich, daß auf spezielle Fälle nicht eingegangen sei, andernfalls hätte ich das Wort „im allgemeinen" noch an manch anderer Stelle zufügen müssen. Mit Rücksicht auf diese Verweisung glaube ich, sind meine Sätze durchaus richtig, und es wäre mir lieb, wenn Sie dies in einer späteren Arbeit erwähnen wollten..... Ich sehe zum Schluß, daß die Bemerkung auf meiner Karte nicht ganz zutreffend war; es sollte heißen: Die Ausnahmen (nämlich von der eindeutigen Bestimmtheit in den Sätzen [A. F. § 12 I u. II]) beziehen sich auf Gl. $F(x, y) = 0$, deren Moduln in gewisser Weise von einander abhängig sind, u. a. auf den hyperelliptischen Fall. Ich hatte am Schluß des Semesters (3. August) die Sache nicht ganz gegenwärtig." Auf diesen Brief erwiderte ich am 19. November 1901 u. a.: „Auch war mir, als ich in den Anm. 6 und 11 meiner Arbeit die Einwände gegen Ihre Sätze I, II (A. F. § 12) sowie gegen Ihre Untersuchungen § 28 der A. F. erhob, die Stelle in der Vorrede A. F. S. VI „Auf spezielle Fälle ist nicht eingegangen" sehr wohl bekannt. Diese Stelle kann doch nur so aufgefaßt werden,

Digitized by Google

daß sich die Untersuchungen Ihres Buches durchweg auf allgemeine Gleichungen $F=0$ beziehen, d. h. auf solche, zwischen deren $3p-3$ Klassenmoduln keine Relationen bestehen. Trotz dieser Ihrer Beschränkung auf den allgemeinen Fall muß ich meine Einwände in vollem Umfang aufrecht erhalten. Wie aus dem in Ihrem Briefe S. 3 sub. 2 Gesagten sowie aus dem Schlußpassus S. 6 hervorgeht, sind Sie der Ansicht, daß bez. des Wortes eindeutig in den Sätzen I und II (A. F. § 12) Ausnahmen nur für spezielle Gleichungen $F=0$ stattfinden können. Im Gegensatz hierzu bin ich der Überzeugung, daß auch bei allgemeiner Gleichung $F=0$ Ausnahmen stattfinden können oder, was dasselbe, das Wort eindeutig durch die Beifügung „im allgemeinen" zu modifizieren ist", und gab alsdann zwei Beispiele zum Beweise meiner Behauptung. Darauf schrieb mir Herr v. Stahl unter dem 23. November 1901: „Sie haben sich mit der Beantwortung meines Briefes viel Mühe gemacht, für die ich Ihnen danke. Sie haben auch streng genommen recht. Ich glaube aber, ich kann den Streitpunkt, um den es sich handelt, sehr einfach bezeichnen und sofort erledigen. Will man ganz exakt sein, so hätte man dem Satz I (resp. den Ausführungen desselben S. 87 u. 88 § 12. A. F.) eine Fußnote zuzufügen . . ." Dies sind im wesentlichen die Mitteilungen, die Herr v. Stahl mir im Jahre 1901 gemacht hat. Da er mir schließlich recht gegeben hatte, lag für mich kein Grund vor, die Korrespondenz mit ihm fortzusetzen.

Der von mir beanstandete Satz ist nun in der oben genannten neuesten Arbeit des Herrn v. Stahl unter Hinzufügung einer Fußnote reproduziert (S. 211, Absatz 1). Was aber ist der Inhalt dieser Fußnote? Man erfährt da zunächst, daß der Satz des Textes nur bei allgemeiner Lage der $m-p$ willkürlich gewählten 0^1-Punkte richtig ist, und damit ist die von mir als notwendig bezeichnete Modifikation angebracht — wenn auch nicht im Satze selbst. Herr v. Stahl will mich aber noch überbieten, indem er angibt, was man dabei unter nicht allgemeiner Lage der $m-p$ willkürlich wählbaren Punkte zu verstehen hat. Er verkündet dem Leser, daß nach Wahl von $m-p$ 0^1-Punkten einer Funktion $R(x,y)$ die Eindeutigkeit in der Bestimmung der p letzten 0^1-Punkte oder, was dasselbe, die Eindeutigkeit in der Bestimmung der Funktion $R(x,y)$ aufhört, wenn durch die $m-p$ gewählten 0^1-Punkte mehr als eine Funktion $R(x,y)$ bestimmt wird. Das heißt aber nichts anderes als — daß die Eindeutigkeit aufhört, wenn die Eindeutigkeit aufhört.

Auch nach den Belehrungen seitens des Herrn v. Stahl halte ich die Einwände, welche ich in meiner Habilitationsschrift gegen die von den Herren v. Dalwigk, v. Stahl und Christoffel gegebenen Darstellungen der Theorie der Riemann'schen Thetafunktion erhoben habe, in ihrem ganzen Umfange aufrecht.

Es ist jetzt noch die letzte Bemerkung des Herrn v. Stahl zu beleuchten. Sie lautet wörtlich: „Was Herr Rost bez. des Riemann-Rochschen Satzes und der zugehörenden Sätze über das Verschwinden der Thetafunktion gibt, sind „übrigens leicht ersichtliche Änderungen, welche die Gleichungen dieser Sätze im Falle mehrfacher Null- und Unendlichkeitspunkte einer Funktion $f(x,y)$ (Quotient zweier Integranden erster Gattung) zu erfahren haben", wie Herr Krazer in seinem Lehrbuch S. 416 Anmerkung richtig bemerkt." Zur Beurteilung dieser Stelle muß man auf die eben genannte Anmerkung des Herrn Krazer in seinem „Lehrbuch der Thetafunktionen" (Leipzig, Teubner 1903) zurückgehen; sie schließt sich an § 1 des neunten Kapitels, der Vorbemerkungen

Digitized by Google

aus der Theorie der Abelschen Funktionen enthält und in dem von Thetafunktionen noch gar keine Rede ist, an und lautet wörtlich: „Zum Inhalte dieses Paragraphen vergl. Christoffel, Über die kanonische Form der Riemannschen Integrale erster Gattung (Ann. di Mat. (2) Bd. 9. 1879, pag. 240) und Rost, Theorie der Riemannschen Thetafunktion (Hab.-Schrift Würzburg 1901. I. Abschnitt); aus letzterer Abhandlung mögen insbesondere jene, übrigens leicht ersichtlichen Änderungen entnommen werden, welche die obigen Gleichungen im Falle mehrfacher Null- und Unendlichkeitspunkte der Funktion $f(s|z)$ zu erfahren haben." Man erkennt hieraus, daß die von Herrn v. Stahl in Anführungszeichen gesetzten Worte gar nicht die Worte des Herrn Krazer sind, daß Herr v. Stahl vielmehr statt des Krazerschen Ausdrucks „die obigen Gleichungen" den Ausdruck „die Gleichungen dieser Sätze" gesetzt und so den Sinn der Krazerschen Äußerung durch Beziehung derselben auf die von mir formulierten Sätze über das Nichtverschwinden der Thetafunktion vollständig entstellt hat. Ich überlasse es dem Leser, sich ein Urteil über dieses eigentümliche Verfahren des Herrn v. Stahl zu bilden.

Herr Krazer hat mir übrigens nochmals ausdrücklich bestätigt, daß seine Worte sich ausschließlich auf den ersten Teil meiner Arbeit beziehen, daß er dagegen die von mir formulierten Sätze über das identische Verschwinden der Thetafunktion und deren Beweise durchaus nicht als „leicht ersichtliche Änderungen" habe bezeichnen wollen und sie auch heute nicht als solche ansehe, und daß er dies auch Herrn v. Stahl nach Erscheinen der obigen Note brieflich mitgeteilt habe.

Würzburg, im Februar 1908. Georg Rost.

Sur les polynomes ayant pour expression

$$x^n - \frac{n}{1}\cdot\frac{x^{n-1}}{2} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{x^{n-2}}{3\cdot 4} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{x^{n-3}}{4\cdot 5\cdot 6} + \cdots,$$

et sur d'autres polynomes plus généraux auxquels ils se rattachent.

M. Ed. Maillet, dans l'étude des Nappes souterraines[1]), a été amené à considérer les polynomes ayant pour expression

$$x^n - \frac{n}{1}\frac{x^{n-1}}{2} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{x^{n-2}}{3\cdot 4} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{x^{n-3}}{4\cdot 5\cdot 6} + \text{etc.}$$

Ces polynomes, qui ont fait l'objet de la question No. 2840 (1904, p. 260) de l'Intermédiaire des Mathématiciens et à l'égard desquels on remarque immédiatement que la dérivée de chacun d'eux coïncide avec le produit par n du polynome de degré immédiatement inférieur, peuvent être définis de la façon suivante.

Soit

$$f(z) = 1 + \frac{z^{-2}}{2} + \frac{z^{-4}}{3\cdot 4} + \frac{z^{-6}}{4\cdot 5\cdot 6} + \frac{z^{-8}}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} + \cdots,$$

c'est-à-dire

$$f(z) = \sum_0^\infty \frac{k!}{(2k)!}\, z^{-2k};$$

1) Maillet, Essais d'hydraulique souterraine et fluviale, Paris, Hermann, 1905, p. 102.

Digitized by Google

cette série est convergente pour toute valeur de z qui n'est pas rigoureusement nulle. Il est facile du reste de représenter $f(z)$ par une intégrale définie au moyen de l'égalité

$$k! = 2\int_0^\infty e^{-t^2} t^{2k+1}\, dt,$$

qui donne

$$f(z) = \int_0^\infty \left(e^{-t+\frac{t}{z}} + e^{-t-\frac{t}{z}}\right) t\, dt.$$

Considérant maintenant le produit $(z^2-x)^n f(z)$, je trouve que le coëfficient du terme en z^{2n-2k} est

$$F(n,k,x) = \frac{k!}{(2k)!} - \frac{(k-1)!}{(2k-2)!}\frac{n}{1}x + \frac{(k-2)!}{(2k-4)!}\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2 - \cdots,$$

le dernier terme étant

$$(-1)^k \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}x^k,$$

si k est plus petit que n, et $(-1)^n \frac{(k-n)!}{(2k-2n)!}x^n$, si le contraire a lieu. $F(n,k,x)$ est donc un polynome entier en x d'un degré marqué par le plus petit des deux nombres k, n, et si ces nombres sont égaux c'est, au signe près, le polynome qui a été indiqué par M. Maillet.

L'observation faite à l'instant prend un caractère encore plus tangible si l'on forme un tableau dont les lignes soient numérotées 1, 2, 3, ... n, et les colonnes 1, 2, 3, ... k, et qu'on inscrive le degré de $F(n,k,x)$ dans la colonne k sur la ligne n. Ce tableau est

n \ k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	**1**	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	**2**	2	2	2	2	2	2	2	2
3	1	2	**3**	3	3	3	3	3	3	3
4	1	2	3	**4**	4	4	4	4	4	4
5	1	2	3	4	**5**	5	5	5	5	5
6	1	2	3	4	5	**6**	6	6	6	6
7	1	2	3	4	5	6	**7**	7	7	7
8	1	2	3	4	5	6	7	**8**	8	8

et les polynomes de M. Maillet correspondent aux termes de la diagonale principale marqués en caractères gras dans le tableau; mais pour toutes les diagonales, c'est-à-dire pour toutes les suites de polynomes $F(n+h,\ k+h,\ x)$, les degrés vont en croissant d'une unité en même temps que le nombre h.

Puisque $F(1,k,x)$ et $F(n,1,x)$ sont des fonctions linéaires de x, chacune de ces fonctions s'annule une seule fois lorsque x varie de zéro à l'infini, et comme l'on a

$$F(1,k,x) = \frac{(k-1)!}{(2k-2)!}\left(\frac{1}{2(2k-1)} - x\right), \qquad F(n,1,x) = \frac{1}{2} - nx,$$

Digitized by Google

la racine est $\frac{1}{2(2k-1)}$ pour $F(1,k,x)$ et $\frac{1}{2n}$ pour $F(n,1,x)$: on a donc des valeurs de plus en plus petites lorsque k, ou n, grandit indéfiniment.

Pareillement il vient pour $n=2$,

$$F(2,k,x)=\frac{(k-2)!}{(2k-4)!}\left[\frac{1}{4(2k-1)(2k-3)}-\frac{1}{2k-3}x+x^2\right],$$

et les valeurs des racines sont

$$x=\frac{1}{2(2k-3)}\left[1\pm\sqrt{\frac{2}{2k-1}}\right],$$

tandis qu'en faisant $k=2$, on trouve

$$F(n,2,x)=\frac{1}{3\cdot 4}-\frac{1}{2}nx-\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2,$$

et pour les racines

$$x=\frac{1}{2(n-1)}\left[1\pm\sqrt{\frac{n+2}{3n}}\right].$$

Si donc k, ou n, grandit indéfiniment les racines tendent vers zéro; il y a toutefois cette dissemblance que dans le premier cas les racines de $F\left(2,k,\frac{x}{k}\right)$ ne tendent plus vers zéro, mais tendent encore à devenir égales, tandis que celles de $F\left(n,2,\frac{x}{n}\right)$ ne tendent plus vers zéro et conservent entre elles une différence admettant une limite inférieure différente de zéro.

On observera que la racine de $F(n,1,x)$ est toujours comprise entre les racines de $F(n,2,x)$. En effet, d'une part, l'inégalité

$$\frac{1}{2n}<\frac{1}{2(n-1)}\left[1+\sqrt{\frac{n+2}{3n}}\right]$$

est évidente; de l'autre, l'inégalité

$$\frac{1}{2n}>\frac{1}{2(n-1)}\left[1-\sqrt{\frac{n+2}{3n}}\right]$$

revient à celle-ci $n^2+2n>3$, qui est satisfaite pour toute valeur entière de n. De même la racine de $F(1,k,x)$ est comprise entre les racines de $F(2,k,x)$, car on a, sans condition,

$$\frac{1}{2(2k-1)}<\frac{1}{2(2k-3)}\left[1+\sqrt{\frac{2}{2k-1}}\right]$$

et

$$\frac{1}{2(2k-1)}>\frac{1}{2(2k-3)}\left[1-\sqrt{\frac{2}{2k-1}}\right],$$

pourvu que k soit au moins égal à 2. Je dis de plus que les racines de $F(2,k+1,x)$ sont respectivement inférieures aux racines de $F(2,k,x)$, c'est-à-dire que, x variant de zéro à l'infini, ces racines se présentent dans l'ordre suivant: plus petite racine de $F(2,k+1,x)$, plus petite racine de $F(2,k,x)$, plus grande racine de $F(2,k+1,x)$, plus grande racine de $F(2,k,x)$. On le vérifie directement pour les plus grandes racines, l'inégalité

$$\frac{1}{2(2k-1)}\left[1+\sqrt{\frac{2}{2k+1}}\right]<\frac{1}{2(2k-3)}\left[1+\sqrt{\frac{2}{2k-1}}\right]$$

Digitized by Google

étant évidente. En ce qui concerne les plus petites racines un calcul est nécessaire, mais on ramène aisément l'inégalité supposée

$$\frac{1}{2(2k-1)}\left[1-\sqrt{\frac{2}{2k+1}}\right] < \frac{1}{2(2k-3)}\left[1-\sqrt{\frac{2}{2k-1}}\right]$$

à la suivante

$$\sqrt{2(2k+1)} > \sqrt{4k^2-1}-2k+3:$$

or celle-ci devient, en developpant en série le radical du second membre,

$$\sqrt{2(2k+1)} > 3-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2k}-\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{8k^2}-\frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{32k^5}-\cdots,$$

et, tous les termes de la série, sauf le premier, étant négatifs il suffit que l'on ait $\sqrt{2(2k+1)} > 3$, c'est-à-dire $k \geqq 2$.

De l'égalité de définition

$$(z^2-x)^n f(z) = \sum F(n,k,x)\, z^{2n-2k},$$

on déduit, en prenant la dérivée par rapport à x,

$$-n\,(z^2-x)^{n-1} f(z) = \sum \frac{d}{dx} F(n,k,x)\, z^{2n-2k},$$

c'est-à-dire, en vertu de la même définition,

$$-n \sum F(n-1,k,x) z^{2n-2k-2} = \sum \frac{d}{dx} F(n,k,x) z^{2n-2k},$$

$$\frac{d}{dx} F(n,k,x) = -n\, F(n-1,k-1,x).$$

C'est pour tous les polynomes $F(n,k,x)$ la propriété remarquée dès l'abord pour ceux de M. Maillet, et l'on en pourrait conclure la réalité des racines de tous les polynomes $F(n,k,x)$; mais il est plus simple de procéder comme suit.

On a identiquement

$$\sum F(n,k,x) z^{2n-2k} = (z^2-x)^n f(z) = (z^2-x)\,[(z^2-x)^{n-1} f(z)]$$
$$= (z^2-x) \sum F(n-1,k,x)\, z^{2n-2k-2},$$

et par suite

$$F(n,k,x) = F(n-1,k,x) - x\, F(n-1,k-1,x).$$

Soit $n=3$: l'égalité qui vient d'être établie devient

$$F(3,k,x) = F(2,k,x) - x\, F(2,k-1,x).$$

Or pour $x=0$ les polynomes $F(3,k,x)$, $F(2,k,x)$, $F(2,k-1,x)$ sont positifs et ont respectivement pour valeur $\frac{k!}{(2k)!}$, $\frac{k!}{(2k)!}$ et $\frac{(k-1)!}{(2k-2)!}$. Si maintenant on fait croître x, il est clair, d'après ce qui a été vu, que l'on rencontre d'abord la valeur qui annule $F(2,k,x)$, et, puisque $F(2,k-1,x)$ a conservé le signe $+$, $F(3,k,x)$ est négatif: par suite ce polynome s'est annulé pour une valeur plus petite de x. La variable x continuant de croître devient ensuite égale à la plus petite racine de $F(2,k-1,x)$, inférieure à la plus grande de $F(2,k,x)$[1]) et la valeur correspondante de $F(3,k,x)$ continue d'être négative; puis x,

1) Ce point de détail a été laissé de côté dans la démonstration donnée précédemment, mais il est comme évident.

Digitized by Google

croissant toujours, passe par la plus grande valeur pour laquelle $F(2,k,x)$ est nul, et comme $F(2,k-1,x)$ est encore négatif, $F(3,k,x)$ a repris le signe $+$ et s'est par conséquent annulé dans l'intervalle. Le signe $+$ se maintient ensuite jusqu'à ce que l'on ait dépassé la plus grande racine de $F(2,k-1,x)$, mais il finit par changer pour une valeur suffisamment grande de x, puisque pour $x=\infty$ le polynome $F(3,k,x)$ est négatif. Les deux plus petites racines de $F(3,k,x)$, sont donc moindres que les racines de $F(2,k,x)$, et, comme ces racines diminuent à mesure que k grandit, il en est de même des deux plus petites racines de $F(3,k,x)$. Quant à la plus grande racine de $F(3,k,x)$, qui est supérieure à la plus grande racine de $F(2,k-1,x)$ elle diminue aussi à mesure que k grandit comme on s'en rend compte par la considération suivante.

L'égalité

$$F(n,k,x) = F(n-1,k,x) - xF(n-1,k-1,x)$$

devient en supposant $F(n,k,x)=0$,

$$x = \frac{F(n-1,k,x)}{F(n-1,k-1,x)},$$

et on peut regarder x comme l'abcisse d'un point d'intersection de la droite $x-y=0$ avec la courbe $y = \frac{F(n-1,k,x)}{F(n-1,k-1,x)}$. Or, s'il s'agit de celle des intersections qui est la plus éloignée de l'origine, on voit qu'elle se trouve sur une branche hyperbolique admettant comme asymptote la droite parallèle à l'axe OY, menée par l'abscisse correspondant à la plus grande racine de $F(n-1,k-1,x)$, et comme autre asymptote la droite $y = \frac{1}{2(2k-2n-1)}$. Si donc k croît d'une unité les deux asymptotes se rapprochent des axes auxquels elles sont parallèles et la branche de la nouvelle courbe est située à gauche et au-dessous de la branche primitivement considérée qu'elle ne coupe qu'à l'infini, de sorte que son intersection avec la droite $x-y=0$ est plus rapprochée de l'origine.

En résumé, si l'on désigne par α_k, β_k, γ_k, les racines de $F(3,k,x)$, les racines α_{k+1}, β_{k+1}, γ_{k+1} de $F(3,k+1,x)$ tomberont dans les intervalles $(0,\alpha_k)$, (α_k,β_k), (β_k,γ_k). Par conséquent le même raisonnement qu'on vient de faire montrera que des circonstances toutes pareilles se reproduiront à l'égard des polynomes $F(4,k,x)$, et ainsi de suite indéfiniment.

Les racines de tous les polynomes $F(n,k,x)$ sont donc toutes réelles et elles sont séparées par celles du polynome $F(n-1,k-1,x)$, qui n'est autre que la dérivée de $F(n,k,x)$ à un facteur constant près: la plus petite racine de $F(n,k,x)$ diminue par suite sans cesse, à mesure que n, ou k, grandit; quant à la plus grande racine elle croît continuellement, si n et k augmentent simultanément. Il est du reste manifeste par l'expression de $F(n,k,x)$ que le produit des racines tend vers zéro en même temps que k et n tendent vers l'infini. Ce produit en effet a pour expression

$$\frac{(2m)!}{m!}\cdot\frac{(2k)!}{k!} \qquad \text{ou} \qquad \frac{(k!)^2}{(2k)!}\cdot\frac{m!}{n!},$$

suivant que l'on suppose $k>n$ ou $n>k$, et lorsqu'on représente par m la différence $k-n$, ou $n-k$, qu'on admettra rester inférieure à un entier donné.

Digitized by Google

Au lieu de l'expression exacte on peut du reste considérer l'expression asymptotique

$$\frac{(2m)!}{m!}\cdot\frac{e^k}{2^{2k+\frac{1}{2}}k} \qquad \text{ou} \qquad \frac{m!}{2}\cdot\sqrt{\frac{k}{n\pi}}\cdot\frac{e^n}{2^{2k}n^n},$$

et en extrayant la racine $n^{\text{ième}}$, ou la racine $k^{\text{ième}}$, on obtient pour la valeur moyenne d'une racine le nombre $\frac{e}{4k}$, ou $\frac{e}{4n}$ puisque dans l'hypothèse faite le rapport des nombres croissants n et k tend vers l'unité. La plus petite racine est naturellement beaucoup plus petite que la valeur moyenne qu'on vient de trouver, puisque d'autre part certaines racines de $F(n,k,x)$ croissent au lieu de diminuer.

La somme des racines est $\frac{n}{2(2m+1)}$ lorsque le polynome $F(n,k,x)$ est de degré n, n étant moindre que k de l'entier m; elle est $\frac{k}{2(m+1)}$ si le degré est k, k étant moindre que n de l'entier m. La moyenne valeur arithmétique des racines est alors $\frac{1}{2(m+1)}$, tandis qu'elle est $\frac{1}{2(2m+1)}$ dans le premier cas: les deux expressions coïncident entre elles et avec la valeur $\frac{1}{2}$ lorsqu'on a $k=n$, $m=0$. D'après cela on peut affirmer que la plus grande racine est, dans le cas de $n>k$, supérieure à $\frac{m}{2(m+1)}$, et inférieure à $\frac{k}{2(m+1)}$; dans le cas contraire, supérieure à $\frac{1}{2(2m+1)}$ et inférieure à $\frac{n}{2(2m+1)}$.

La considération suivante fournit une évaluation plus approchée de la plus grande racine, au moins lorsque l'on a $k=n$, $m=0$, c'est-à-dire dans le cas des polynomes de M. Maillet. On peut écrire

$$(-1)^n F(n,n,x) = x^n\left[1-\frac{1}{1\cdot 2}\left(\frac{n}{x}\right)+\frac{1-\frac{1}{n}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\left(\frac{n}{x}\right)^2 - \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\left(\frac{x}{n}\right)^3+\cdots\right].$$

c'est-à-dire, en supposant n très-grand,

$$(-1)^n F(n,n,x) = x^n\left(\cos\sqrt{\frac{n}{x}}+\varepsilon_n\right),$$

ε_n tendant vers zéro en mêms temps que n vers l'infini. Donc, à peu de chose près, les plus grandes racines de $F(n,n,x)$ seront $\frac{4n}{\pi^2}$, $\frac{4n}{9\pi^2}$, $\frac{4n}{25\pi^2}$, etc.

Puisque $F(n,k,x)$ est le coëfficient du terme en z^{2n-2k} dans le développement du produit $(z^2-x)^n f(z)$, que $F(n+1,k+1,x)$ est celui du même terme dans le produit $(z^2-x)^{n+1}f(z)$, etc. il en résulte que la série $\sum\alpha^n F(n,k,x)$, où les nombres k et n varient simultanément par unités de manière que leur différence m soit constante, est de même le coëfficient du terme en z^{2n-2k} dans le développement de la fonction $\sum\alpha^n(z^2-x)^n f(z)$, c'est-à-dire de la fonction $\frac{f(z)}{1+\alpha x-\alpha z^2}$. Comme la condition de convergence implicitement supposée dans ce qui précède, $1>\alpha(z^2-x)$, s'écrit également $1+\alpha x>\alpha z^2$,

Digitized by Google

on peut aussi développer le multiplicateur de $f(z)$ suivant les puissances croissantes de z

$$\frac{1}{1+\alpha x-\alpha z^2}=\frac{1}{1+\alpha x}\sum\left(\frac{\alpha}{1+\alpha x}\right)^i z^{2i},$$

et formant le produit par $f(z)$ le coëficient de z^{2m} sera

$$\frac{m!}{(2m)!}\cdot\frac{1}{1+\alpha x}\left[1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2m+1}\left(\frac{\alpha}{1+\alpha x}\right)+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(2m+1)(2m+3)}\left(\frac{\alpha}{1+\alpha x}\right)^2+\cdots\right]:$$

on aura donc, en supposant $k=m+n$,

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\alpha^n F(n,m+n,x)=\frac{m!}{(2m)!}\frac{1}{1+\alpha x}\left[1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2m+1}\left(\frac{\alpha}{1+\alpha x}\right)+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(2m+1)(2m+3)}\left(\frac{\alpha}{1+\alpha x}\right)^2+\cdots\right].$$

Au contraire, en supposant $n=m+k$ et considérant le terme en z^{2m}, il viendra

$$\sum_{k=0}^{k=\infty}\alpha^{m+k}F(m+k,k,x)=\frac{\alpha^m}{(1+\alpha x)^{m+1}}\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{1+\alpha x}\right)+\frac{1}{3\cdot 4}\left(\frac{\alpha}{1+\alpha x}\right)^2+\frac{1}{4\cdot 5\cdot 6}\left(\frac{\alpha}{1+\alpha x}\right)^3+\cdots\right].$$

A l'égard de cette expression il convient de remarquer qu'on peut très aisément, comme $f(z)$, la transformer en intégrale définie et poser

$$\sum_{k=0}^{k=\infty}\alpha^{m+k}F(m+k,k,x)=\frac{\alpha^m}{(1+\alpha x)^{m+1}}\int_0^\infty\left(e^{-t^2+t\sqrt{\frac{\alpha}{1+\alpha x}}}+e^{-t^2-t\sqrt{\frac{\alpha}{1+\alpha x}}}\right)t\,dt;$$

mais je ne développerai pas les conséquences que l'on peut tirer de cette formule.

Caen (Calvados). E. Malo.

Eine fernere Verallgemeinerung der Aufgaben

145 (P. Epstein) und **165** (F. Schlegel). Siehe auch: Bd. XII, S. 295 f. (J. Krug).

Habe ich vier Punkte A, B, C, D auf einer Geraden, deren Aufeinanderfolge von einem fünften Punkte P der Geraden aus in einem beliebigen Sinne auch $ABCD$ sein soll, so will ich die Streckengleichheit auf der Geraden in bezug auf den Punkt P folgendermaßen definieren.

Ich sage: Es ist $AB=CD$ oder, was zugleich statt hat, $AC=BD$ in bezug auf den Punkt P, wenn P ein Doppelpunkt der Involution $AD\cdot BC\cdot\cdots$ ist.

Natürlich sind die genannten Strecken auch gleich in bezug auf den anderen Doppelpunkt der Involution.

Schneidet irgend eine Gerade g den Träger der vier Punkte in P, so sollen die Strecken auch gleich in bezug auf g heißen.

Habe ich nun zwei Kegelschnitte K' und K'' und nenne die Verbindungslinie zweier ihrer Schnittpunkte — R und S — g, die der beiden anderen

Digitized by Google

— T und U — h, so umhüllen alle Geraden, worauf durch K' und K'' in bezug auf g gleiche Strecken abgeschnitten werden, einen Kegelschnitt P von folgenden Eigenschaften:

P berührt g und h. Die Berührungspunkte liegen auf der Verbindungslinie der Pole von g in bezug auf K' und K''. Die zweiten Tangenten an P von R und S aus schneiden sich auf dieser Verbindungslinie in dem von g durch die genannten Pole harmonisch getrennten Punkte.

Wir erhalten übrigens, was vielleicht von Interesse ist, denselben Kegelschnitt P, wenn wir h, T, U statt g, R, S nehmen.

Der Kegelschnitt P kann in ein Punktpaar — die beiden Punkte auf g und h — zerfallen. Wir wollen dann K' und K'' kongruent — genauer wäre: kongruent in ähnlicher Lage — nennen in bezug auf g oder h, oder auch auf irgend eine Ebene, die die Gerade g oder h aus ihrer Ebene herausschneidet.

Habe ich nun zwei Flächen zweiter Ordnung F' und F'', deren Schnittkurve in zwei Kegelschnitte I und J zerfällt, deren Ebenen α und β heißen mögen, so umhüllen alle Ebenen, die aus F' und F'' kongruente Kegelschnitte in bezug auf α oder β herausschneiden, eine dritte Fläche Q zweiter Ordnung.

Q berührt F' und F''. Die Berührungspunkte liegen auf der Verbindungslinie der Pole von α und β in bezug auf F' und F''. Ferner gehen alle Tangenten von den Punkten auf I (oder J) an Q, die diese Verbindungslinie schneiden — mit Ausnahme der in α (β) liegenden —, durch einen ihrer Punkte, nämlich durch den von α (β) durch die Pole von α (β) harmonisch getrennten Punkt.

Zerfällt die Fläche Q in zwei lineare Bündel, deren Träger die Berührungspunkte mit α und β sind, so kann man F' und F'' kongruent nennen in bezug auf α oder β.

Langendreer, den 3. Dezember 1907. F. Boegehold.

4. Bei der Redaktion eingegangene Bücher.

Bolza, O., Vorlesungen über Variationsrechnung. Umgearbeitete und stark vermehrte deutsche Ausg. der „Lectures on the Calculus of Variations". In 3 Lieferungen. 1. Lieferung. Mit 45 Fig. IV + 300 + 10* S. Leipzig 1908, B. G. Teubner. ℳ 8.—.

W. Budde's Physikalische Aufgaben f. d. ob. Kl. höh. Lehranst. nebst den Lös. 4. Auflage neu bearb. und vermehrt von F. Johannesson. Braunschweig 1908, Vieweg u. Sohn. X + 158 S. ℳ 2.40.

Brand, E., Über Tetraeder, deren Kanten eine Fläche zweiter Ordnung berühren. Diss. Straßburg i. E. 1908.

Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Unter Mitwirkung der Herren V. Bobynin, A. v. Braunmühl, F. Cajori, S. Günther, V. Kommerell, G. Loria, E. Netto, G. Vivanti, C. R. Wallner. Vierter Band. Von 1759 bis 1799. VI + 1113 S. Leipzig 1908, B. G. Teubner. Geh. ℳ 32.—, geb. ℳ 35.—.

Carslaw, H. S., Introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals and the mathematical Theory of the Conduction of Heat. XVII + 434 S. London 1906, Macmillan and Co.

Catalogue of the University of Pennsylvania. 1907—1908. Philadelphia 1908.

Crantz, P., Arithmetik und Algebra zum Selbstunterricht II. Zweiter Teil: Gleichungen. Arithmetische und geometrische Reihen. Zinseszins- und Rentenrechnung. IV + 128 S. Komplexe Zahlen. Binomischer Lehrsatz. Aus Natur und Geisteswelt Nr. 205. Leipzig 1908, B. G. Teubner. Geh. ℳ 1.—, geb. ℳ 1.25.

Digitized by Google

Dahme, A., Die Kolbenpumpe. Ein Lehr- und Handbuch für Studierende und angehende Konstrukteure. VI + 208. München 1908, R. Oldenbourg. *M* 7.50

Danneel, H., Elektrochemie II. Experimentelle Elektrochemie, Meßmethoden, Leitfähigkeit, Lösungen. Sammlung Göschen Nr. 253. Leipzig 1908, Göschen. *M* 0.80.

Düsing, K., Die Elemente der Differential- und Integralrechnung in geometrischer Methode. 74 S. Hannover 1908, M. Jänecke. *M* 1.30.

Egerer, H., Repetitorium der höheren Mathematik. 351 S. München 1908, R. Oldenbourg. *M* 6.—.

Encyklopädie der Math. Wiss. Band IV_1, I. Heft 4: P. Stäckel, Elementare Dynamik der Punktsysteme und starren Körper. — F. Klein, Vorrede zu Band IV. — Titel und Inhaltsverzeichnis zu Band IV, 1. Teilband. XVI + S. 435 bis 691. *M* 7.80. — Band VI_2. Heft 2: F. Cohn, Theorie der astronomischen Winkelmeß-Instrumente, der Beobachtungsmethoden und ihrer Fehler. — A. Bemborad, Besondere Behandlung des Einflusses der Atmosphäre (Refraktion und Extinktion). S. 195—334. Leipzig 1908, B. G. Teubner. *M* 4.—.

Encyclopédie des sciences math. Tome I, volume 1. Fascicule 3: Nombres complexes; par E. Cartan. — Algorithmes illimités de nombres complexes; par M. Fréchet. S. 329—488. Paris 1908, Gauthier-Villars. Leipzig 1908, B. G. Teubner. *fr.* 6.25 = *M* 5.—.

Festschrift zur Feier des 200. Geburtstages Leonhard Eulers. Herausgegeben vom Vorstande der Berliner Mathematischen Gesellschaft. Mit 2 Bildnissen Eulers. VI + 137 S. Leipzig 1907, B. G. Teubner. *M* 6.—.

Friedrichs, H., Das Feldmessen des Tiefbautechnikers. 1. Teil: Reine Flächenaufnahme. Mit 182 Textabb. u. 1 Plan. VII + 138 S. Leipzig 1908, B. G. Teubner. *M* 3.20.

—, Ausgabe B ohne Plan. *M* 2.80.

Galois, Evariste, Manuscrits publiés par P. Tannery. Paris 1908, Gauthier-Villars.

Hammer, E., Der logarithmische Rechenschieber und sein Gebrauch. 4. Auflage. Stuttgart 1908, K. Wittwer. 80 S. *M* 1.00.

Hermite, Ch., Oeuvres publiées par E. Picard. Tome II. Paris 1908, Gauthier-Villars. *fr.* 18.—.

Internationales Archiv für Photogrammetrie. Her. v. d. Österr. Gesellsch. f. Photogrammetrie. Redig. von E. Doležal. Wien 1908, C. Fromme. Jhrgg. *M* 20.

Jacob, Josef, Lehrb. der Arithmetik f. Obergymn. Wien 1908, F. Deuticke. 292 S. *M* 3.20.

Jacobi, S., und A., Schlik, Bardey's Arithmetische Aufgaben nebst Lehrbuch der Arithmetik für Metallindustrieschulen, vorzugsweise für Maschinenbauschulen (Werkmeisterschulen). Nach der Ausgabe für Realschulen von Pietzker und Presler bearbeitet. Mit 3 Doppeltafeln. VI + 212 S. Leipzig 1908, B. G. Teubner. *M* 2.40.

Kambly, L., Mathematisches Unterrichtswerk. Erster Teil: Arithmetik und Algebra. Von A. Thaer. Ausgabe B: Für Oberrealschulen, Realgymnasien und Gymnasien mit math. Reformunterricht, Breslau 1908, F. Hirt. *M* 2.80.

Krüger, L., Bedingungsgleichungen für Liniennetze und für Rückwärtseinschnitte. IV + 50 S. Leipzig 1908, B. G. Teubner. *M* 4.—.

Kübel, G. J., Anwendungen einer anschaulichen Darstellung des Imaginären. Diss. Gießen 1907. 27 S.

Lodge, O., Leben und Materie. Haeckels Welträtsel kritisiert. Berlin 1908, Curtius, 150 S. *M* 2.40.

Lorey, W., Archimedes und unsere Zeit. 8 S. Leipzig 1908, B. G. Teubner.

Mathematisches Seminar zu Jena. 1907—1908. Jena 1908: J. Thomae, Über eine mit dem Vierseit verknüpfte Konfiguration. — R. Haussner, Über vollständige Vierseite besonderer Art.

Müller, E., Lehrbuch der darstellenden Geometrie für technische Hochschulen. I. Band. Mit 273 Fig. u. 3 Taf. XIV + 368 S. Leipzig 1908. B. G. Teubner. *M* 12.—.

Montessus, R. de, Leçons élémentaires sur le calcul des probabilités. Paris 1908. Gauthier-Villars. *fr.* 7.—.

Paschen, H., Theoretische und experimentelle Untersuchung benachbarter Kernschatten sowie übereinandergreifender Halbschatten und Zerstreuungskreise. Inaug. Diss. Marburg 1907.

Pietzker, F., Lehrgang der Elementar-Mathematik. Teil II: Lehrgang der Oberstufe. Mit 200 Fig. 442 S. Leipzig 1908, B. G. Teubner. *M* 4.40.

Digitized by Google

Pietzker, F., Kegelschnittslehre im Zusammenhang mit den Anfangsgründen der analytischen Geometrie (Teil III des Lehrganges der Elementarmathematik). IV + 96 S. Leipzig 1908, B. G. Teubner. ℳ 1.80.

Prang, C., Determinanten. 2. Auflage. Berlin 1908, Meyer u. Müller.

Przibram, H., Anwendung der Elementarmathematik auf biologische Probleme. 84 S. Leipzig 1908, W. Engelmann. ℳ 2.40.

Richter, O., Kreis und Kugel in senkrechter Projektion. Für den Unterricht und zum Selbststudium. Mit 147 Fig. X + 187 S. Leipzig 1908, B. G. Teubner. Geh. ℳ 4.40, geb. ℳ 4.80.

Rinkel, R., Einführung in die Elektrotechnik. Physikalische Grundlagen und technische Ausführungen. B. G. Teubners Handbücher für Handel und Gewerbe. Mit 445 Abb. VI + 463 S. Leipzig 1908, B. G. Teubner. Geh. ℳ 11.20, geb. ℳ 12.—.

Rosenberg, K., Experimentierbuch für den Unterricht in der Naturlehre. 2. Aufl. Erster Band. Wien 1908, A. Hölder. 455 S. ℳ 6.60.

Rufli, J., Lehrbuch der ebenen Geometrie nebst einer Sammlung von Übungsaufgaben. 4. Aufl. Bern 1907. A. Francke. ℳ 2.40.

—, Kleines Lehrbuch der ebenen Geometrie. 6. Aufl. Bern 1907, A. Francke. ℳ 0.90.

Schäffer, C., Natur-Paradoxe. Ein Buch für die Jugend zur Erklärung von Erscheinungen, die mit der täglichen Erfahrung im Widerspruch zu stehen scheinen. Nach Dr. W. Hampson's „Paradoxes of Nature and Science". Mit 4 Tafeln u. 65 Textbild. VIII + 179 S. Leipzig 1908, B. G. Teubner. ℳ 3.—.

Schlesinger, L., Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen. Mit 6 Fig. X + 333 S. Leipzig 1908, B. G. Teubner. Geh. ℳ 10.—, geb. ℳ 11.—.

Schnee, W., Über irreguläre Potenzreihen und Dirichletsche Reihen. I. Teil. Diss. Berlin 1908. 80 S.

Sieberg, A., Der Erdball, seine Entwicklung und seine Kräfte. In 20 Lieferungen je 0.75 ℳ. Eßlingen 1908, J. F. Schreiber.

Simon, M., Über Mathematik. Erweiterung der Einleitung in die Didaktik. Gießen 1908, A. Töpelmann. 32 S. ℳ 0.80.

Soyka, H., Präzisions-Winkellineal. Berlin 1908, F. Ashelm. ℳ 0.50.

Stäckel, P., und W. Ahrens, Der Briefwechsel zwischen C. G. J. Jacobi und P. H. von Fuß über die Herausgabe der Werke Leonhard Eulers. Herausgegeben, erläutert und durch einen Abdruck der Fußschen Liste der Eulerschen Werke ergänzt. XI + 184 S. Leipzig 1908. B. G. Teubner. ℳ 8.—.

Sylvester, J. J., The collected mathematical Papers. Volume II (1854—1873). 731 S. Cambridge 1908, University Press.

Teubners Verlag auf dem Gebiete der Mathematik, Naturwissenschaften, Technik nebst Grenzwissenschaften. 101. Ausgabe. Mit einem Gedenktagebuche für Mathematiker und den Bildnissen von G. Galilei, H. Bruns, M. Cantor, F. R. Helmert, F. Klein, Fr. Kohlrausch, K. Kraepelin, C. Neumann, A. Penck, A. Wüllner sowie einem Anhange Unterhaltungsliteratur enthaltend. Abgeschlossen im April 1908. CCCXXXI, 392 + 92 S. Leipzig 1908. B. G. Teubner.

Vater, R., Hebezeuge. Das Heben fester, flüssiger und luftförmiger Körper. Aus Natur und Geisteswelt Nr. 196. Mit 67 Abb. VI + 126 S. Leipzig 1908, B. G. Teubner. Geh. ℳ 1.—, geb. ℳ 1.25.

Volquardts, G., Feldmessen und Nivellieren. Leitfaden für den Unterricht an den Hochbauabteilungen bautechn. Fachschulen. Mit 35 Fig. IV + 34 S. Leipzig 1907, B. G. Teubner. ℳ —.80.

Weber, H., Lehrbuch der Algebra. 2. Auflage. Dritter Band: Elliptische Funktionen und algebraische Zahlen. Braunschweig 1908, Vieweg u. S. 733 S. ℳ 22.—.

Wehner, H., Das Innere der Erde und der Planeten. Freiberg i. S. 1908, Craz u. Gerlach. 74 S. ℳ 2.50.

Zöllich, H., Beiträge zur Theorie der ganzen transzendenten Funktionen der Ordnung Null. Inaug. Diss. Halle 1908. 58 S.

Berichtigung zu Band XII, S. 92.

In der sich auf die Figur beziehenden Anmerkung (Zeile 9 v. u.) ist zu lesen „$\frac{3}{2}x^2$" statt „$\frac{2}{3}x^2$".

Digitized by Google

Orlich, E., Aufnahme und Analyse von Wechselstromkurven. Von J. Herrog. S. 254. — Schulz-Euler, Leonhard Euler. Von E. Jahnke. S. 256. — Zimmermann, H., Rechentafel nebst Sammlung häufig gebrauchter Zahlenwerte. Von E. Jahnke. S. 256. — Duhem, P., Les origines de la statique. Von G. Hamel. S. 257. — Geyger, Erich, Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Von E. Müller. S. 260. — Oettingen, Arthur v., Die perspektivischen Kreisbilder der Kegelschnitte. Von E. Müller. S. 262. — Loria, Gino, Vorlesungen über darstellende Geometrie. Von E. Müller. S. 262. — Schlink, Wilhelm, Statik der Raumfachwerke. Von L. Henneberg. S. 264. — Smith, D. E., History of modern Mathematics. Von Edm. Hoppe. S. 265. — Durège, H., Elemente der Theorie der Funktionen einer komplexen veränderlichen Größe. Von M. Krause. S. 267. — Technik und Schule. I. Band, 3. Heft. Von W. Ahrens. S. 268. — Petronievics, Branislav, Die typischen Geometrien und das Unendliche. Von G. Hessenberg. S. 269. — Huntington, Edward V., La Kontinuo. Elementa teorio starigita sur la ideo de ordo kun aldono pri transfinitaj nombroj. Von G. Hessenberg. S. 270. — Lenguauer, Jos., Bardeys Aufgabensammlung für bayerische Mittelschulen nach der neuesten Auflage bearbeitet. Schülke, A., Aufgabensammlung aus der Arithmetik nebst Anwendungen auf das bürgerliche Leben, Geometrie und Physik. Müller, H., und Kutnewsky, M., Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik, Trigonometrie und Stereometrie. Napravnik, Franz, Vollständig gelöste Maturitätsaufgaben aus der Mathematik. Von E. Kullrich. S. 271. — Blythe, W. H., On Models of Cubic Surfaces. Von H. Wieleitner. S. 273. — Weitbrecht, W., Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Cappilleri, A., Einführung in die Ausgleichungsrechnung (Methode der kleinsten Quadrate). Von E. Jahnke. S. 273. — Riellot, J., Les carrés magiques. Von W. Ahrens. S. 274. — Ball, W. Rouse, Récréations mathématiques et problèmes des temps anciens et modernes. Von W. Ahrens. S. 276. — Jordan, W., Handbuch der Vermessungskunde. Von E. Hammer. S. 276. — Wedding, H., Das Eisenhüttenwesen. Von A. Keith. S. 277. — Saguier, J. A. de, Théorie des groupes finis. Von A. Loewy. S. 278. — Kuhn, Friedrich, Fragen und Aufgaben aus dem Anfangskapitel der Planimetrie. Schuster, M., Geometrische Aufgaben und Lehrbuch der Geometrie. Planimetrie — Stereometrie — Ebene und sphärische Trigonometrie. Von E. Kullrich. S. 281. — Winter, Wilhelm, Stereometrie. Von E. Kullrich. S. 281. — Sickenberger, A., Übungsbuch zur Algebra. Hočevar, Franz, Lehr- und Übungsbuch der Arithmetik für die unteren Klassen der Gymnasien und verwandter Lehranstalten. Von E. Kullrich. S. 282. — Thieme, H., Leitfaden der Mathematik für Gymnasien. Pietzker, F., Lehrgang der Elementar-Mathematik in zwei Teilen. Von E. Kullrich. S. 282. — Müller, Heinrich, Vierstellige Logarithmen-Tafeln. Richter, O., Dreistellige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Von E. Kullrich. S. 284. — Zöhlke, Paul, Ausführung elementargeometrischer Konstruktionen bei ungünstigen Lageverhältnissen. Von E. Kullrich. S. 284. — Astronomischer Kalender für 1907. Von E. Kullrich. S. 284. — Astronomischer Kalender für 1908. Von A. Baruch. S. 284.

Vereinsnachrichten. *Mitteilungen* 285

1. Aufgaben und Lehrsätze. Lösungen.

A. Aufgaben und Lehrsätze. 198. Von P. Epstein. S. 285. — 199. Von G. Keber, S. 285. — 200. Von J. Rose. S. 285. — 201. Von A. Wieferich. S. 285.

B. Lösungen. Zu 14 (E. N. Barisien) von cand. math. W. Saedecke. S. 286. — Zu 40 (O. Stolz) von cand. math. W. Saedecke. S. 286. Bemerkung von E. Lampe. S. 287. — Zu 182 (H. Wieleitner) von stud. math. J. Krug (Aussig), C. Hoffmann (Schramberg), W. Stegemann (Pranzlau), A. Baruch (Berlin), H. Wieleitner und von O. Degel (Bayreuth). S. 287. — Zu 187 (G. Keber) von E. Krelin (Schw. Gmünd) und G. Keber (Holzmaden). S. 291.

2. Anfragen und Antworten. (Vacat.)

3. Kleinere Notizen. Richtigstellung einiger Bemerkungen des Herrn v. Staudt. Von G. Rost. S. 293. — Sur les polynomes ayant pour expression $e^{\alpha} - \frac{\alpha}{1} \cdot \frac{e^{\alpha-1}}{2} +$ $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{e^{\alpha-2}}{3 \cdot 4} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{e^{\alpha-3}}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \ldots$, et sur d'autres polynomes plus généraux auxquels ils se rattachent. Von E. Maio. S. 295. — Eine fernere Verallgemeinerung der Aufgaben 115 (P. Epstein) und 165 (F. Schütz). Von F. Boerscheid. S. 301.

4. Bei der Redaktion eingegangene Bücher 302

Berichtigung zu Band XII, S. 82 304

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft: Anfang

61. Sitzung am 29. April 1908 77
62. Sitzung am 27. Mai 1908 77
Über Differentiation mit komplexem Index und ihre Beziehungen zur hypergeometrischen Funktion. Von P. Lindner . . . . . 77—83
Schraubenlinien und Loxodromen. Von E. Salkowski . . . . . 83—87
Bemerkung zu dem Vortrage: Die Nullstellen der hypergeometrischen Funktion. Von P. Schafheitlin 88

Eingelaufen sind und zum Abdruck in den nächsten Heften gelangen Beiträge der Herren:

O. Biermann, F. Boegehold, P. Ernst, E. Fosthke, L. Godeaux, W. Gohl, Philip E. B. Jourdain, W. Kluge, E. Landau, R. Lohnstein, G. A. Miller, J. Neuberg, J. V. Pexider, G. Szegö, H. Weißner, F. Vogel, L. Saalschütz, E. Salkowski, O. Schenker, C. Schmidt, H. Schumacher, O. Spieß, E. Steinitz, J. Valyi, A. Wendler, M. Winkelmann, M. Zacharias, E. Zermelo.

Eingelaufene Lösungen: Zu 51 (E. N. Barisien) von E. N. Barisien und cand. math. W. Gaedecke. — Zu 64 (E. N. Barisien) von cand. math. W. Gaedecke. — Zu 95 (E. N. Barisien) von cand. math. W. Gaedecke. — Zu 183 (H. Wieleitner) von W. Stegemann und O. Vogel (Bayreuth). — Zu 186 (W. F. Meyer) von O. Degel. — Zu 190 (H. Wieleitner) von cand. math. W. Gaedecke, O. Berkhan, C. Hoffmann, E. Kästlin, H. Wieleitner, W. Stegemann und O. Degel. — Zu 194 (J. Krug) von W. Heymann. — Zu 195 (J. Krug) von stud. math. A. Schmid (Göttingen). — Zu 196 (H. Wieleitner) von O. Degel. — Zu 197 (O. Wieleitner) von O. Degel und stud. math. H. Filzer (Göttingen).

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin.

Entwicklungen nach oscillirenden Funktionen und Integration der Differentialgleichungen der mathematischen Physik.

Bericht, erstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigung von

Dr. H. Burkhardt,
Professor a. Zürich.

In zwei Halbbänden. gr. 8. 1908. Geh. je n. ℳ 30.—

I. Band [XII u. 894 S.] **II. Band** [III, S. 895—1864.]

Als der Verfasser vor Jahren die Aufgabe übernahm für die Enzyklopädie die Artikel über trigonometrische Reihen usw. beizusteuern, schien es ihm erforderlich, die verschiedenen naturwissenschaftlichen Fragestellungen zu besprechen, die auf solche Reihen geführt haben. Das erwies sich als viel weiter greifend, als irgend jemand voraussehen konnte.

Vor allem: die traditionelle Auffassung, daß die Lehre von diesen Reihen aus dem Problem der Saitenschwingungen entsprungen sei, ist nur halb richtig. Daneben hat auf Entwicklungen analytischer Funktionen einerseits die astronomische Störungstheorie, andererseits die Ersetzung der Variabeln in einer Potenzreihe durch ihre Größe vom absoluten Betrag 1 geführt. Weiter stellte sich heraus, daß über die wirkliche Verwendung endlicher trigonometrischer Reihen eine ungemein ausgedehnte und zerstreute Literatur von astronomischer, physikalischer, geophysikalischer, physiologischer Seite vorliegt. Über alle diese Dinge ist hier zum erstenmal einiger Überblick zu erreichen. Weiter sind dann physikalische Untersuchungen besprochen, soweit Elektrizitätsleitung, soweit sie ohne Berücksichtigung der allgemeinen elektrodynamischen Gleichungen behandelt werden kann. Bei dieser ist mit dem Jahre 1880 abgebrochen, nicht als ob damit irgendwie ein bestimmter Einschnitt charakterisiert werden sollte. Aber der ursprüngliche Plan, diesen Bericht erst fertig zu machen, ehe an die Enzyklopädieartikel gegangen würde, erwies sich als unausführbar.

Ihrer Beilagen von B. G. Teubner in Leipzig, die wir der Beachtung unserer Leser bestens empfehlen.

ARCHIV
DER MATHEMATIK UND PHYSIK

MIT BESONDERER RÜCKSICHT
AUF DIE LEHRER AN HÖHEREN UNTERRICHTSANSTALTEN
SOWIE DIE STUDIERENDEN DER MATHEMATIK UND PHYSIK.

GEGRÜNDET 1841 DURCH J. A. GRUNERT.

DRITTE REIHE.

MIT ANHANG:
SITZUNGSBERICHTE DER BERLINER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT.

HERAUSGEGEBEN
VON
E. LAMPE — W. FRANZ MEYER — E. JAHNKE

13. BAND 4. HEFT

MIT 4 TEXTFIGUREN

AUSGEGEBEN AM 24. SEPTEMBER 1908.

LEIPZIG UND BERLIN,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1908.

☞ Generalregister zum Archiv der Mathematik und Physik. II. Reihe, Band 1—17, zusammengestellt von E. Jahnke. Mit einem Bildnis und Biographie R. Hoppes. (XXXI u. 114 S.) gr. 8. 1901. geh. n. M. 6.—

ARCHIV DER MATHEMATIK UND PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN VON E. LAMPE, W. FRANZ MEYER UND E. JAHNKE.

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASSE 3.

☞ Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Rezensionsexemplare usw.) sind an den geschäftsführenden Redakteur:

Professor Dr. E. Jahnke, Berlin W 15, Pariserstraße 36

zu richten. Es nehmen aber auch Geheimer Regierungsrat Professor Dr. E. Lampe in Berlin W 15, Fasanenstraße 64, und Professor Dr. W. Franz Meyer in Königsberg i. Pr., Marsmenhof, Hersog Albrecht Allee 27, Sendungen für die Redaktion an.

☞ Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich von größeren Aufsätzen 50 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen, Mitteilungen, Rezensionen usw. 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

☞ Jeder Band des Archivs umfaßt 24 Druckbogen in 4 Heften und kostet 16 Mark; jährlich sollen nicht mehr als 6 Einzel-Hefte ausgegeben werden. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

Die Redaktion ersucht die Herren Autoren, in ihrem eigenen Interesse den Umfang der für das Archiv bestimmten Manuskripte nach Möglichkeit einschränken zu wollen, da nur solche geringen Umfanges Aussicht haben, in nächster Zeit abgedruckt zu werden. Die Redaktion teilt ferner mit, daß sie sich durch den Umfang des vorliegenden Manuskriptenmaterials für die nächste Zeit verhindert sieht, Inauguraldissertationen in extenso ins Archiv aufzunehmen.

INHALT DES VORLIEGENDEN HEFTES.

	Seite
Titel und Inhalt	I–X
Über die Einteilung der positiven ganzen Zahlen in vier Klassen nach der Mindestzahl der zu ihrer additiven Zusammensetzung erforderlichen Quadrate Von **Edmund Landau** in Berlin. Mit 2 Abbildungen	302
Systeme korrelativer Bündel, welche eine gegebene F^2 erzeugen. (Schluß.) Von **Wolfgang Vogt** in Karlsruhe	314
Über Fachwerke mit zyklischer Symmetrie Von H. Reissner in Aachen. Mit 2 Abbildungen	317
Einige Reihenentwicklungen für π. Von **Rudolf Lehnstein** in Berlin	328
Rezensionen	332
Abraham, M. und Föppl, A., Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität. I. Von E. Jahnke	332
Ahrens, W., Briefwechsel zwischen C. G. J. Jacobi und M. H. Jacobi. Von Josef Herzog	332
Baire, René, Leçons sur les théories générales de l'analyse. Von P. Bartoga	336
Ball, W. W. Rouse, Histoire des Mathématiques. Von J. Tropfke	336
Bouty, M., „Cours de Physique de l'École Polytechnique par M. J. Jamin." Troisième Supplément. Von O. Lummer	342
Brillouin, Marcel, Leçons sur la viscosité des liquides et des gaz. Von M. Lane	342
Broggi, Ugo, Traité des assurances sur la vie avec développements sur le calcul des probabilités. Von E. Wagner	344
Bruns, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmaßlehre. Von Helm	350
Bryan, G. H., Thermodynamics. Von M. Lane	340
Burkhardt, H., Vorlesungen über die Elemente der Differential- und Integralrechnung und ihre Anwendung zur Beschreibung von Naturerscheinungen. Von E. Jahnke	347
Cantor, Moritz, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. 1. Band. Von J. Tropfke	351
Emden, R., Gaskugeln. Von G. Holzmüller	345
Enzyklopädie der Elementar-Mathematik. I. Bd. Von L. Heuneberg	337
Häfner, Phil., Stromverteilungssysteme und Berechnung elektrischer Leitungen. Von Josef Herzog	352
Hesse, O., Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der geraden Linie, des Punktes und des Kreises in der Ebene. Von P. Zühlke	350
Klauser und Labe, Lehrbuch der Vermessungskunde. Von K. Fuhrmann	353
Kowalewski, G., Einführung in die Determinantentheorie einschließlich der unendlichen Determinanten. Von E. Jahnke	349
Krauss, Fritz, Die Thermodynamik der Dampfmaschinen. Von K. Vater	346
Lamb, Horace, Lehrbuch der Hydrodynamik. Von M. Lane	340
Lorentz, H. A., Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung nebst einer Einführung in andere Teile der Mathematik. Von E. Jahnke	347
Marx, Erich, Die Geschwindigkeit der Röntgenstrahlen. Von M. Lane	343
Neikes, H., „Der goldene Schnitt und die Geheimnisse der Cheopspyramide". Von E. Jahnke	353

1 [Fortsetzung auf der 3. Seite des Umschlags.]

Über die Einteilung der positiven ganzen Zahlen in vier Klassen nach der Mindestzahl der zu ihrer additiven Zusammensetzung erforderlichen Quadrate.

Von Edmund Landau in Berlin.

Einleitung.

Bekanntlich ist jede Zahl[1]) als Summe von vier Quadraten (d. h. als Summe von höchstens vier positiven Quadraten) darstellbar.

Bekanntlich ist jede Zahl als Summe von drei Quadraten (d. h. von höchstens drei positiven Quadraten) dann und nur dann darstellbar, wenn sie nicht die Gestalt $4^a(8b+7)$ $(a \geqq 0,\ b \geqq 0)$ hat.

Bekanntlich ist jede Zahl als Summe von zwei Quadraten (d. h. von höchstens zwei positiven Quadraten) dann und nur dann darstellbar, wenn jeder in ihr etwa vorkommende Primfaktor von der Form $4b+3$ in gerader Vielfachheit auftritt.

Ich verstehe nun unter $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $D(x)$ bzw. die Anzahl der bis x (inkl.) gelegenen Zahlen, welche in 1, 2, 3, 4 Quadrate zerlegbar sind.

Dann ist offenbar

$$D(x) = [x],$$

also

$$\lim_{x=\infty} \frac{D(x)}{x} = 1.$$

Ferner ist leicht ersichtlich, daß

$$\lim_{x=\infty} \frac{C(x)}{x} = \frac{5}{6} \tag{1}$$

ist. Denn $[x] - C(x)$ ist die Anzahl der Zahlen bis x von einer der Formen $8b+7$, $4(8b+7)$, $4^2(8b+7)$, ...; da die Anzahl der Zahlen $8b+7 \leqq x$ offenbar $\left[\frac{x+1}{8}\right]$ ist, so ergibt sich

$$[x] - C(x) = \left[\frac{x+1}{8}\right] + \left[\frac{\frac{x}{4}+1}{8}\right] + \left[\frac{\frac{x}{4^2}+1}{8}\right] + \cdots,$$

1) Unter Zahl verstehe ich in dieser Arbeit eine positive ganze Zahl (1, 2, 3, 4, ...), unter Quadrat das Quadrat einer ganzen Zahl (0, 1, 4, 9, ...).

Digitized by Google

also, da diese endliche Summe

$$y = \left[\frac{\log x - \log 7}{\log 4}\right] + 1$$

nicht verschwindende Glieder hat[1]),

$$\begin{aligned}
[x] - C(x) &= \frac{x+1}{8} + \frac{\frac{x}{4}+1}{8} + \cdots + \frac{\frac{x}{4^{y-1}}+1}{8} + O(\log x) \\
&= \frac{x}{8}\left(1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4^{y-1}}\right) + O(\log x) \\
&= \frac{x}{8}\left(\frac{4}{3} + O\left(\frac{1}{4^{y-1}}\right)\right) + O(\log x) \\
&= \frac{x}{6} + O(1) + O(\log x), \\
C(x) &= \tfrac{5}{6}\, x + O(\log x),
\end{aligned}$$

womit (1) bewiesen ist.

Außerdem ist

$$A(x) = [\sqrt{x}],$$

also

$$\lim_{x=\infty} \frac{A(x)}{\sqrt{x}} = 1.$$

Aber für die vierte Funktion $B(x)$ war es mir bisher trotz mannigfacher Bemühungen niemals gelungen, ihr Wachstum mit dem einer der gewöhnlichen Vergleichsfunktionen positiven Argumentes in asymptotische Verbindung zu bringen, genauer gesagt, die Existenz eines Grenzwertes

$$\lim_{x=\infty} \frac{B(x)}{\frac{x}{\sqrt{\log x}}} = b > 0 \tag{2}$$

zu beweisen, auf welchen heuristische Überlegungen führen. Erst kürzlich versuchte ich einmal, meine übliche Beweismethode bei Primzahlproblemen, die sich auf ein komplexes Integral der Gestalt

$$\int \frac{x^s}{s^2} f(s)\, ds$$

stützt (wo $f(s)$ die einer gegebenen zahlentheoretischen Funktion entsprechende Dirichletsche Reihe bzw. die dadurch definierte analytische Funktion ist), mutatis mutandis auf Fälle zu übertragen, in welchen die in Betracht kommende Funktion sich im Punkte $s = 1$ verzweigt

1) Denn $y - 1$ ist die größte Zahl, für welche $\frac{x}{4^{y-1}} \geqq 7$, d. h. $\frac{x}{7} \geqq 4^{y-1}$ ist.

Digitized by Google

(also nicht, wie gewöhnlich, dort holomorph oder meromorph ist), und kam dadurch zum Ziel. Diesen Beweis von (2) werde ich in der vorliegenden Arbeit angeben, ohne auf schärfere[1]) Abschätzungen als die Auffindung des höchsten Gliedes $\frac{bx}{\sqrt{\log x}}$ Wert zu legen.

Geometrisch gesprochen bedeutet $B(x)$, wenn in der Ebene die ganzzahligen Gitterpunkte markiert werden, die Anzahl der Kreise mit dem Mittelpunkt 0 und positivem Radius $\leqq \sqrt{x}$, auf denen mindestens ein Gitterpunkt liegt. In der Theorie der algebraischen Zahlkörper bedeutet $B(x)$ die Anzahl der positiven Zahlen $\leqq x$, welche Normen von ganzen algebraischen Zahlen des Körpers $P(i)$ sind, d. h. die Anzahl der nicht verschwindenden Koeffizienten $F(n)$ in den ersten $[x]$ Gliedern der zugehörigen Zetafunktion

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^s} = \sum_{\mathfrak{n}} \frac{1}{(N\mathfrak{n})^s}.$$

Wenn $\mathfrak{A}(x)$, $\mathfrak{B}(x)$, $\mathfrak{C}(x)$, $\mathfrak{D}(x)$ bzw. die Anzahl der ganzen Zahlen $\leqq x$ bezeichnen, zu deren Darstellung genau 1, 2, 3, 4 Quadrate erforderlich sind, so ist

$$\mathfrak{D}(x) = D(x) - C(x),\ \mathfrak{C}(x) = C(x) - B(x),\ \mathfrak{B}(x) = B(x) - A(x),\ \mathfrak{A}(x) = A(x),$$

also nach dem Obigen

$$\lim_{x=\infty} \frac{\mathfrak{D}(x)}{x} = \frac{1}{6},\ \lim_{x=\infty} \frac{\mathfrak{C}(x)}{x} = \frac{5}{6},\ \lim_{x=\infty} \frac{\mathfrak{B}(x)}{\frac{x}{\sqrt{\log x}}} = b > 0,\ \lim_{x=\infty} \frac{\mathfrak{A}(x)}{\sqrt{x}} = 1.$$

In dieser Form (welche der Überschrift dieser Arbeit entspricht) läßt sich also das Ergebnis des Folgenden aussprechen.

§ 1.

Es sei $b_n = 1$, wenn n in zwei Quadrate zerlegbar ist, sonst $b_n = 0$. Dann ist

$$B(x) = \sum_{n=1}^{x} b_n.$$

$f(s)$ bezeichne die für $\Re(s) > 1$ durch die Dirichletsche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$$

1) Mit derselben Methode ausführbare.

Digitized by Google

definierte analytische Funktion von $s = \sigma + ti$. Dann ist, wenn q alle Primzahlen $4m+1$, r alle Primzahlen $4m+3$ durchläuft, für $\Re(s) > 1$

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^{2s}} + \cdots\right) \prod_q \left(1 + \frac{1}{q^s} + \frac{1}{q^{2s}} + \cdots\right) \prod_r \left(1 + \frac{1}{r^{2s}} + \frac{1}{r^{4s}} + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{2^s}} \prod_q \frac{1}{1 - \frac{1}{q^s}} \prod_r \frac{1}{1 - \frac{1}{r^{2s}}}.$$

Ferner ist bekanntlich für $\Re(s) > 1$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^s}} \prod_q \frac{1}{1 - \frac{1}{q^s}} \prod_r \frac{1}{1 - \frac{1}{r^s}}$$

und, wenn $L(s)$ die für $\Re(s) > 0$ durch die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s} = 1 - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{1}{7^s} + \cdots$$

definierte analytische Funktion bezeichnet, für $\Re(s) > 1$

$$L(s) = \prod_q \frac{1}{1 - \frac{1}{q^s}} \prod_r \frac{1}{1 + \frac{1}{r^s}}.$$

Daraus folgt für $\Re(s) > 1$

$$(f(s))^2 = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^s}} \prod_r \frac{1}{1 - \frac{1}{r^{2s}}} \zeta(s)\, L(s).$$

Bekanntlich[1]) hat $\zeta(s)\, L(s)$ im Punkt $s = 1$ einen Pol erster Ordnung mit dem Residuum $\frac{\pi}{4}$, ist sonst für $\sigma = 1$ regulär und von Null verschieden, und es gibt eine Konstante b, so daß für $|t| \geqq 3$, $1 - \frac{1}{\log^b |t|} \leqq \sigma$

$$0 < |\zeta(s)| < \log^b |t|,\ 0 < |L(s)| < \log^b |t|$$

ist. Daraus folgt, da $\frac{1}{1 - \frac{1}{2^s}} \prod_r \frac{1}{1 - \frac{1}{r^{2s}}}$ für $\sigma > \frac{1}{2}$ regulär und $\neq 0$ ist,

1) Vergl. meine Arbeit „über die Primzahlen einer arithmetischen Progression" [Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Bd. CXII, Abt. IIa (1903), S. 493 bis 535], S. 509, 512, 519.

Digitized by Google

sowie für $\sigma > \frac{3}{4}$ absolut genommen unterhalb einer endlichen Schranke verbleibt:

Es gibt eine absolute Konstante c derart, daß in dem durch den geraden Schnitt von $1 - \frac{1}{\log^c 3}$ *bis* 1 *aufgetrennten Gebiet (vergl. beistehende schematische Figur)*

Fig. 1.

$$\sigma \geqq 1 - \frac{1}{\log^c t} \text{ für } t \geqq 3,$$

$$\sigma \geqq 1 - \frac{1}{\log^c 3} \text{ für } 3 \geqq t \geqq -3,$$

$$\sigma \geqq 1 - \frac{1}{\log^c (-t)} \text{ für } t \leqq -3$$

$f(s)$ regulär ist und für $|t| \geqq 3$, $\sigma \geqq 1 - \frac{1}{\log^c |t|}$ *die Ungleichung*

$$|f(s)| < \log^c |t| \tag{3}$$

erfüllt, und daß ferner $f(s)\sqrt{s-1}$ auch auf dem Schnitt (inkl. $s = 1$) noch regulär ist.

Die in dem aufgeschnittenen Gebiet gültige Entwickelung von $f(s)$ in der Umgebung von $s = 1$ beginnt mit

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \prod_r \frac{1}{1 - \frac{1}{r^s}} \cdot \frac{1}{\sqrt{s-1}} + \cdots = \frac{a}{\sqrt{s-1}} + \cdots,$$

wo a den positiven konstanten Wert bezeichnet und $\sqrt{s-1}$ für $s > 1$ positiv ist. Ich darf $c > 1$ annehmen.

§ 2.

Nach der bekannten Integralformel

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{2-\infty i}^{2+\infty i} \frac{y^s}{s^2}\, ds \begin{cases} = \log y & \text{für } y \geqq 1, \\ = 0 & \text{für } 0 < y \leqq 1 \end{cases}$$

(bei geradem Integrationsweg) ist für $x > 0$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{2-\infty i}^{2+\infty i} \frac{x^s}{s^2} f(s)\, ds = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{x} b_n \int_{2-\infty i}^{2+\infty i} \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^s}{s^2}\, ds = \sum_{n=1}^{x} b_n \log \frac{x}{n},$$

also

$$\sum_{n=1}^{x} b_n \log \frac{x}{n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-x^2 i}^{2+x^2 i} \frac{x^s}{s^2} f(s)\, ds + O \int_{x^2}^{\infty} \frac{x^2}{t^2}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{2-x^2 i}^{2+x^2 i} \frac{x^s}{s^2} f(s)\, ds + O(1).$$

Digitized by Google

Von $B = 2 + x^2 i$ werde nun, $x > \sqrt{3}$ vorausgesetzt, bis $A = 2 - x^2 i$ über folgenden Weg integriert (vergl. beistehende schematische Figur): Geradlinig bis $C = 1 - \frac{1}{\log^c(x^2)} + x^2 i$, auf der Kurve $s = 1 - \frac{1}{\log^c t} + ti$ bis $D = 1 - \frac{1}{\log^c 3} + 3i$, geradlinig bis $E = 1 - \frac{1}{\log^c 3} = \vartheta$, am oberen Rande des Schnitts bis $F = 1$, am unteren Rande zurück bis E, nach unten bis $G = 1 - \frac{1}{\log^c 3} - 3i$, auf der Kurve $s = 1 - \frac{1}{\log^c(-t)} + ti$ bis $H = 1 - \frac{1}{\log^c(x^2)} - x^2 i$, geradlinig bis A. Dann ist auf dem Wege (bis auf den Punkt $s = 1$, der nicht stört[1])) $\frac{x^s}{s^3} f(s)$ regulär, ebenso in dem zwischen dem Wege und der Geraden von A bis B gelegenen Gebiet; der Cauchysche Satz ergibt also

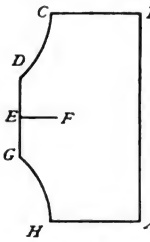


Fig. 2.

$$(4)\quad 2\pi i \sum_{n=1}^{x} b_n \log\frac{x}{n} = -\int_B^C - \int_C^D - \int_D^E - \int_E^F - \int_F^E - \int_E^G - \int_G^H - \int_H^A + O(1).$$

Hierin ist nach (3)

$$(5)\quad \left|\int_B^C\right| = \left|\int_H^A\right| = O\left(\frac{x^2 \log^c x}{x^4}\right) = O\left(\frac{\log^c x}{x^2}\right),$$

$$\left|\int_C^D\right| = \left|\int_G^H\right| = O\int_3^{x^2} \frac{x^{1-\frac{1}{\log^c t}}}{t^2} \log^c t\, dt$$

$$= O\left(x \log^c x \int_3^{x^2} \frac{x^{-\frac{1}{\log^c t}}}{t^2}\, dt\right)$$

$$= O\left(x \log^c x \int_3^{e^{\sqrt[2c]{\log x}}} \frac{x^{-\frac{1}{\log^c t}}}{t^2}\, dt\right) + O\left(x \log^c x \int_{e^{\sqrt[2c]{\log x}}}^{x^2} \frac{x^{-\frac{1}{\log^c t}}}{t^2}\, dt\right)$$

$$= O\left(x \log^c x \cdot x^{-\frac{1}{(\sqrt[2c]{\log x})^c}} \int_3^{e^{\sqrt[2c]{\log x}}} \frac{dt}{t^2}\right) + O\left(x \log^c x \int_{e^{\sqrt[2c]{\log x}}}^{x^2} \frac{dt}{t^2}\right)$$

$$= O\left(x \log^c x\, e^{-\sqrt{\log x}}\right) + O\left(x \log^c x\, e^{-\sqrt[2c]{\log x}}\right)$$

$$(6)\quad = O\left(x e^{-\sqrt[3c]{\log x}}\right).$$

1) Es darf in den singulären Punkt $s = 1$ hinein integriert werden, da er eine algebraische Unendlichkeitsstelle $^1/_3$ter Ordnung ist.

Digitized by Google

Ferner ist

$$\left|\int_D^E\right| - \left|\int_E^G\right| = O\left(x^{1-\frac{1}{\log^2 3}}\right) = O(x^9). \tag{7}$$

Aus (4), (5), (6) und (7) folgt

$$2\pi i \sum_{n=1}^{x} b_n \log\frac{x}{n} = O\left(x e^{-3\sqrt{\log x}}\right) - \int_{EFE} \frac{x^s}{s^2} f(s)\, ds,$$

also, da $f(s)$ sich an beiden Ufern des Schnitts um den Faktor -1 unterscheidet,

$$\sum_{n=1}^{x} b_n \log\frac{x}{n} = \frac{1}{\pi i}\int_{\mathfrak{H}}^{1} \frac{x^s}{s^2} f(s)\, ds + O\left(x e^{-3\sqrt{\log x}}\right), \tag{8}$$

wo über das untere Ufer des Schnitts zu integrieren ist, d. h. bei positivem Werte von $\sqrt{1-s}$ die für $|s-1|<r$, wo $r>1-\vartheta$ ist, konvergente Reihe

$$\frac{f(s)}{s^2} = \frac{a\,i}{\sqrt{1-s}} + a_1\sqrt{1-s} + \cdots$$

zu nehmen ist.

Es ist für $\vartheta \leqq s \leqq 1$

$$|a_1\sqrt{1-s} + \cdots| < A,$$

also

$$\int_{\mathfrak{H}}^{1} x^s \left(\frac{f(s)}{s^2} - \frac{a\,i}{\sqrt{1-s}}\right) ds = O\int_{\mathfrak{H}}^{1} x^s\, ds = O\left(\frac{x-x^9}{\log x}\right) = O\left(\frac{x}{\log x}\right),$$

folglich nach (8)

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{x} b_n \log\frac{x}{n} &= O\left(\frac{x}{\log x}\right) + \frac{a}{\pi}\int_{\mathfrak{H}}^{1} \frac{x^s}{\sqrt{1-s}}\, ds \\
&= \frac{a}{\pi}\int_{0}^{1} \frac{x^s}{\sqrt{1-s}}\, ds + O\left(\frac{x}{\log x}\right) \\
&= \frac{a}{\pi}\int_{0}^{1} \frac{x^{1-u}}{\sqrt{u}}\, du + O\left(\frac{x}{\log x}\right) \\
&= \frac{a}{\pi}\, x \int_{0}^{\log x} \frac{e^{-v}}{\sqrt{\frac{v}{\log x}}} \frac{dv}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log x}\right) \\
&= \frac{a}{\pi}\frac{x}{\sqrt{\log x}}\int_{0}^{\log x} e^{-v} v^{-\frac{1}{2}}\, dv + O\left(\frac{x}{\log x}\right),
\end{aligned}$$

Digitized by Google

$$\lim_{x=\infty} \frac{\sqrt{\log x}}{x} \sum_{n=1}^{x} b_n \log \frac{x}{n} = \frac{a}{\pi} \int_0^\infty e^{-v} v^{-\frac{1}{2}} dv = \frac{a}{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{\sqrt{\pi}}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\prod_r \frac{1}{1-\frac{1}{r^2}}} = b > 0. \tag{9}$$

§ 3.

Es sei $\delta > 0$ gegeben. Dann ist nach (9)

$$\lim_{x=\infty} \frac{\sqrt{\log((1+\delta)x)}}{(1+\delta)x} \sum_{n=1}^{(1+\delta)x} b_n \log \frac{(1+\delta)x}{n} = b,$$

also

$$\lim_{x=\infty} \frac{\sqrt{\log x}}{x} \sum_{n=1}^{(1+\delta)x} b_n \log \frac{(1+\delta)x}{n} = b(1+\delta),$$

folglich, wenn hiervon (9) subtrahiert wird,

$$\lim_{x=\infty} \left(\frac{\sqrt{\log x}}{x} \log(1+\delta) \sum_{n=1}^{x} b_n + \frac{\sqrt{\log x}}{x} \sum_{n=x+1}^{(1+\delta)x} b_n \log \frac{(1+\delta)x}{n} \right) = b\delta,$$

also da hier der Ausdruck unter dem Limeszeichen nicht kleiner als $\frac{\sqrt{\log x}}{x} \log(1+\delta) B(x)$ und $\leqq \frac{\sqrt{\log x}}{x} \log(1+\delta) B((1+\delta)x)$ ist,

$$\limsup_{x=\infty} \frac{\sqrt{\log x}}{x} B(x) \leqq \frac{b\delta}{\log(1+\delta)}, \tag{10}$$

$$\liminf_{x=\infty} \frac{\sqrt{\log x}}{x} B((1+\delta)x) \geqq \frac{b\delta}{\log(1+\delta)}; \tag{11}$$

aus (11) folgt, wenn $\frac{x}{1+\delta}$ statt x geschrieben wird,

$$\liminf_{x=\infty} \frac{\sqrt{\log x}}{x} B(x) \geqq \frac{b\delta}{(1+\delta)\log(1+\delta)}. \tag{12}$$

Da (10) und (12) für alle $\delta > 0$ gelten und

$$\lim_{\delta=0} \frac{\delta}{\log(1+\delta)} = 1$$

ist, ist nach (10)

$$\limsup_{x=\infty} \frac{\sqrt{\log x}}{x} B(x) \leqq b,$$

nach (12)

$$\liminf_{x=\infty} \frac{\sqrt{\log x}}{x} B(x) \geqq b,$$

folglich

$$\lim_{x=\infty} \frac{B(x)}{\frac{x}{\sqrt{\log x}}} = b > 0. \tag{2}$$

Berlin, den 21. Juni 1908.

Digitized by Google

Systeme korrelativer Bündel, welche eine gegebene F^2 erzeugen.

Von Wolfgang Vogt in Karlsruhe.

(Schluß.)

III. Die anderen Bedingungsgruppen.

§ 1.

24. Die bisher gewonnenen Anzahlen von korrelativen Bündeln bei fünf zu F^2 hinzutretenden Bedingungen reichen hin, um die lösenden Anzahlen bei allen möglichen anderen Kombinationen von fünf einfachen Bedingungen, oder mehrfachen in äquivalenter Anzahl, formelmäßig zu bestimmen, und zwar ohne Benutzung der Ausartungen.

Es liege irgend ein *einfach* unendliches System von Bündel-Korrelationen vor mit der Eigenschaft, daß eine beliebige Bedingung μ von μ Korrelationen erfüllt wird. Ich kann dann sagen: die den Strahlen von allen möglichen Punkten O_1 nach einem Punkte A_1 hin entsprechenden Ebenen erfüllen einen Torsus μ^{ter} Klasse. Sind A_1, A_1' zwei Punkte einer Graden $\mathfrak{a}_1$, so sind die ihnen zugehörigen Torsen ein-eindeutig bezogen, wenn zwei Ebenen entsprechend sind, die dem Strahl $O_1 A_1$ und $O_1 A_1'$ in einer und derselben Korrelation entsprechen, und erzeugen durch die Schnittgeraden von entsprechenden Ebenen eine Regelfläche $2\mu^{ter}$ Ordnung. Enthält das System λ planare Bündelkorrelationen, so fallen in deren singulären Ebenen im zweiten Raume zwei entsprechende Ebenen zusammen, es sondern sich also λ Ebenen von der Regelfläche $2\mu^{ter}$ Ordnung ab. Die Strahlen dieser Regelfläche entsprechen den Ebenen $O_1\mathfrak{a}_1$ in den Bündelkorrelationen, $2\mu - \lambda$ schneiden eine beliebige Gerade $\mathfrak{a}_2$. Nenne ich ν die Anzahl der Bündelkorrelationen, die eine Bedingung ν erfüllen, so gilt: $\nu = 2\mu - \lambda$[1]). Haben die Bündelkorrelationen sämtlich dieselbe allgemeine F^2 zum Erzeugnis, so sind planare Korrelationen unmöglich. In unserem Falle gilt also: $\nu = 2\mu$. *D. h. jedesmal, wenn ich eine Bedingung μ durch eine Bedingung ν ersetze, multipliziert sich die Lösungszahl mit* 2.

An einem Beispiel will ich diese Formel verifizieren: Nehme ich O_1 und O_2 auf F^2 fest an, so bestimmt ein Paar $A_1; A_2$ die Korrelation im allgemeinen eindeutig. Liegt dagegen ein Paar $\mathfrak{a}_1; \mathfrak{a}_2$ vor, so verlangt

1) Sturm, Math. Ann. **12**, 263. — Sturm, a. a. O. S. 219.

Digitized by Google

dieses, daß der der Ebene $O_1\mathfrak{a}_1$ entsprechende Strahl einer von den beiden ist, die von O_2 kommen und sowohl den Kegelschnitt $(O_1\mu_1, F^2)$ als auch die Gerade $\mathfrak{a}_2$ schneiden. Es gibt also zwei Korrelationen $p_1^2 p_2^2 \nu = 8$.

(I) $$\nu = 2\mu.$$

25. Untersuchen wir Beziehungen zwischen *doppelten* Bedingungen: Nach (22) können wir schreiben:

(II) $$\bar{\mu}_1 = \bar{\mu}_2 = \bar{\mu} = \mu^2.^1)$$

Die Bedingung $\bar{p}_2 = \mathfrak{a}; \alpha_2$, welche verlangt, daß der Ebene $O_1\mathfrak{a}_1$ ein Strahl in α_2 entspricht, ist nur erfüllt, wenn die Bedingungen p_2, daß O_2 der Ebene α_2 angehört, und ν, daß $\mathfrak{a}_1$ mit einer beliebigen Geraden $\mathfrak{a}_2$ in α_2 konjugiert ist, erfüllt sind, abzüglich der darunter enthaltenen Fälle, in denen O_2 einer der beiden Punkte $(\mathfrak{a}_2 F^2)$ ist (p_2^2). Es gilt also:

(III) $$\bar{p}_2 = p_2\nu - p_2^2, \quad \bar{p}_1 = p_1\nu - p_1^2.$$

Liegt O_1 in einem Punkte $(\mathfrak{a}_1 F^2)$, so ist die Ebene $O_1\mathfrak{a}_1$ in einem Ebenenbüschel unbestimmt. Die diesen Ebenen entsprechenden Strahlen bilden einen Strahlenbüschel in O_2, von ihnen liegt im allgemeinen kein Strahl in α_2, es sei denn, daß O_2 noch obendrein in α_2 läge, das wären aber im ganzen drei Bedingungen. Die Möglichkeit fällt demnach weg.

Wird in einem zweifach unendlichen System von korrelativen Bündeln die Bedingung $\bar{\mu}$ von $\bar{\mu}$, die Bedingung $\bar{p}_2$ von $\bar{p}_2$ Bündelkorrelationen erfüllt, so heißt das: die den Ebenen von O_1 nach einer Geraden $\mathfrak{a}_1$ hin entsprechenden Strahlen bilden eine Kongruenz $[\bar{\mu}, \bar{p}_2]$ $\bar{\mu}^{\text{ter}}$ Ordnung, $\bar{p}_2^{\text{ter}}$ Klasse. Zwei beliebige Strahlen $\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_2'$ werden daher von $\bar{\mu} + \bar{p}_2$ Strahlen der Kongruenz geschnitten, oder es gilt:

(IV) $$\bar{\nu}_1 = \bar{\mu} + \bar{p}_2, \quad \bar{\nu} = \bar{\mu} + \bar{p}_1.$$

26. Wir kommen zu *dreifachen* Bedingungen.

Nach (23) ist durch $\bar{\mu}_1 = [A_1; \alpha_2]$ zugleich $\bar{\mu}_2 = [A_1'; A_1 \equiv A_2']$ mitgegeben. Zur Befriedigung von $\bar{\mu} = \bar{\mu}_1 = \bar{\mu}_2$ ist daher notwendig: O_1 muß auf α_1', O_2 auf α_2 liegen $(p_1 p_2)$, und A_1 muß mit irgend einem Punkte von α_2 konjugiert sein:

(V) $$\bar{\mu}_1 = \bar{\mu}_2 = \bar{\mu} = p_1 p_2 \mu.$$

---

1) Schubert a. a. O. S. 225 findet mittels des Prinzips der Erhaltung der Anzahl $\mu^2 = \eta + \lambda\varepsilon$, wo sein η mein $\bar{\mu}$ und $\lambda\varepsilon$ die Bedingung bedeutet, daß die Korrelation planar ist und eine singuläre Ebene durch einen Punkt geht. Für $\lambda = 0$ stimmt sie mit der obigen überein.

Digitized by Google

$\overline{\overline{\nu}}_1$ bedeutet: Der Ebene von O_1 nach einem Strahle a_1 hin soll ein Strahl entsprechen, der einem bestimmten Strahlenbündel (A_2, α_2) angehört. Dazu muß O_2 in α_2 liegen, und $a_1; A_2$ müssen konjugiert sein. Also:

(VI) $$\overline{\overline{\nu}}_1 = p_2\overline{\mu}, \quad \overline{\overline{\nu}}_2 = p_1\overline{\mu}.$$

Wird in einem Systeme dritter Stufe die Bedingung $\overline{\overline{\nu}}_1$ von $\overline{\overline{\nu}}_1$ Bündelkorrelationen erfüllt, so heißt das: die den Ebenen von O_1 nach einer Geraden a_1 entsprechenden Strahlen erfüllen einen Komplex $\overline{\overline{\nu}}_1^{ten}$ Grades. Darum gehören einer Regelschaar $2\overline{\overline{\nu}}_1$ Gerade an, und es gilt:

(VII) $$\overline{\overline{\nu}}_1' = 2\overline{\overline{\nu}}_1, \quad \overline{\overline{\nu}}_2' = 2\overline{\overline{\nu}}_2.$$

Damit endlich $\overline{\overline{\nu}}_1$ erfüllt ist, d. h. der Ebene von O_1 nach einer Geraden a_1 ein gegebener Strahl a_2 entspricht, muß O_2 auf a_2 liegen (p_2^2) und a_1 zu einem Punkte A_2 von a_2 konjugiert sein:

(VIII) $$\overline{\nu}_1 = p_2^2\overline{\mu}, \quad \overline{\overline{\nu}}_2 = p_1^2\overline{\mu}.^1)$$

§ 2.

27. Die *Tabelle* ist folgendermaßen zu verstehen: Jede Zeile ist durch ein symbolisches Produkt vierter Dimension, jede Kolonne durch ein einfaches Bedingungssymbol charakterisiert. Jedes Glied der Tabelle gibt die Zahl der lösenden Bündelkorrelationen für dasjenige symbolische Produkt fünfter Dimension an, welches aus den seiner Zeile und seiner Kolonne vorstehenden Symbolen gebildet wird.

Weil die Bedingung ν mit der μ durch die einfache Relation $\nu = 2\mu$ verbunden ist, so ist sie in der Tabelle nur in der letzten Kolonne aufgenommen. Die Bedingung $\overline{\nu}_1'$ und $\overline{\overline{\nu}}_2'$ ist wegen ihres einfachen Zusammenhanges mit ν_1 und $\overline{\nu}^2$ $(\overline{\nu}_1' = 2\overline{\overline{\nu}}_1')$ ganz weggelassen. Von Bedingungsprodukten, die durch Raumvertauschung ineinander übergehen, z. B. $p_1^2p_2\mu^2$ und $p_1p_2^2\mu^2$, ist stets nur eines aufgeführt.

In dieses Schema gehen naturgemäß nur solche fünffachen Bedingungsgruppen ein, welche mindestens eine einfache Bedingung enthalten; für die wenigen Gruppen mit nur mehrfachen Bedingungen ist eine besondere Tabelle angelegt.

28. Zur Bestätigung durch die Abzählung mittels der Ausartungen erster Stufe sind in der sechsten und siebenten Kolonne die Anzahlen der axialen Bündelkorrelationen vom Typus ψ und ψ' angegeben (8), welche die vier zu jeder Zeile gehörigen Bedingungen befriedigen, so

1) Die Formeln (III) bis (VIII) bleiben gültig, auch wenn an Stelle von F^2 irgendwelche neun einfache Bedingungen treten, nur daß $\overline{\mu}_1$ von $\overline{\mu}_2$ unterschieden werden muß.

Digitized by Google

daß in jeder Zeile das Glied der Kolonne μ und ν aus denen der Kolonnen $p_1 p_2$, ψ, ψ' durch die Formeln von Schubert[1])

$$3\mu = p_1 + p_2 + \psi + \psi',$$
$$3\nu = 2p_1 + 2p_2 + 2(\psi + \psi') = 6\mu$$

kontrolliert werden kann.

Die Zahlen der Kolonnen ψ, ψ' sind durch unmittelbare geometrische Betrachtung unter Benutzung von (1) gewonnen. Weil diese Kolonnen jedoch nur zur Bestätigung dienen, gehe ich nicht näher auf sie ein.

Die Tabelle bietet in sich eine Reihe von Kontrollen. Das Prinzip, nach welchem sie in Gruppen geteilt ist, ist ersichtlich.

29.	p_1	p_2	μ	ν	ψ	ψ'
$p_1^2 p_2^2$	0	0	4	8	4	8
$p_1^2 p_2 \mu$	0	4	4	8	4	4
$p_1^2 \mu^2$	0	4	2	4	2	0
$p_1 p_2 \mu^2$	4	4	6	12	6	4
$p_1 \mu^3$	2	6	4	8	4	0
μ^4	4	4	4	8	4	0
$p_1^2 \bar{\mu}$	0	4	2	4	2	0
$p_1 p_2 \bar{\mu}$	4	4	6	12	6	4
$p_1 \bar{\mu} \mu$	2	6	4	8	4	0
$\bar{\mu} \mu^2$	4	4	4	8	4	0
$p_1^2 \bar{p}_1$	0	0	0	0	0	0
$p_1 p_2 \bar{p}_1$	0	8	8	16	8	8
$p_2^2 \bar{p}_1$	8	0	4	8	4	0
$p_1 \bar{p}_1 \mu$	0	8	4	8	4	0
$p_2 \bar{p}_1 \mu$	8	4	8	16	8	4
$\bar{p}_1 \mu^2$	4	8	6	12	6	0
$p_1^2 \bar{\nu}_2$	0	4	2	4	2	0
$p_1 p_2 \bar{\nu}_2$	4	12	14	28	14	12
$p_2^2 \bar{\nu}_2$	8	4	6	12	6	0

	p_1	p_2	μ	ν	ψ	ψ'
$p_1 \bar{\nu}_2 \mu$	2	14	8	16	8	0
$p_2 \bar{\nu}_2 \mu$	6	14	12	24	12	4
$\bar{\nu}_2 \mu^2$	8	12	10	20	10	0
$\mu \bar{\mu}$	4	4	4	8	4	0
$\bar{\mu} \bar{p}_1$	4	8	6	12	6	0
$\bar{p}_1 \bar{p}_1$	0	16	8	16	16	0
$\bar{p}_1 \bar{p}_2$	8	8	12	24	12	8
$\bar{\mu} \bar{\nu}_2$	8	12	10	20	10	0
$\bar{p}_1 \bar{\nu}_2$	4	24	14	28	14	0
$\bar{p}_2 \bar{\nu}_2$	12	16	18	36	18	8
$\bar{\nu}_1 \bar{\nu}_2$	20	28	28	56	28	8
$\bar{\nu}_2 \bar{\nu}_2$	12	36	24	48	24	0
$\bar{\bar{\mu}} p_1$	0	4	2	4	2	0
$\bar{\bar{\mu}} \mu$	2	2	2	4	2	0
$\bar{\nu}_1 p_1$	4	4	6	12	6	4
$\bar{\nu}_1 p_2$	4	0	2	4	2	0
$\bar{\nu}_1 \mu$	6	2	4	8	4	0
$\bar{\nu}_1$	4	0	2	4	2	0

	$\bar{\mu}$	$\bar{p}_1$	$\bar{p}_2$	$\bar{\nu}_1$	$\bar{\nu}_2$
μ	2	4	4	6	6
$\bar{\nu}_1$	4	8	8	12	12

1) Schubert a. a. O. S. 219, wo p durch p_1, p' durch p_2, π durch $\psi + \psi'$, λ durch O zu ersetzen sind.

Digitized by Google

30. Die mit μ und ψ überschriebenen Kolonnen stimmen vollständig überein. Diese Erscheinung erklärt sich wie folgt: Rücken zwei konjugierte Punkte $A_1; A_2$ zusammen, so liegt innerhalb der F^2 ein sich selbst konjugierter Punkt, die Bedingung wird also von allen axialen Bündelkorrelationen vom Typus ψ befriedigt und nur von diesen (3). Die Bedingung μ geht stetig in die Bedingung ψ über.

Breslau, den 19. August 1906.

Über Fachwerke mit zyklischer Symmetrie.

Von H. Reissner in Aachen.

Im Jahre 1905 sprach Herr F. Kötter zu mir die Ansicht aus, daß die Stabspannungen in Kuppelfachwerken sich durch endliche trigonometrische Reihen darstellen lassen müßten, ohne jedoch auf den von ihm vorgestellten Weg einzugehen. Die Bestätignng dieser Ansicht ergab sich mir ungewollt, als ich ein für elastische Schalen gefundenes Integrationsverfahren auf entsprechende Fachwerke anwandte. Da der von mir eingeschlagene Weg wohl ein anderer ist als der von Herrn Kötter gemeinte, und Herr K. nicht die Absicht hat, seinen damaligen Gedanken zu verfolgen, möge das Verfahren hier beschrieben werden.

Schon Schwedler[1]) hat in seiner Arbeit über Kuppeln auf die Beziehungen, die zwischen elastischen Schalen- und Kuppelfachwerken herrschen müssen, hingewiesen, und neuerdings haben die Herren Klein und Wieghardt[2]) für das ebene Fachwerk mit Hilfe der Airyschen Spannungfunktion gezeigt, wie die partielle Differentialgleichung der ebenen Platte in eine Differenzengleichung für gewisse ebene Fachwerke übergeht, und welche Fachwerke und Belastungen dieser Differenzengleichung und ihren partikulären Lösungen entsprechen. Airysche Spannungsfunktionen für elastische Schalen und die ihnen entsprechenden Fachwerk-flechtwerke sind nun allerdings bis jetzt nicht bekannt und sollen auch hier nicht gegeben werden, aber auch die üblichen, den Kräfteplänen entsprechenden Gleichgewichtsbedingungen für die Stabkräfte an jedem Knotenpunkte eines Fachwerkes lassen sich als

1) W. Schwedler, Konstruktion der Kuppeldächer. 1877, Ernst und Korn.

2) F. Klein und H. Wieghardt, Über Spannungsflächen und reziproke Diagramme, mit besonderer Berücksichtigung der Maxwellschen Arbeiten. Arch. Math. u. Phys. 8, 1—10, 1904. K. Wieghardt, Über einen Grenzübergang der Elastizitätslehre, Habilitationsschrift. 1906.

Digitized by Google

Differenzengleichungen auffassen und unter dem Gesichtspunkte ihrer Eignung zur Integration betrachten. Da nun im allgemeinen sich nur Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten oder solche von erster Ordnung mit einer Unbekannten in geschlossener Form lösen lassen, muß man solchen Fällen nachgehen.

Ein bemerkenswertes Beispiel liefern ebene oder räumliche Fachwerke mit zyklischer Symmetrie, indem deren Gleichgewichtsbedingungen Differenzengleichungen zu zwei Ordnungsziffern vorstellen, die der Reihenfolge der Knotenpunkte auf den Ringen und den Meridianen entsprechen, und sich in vielen Fällen vollständig integrieren, zum mindesten aber auf Meridiangleichungen mit einer Ordnungsziffer zurückführen lassen.

Fachwerke mit zyklischer Symmetrie treten bei den über regelmäßigen Vielecken errichteten Kuppeln, Pyramiden- und Tonnenfachwerken auf. Herr Hertwig[1]) hat vor einiger Zeit einfache Berechnungsweisen der bei ihren Elastizitätsgleichungen vorkommenden Determinanten angegeben; hier wird ein anderer Weg zur Ausnutzung der Symmetrieverhältnisse längs der Ringe und der Regelmäßigkeit längs der Meridiane für die Auswertung der Stabspannungen beschritten.

Wendet man das nachstehend erläuterte Verfahren auf die Elastizitätsgleichungen statisch unbestimmter, zyklisch symmetrischer Fachwerke an, so findet man für gleichartig auf einem Ringe angeordnete, statisch unbestimmte Größen lauter einzelne Gleichungen mit je einer Unbekannten, für beliebig liegende ergeben sich Gleichungssätze, die nur die auf einem Meridian liegenden, statisch unbestimmten Kräfte enthalten.

Auch für diejenigen statisch bestimmten Fachwerke, deren Aufbau eine sukzessive Spannkraftbestimmung nicht gestattet, liefert das Verfahren der harmonischen Analyse Vereinfachungen.

Es möge nun an dem einfachen Beispiel eines **Tonnenfachwerkes** das Verfahren, dessen Erweiterung auf andere Fälle wohl keiner grundsätzlichen Schwierigkeit begegnet, erläutert werden.

Bezeichnet entsprechend umstehender Abb.:

n die Ordnungszahl der Knotenpunkte längs der Ringe, gezählt von einem beliebigen Meridian ab,

m diejenige längs der Meridiane,

S, D, R die Stabkräfte der Ständer, Schrägstäbe und Ringe bezw.,

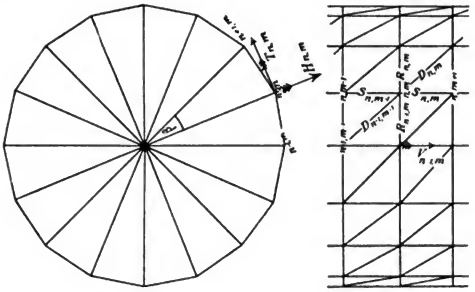
s, d, a die bezgl. Stablängen,

1) A. Hertwig, Beziehungen zwischen Symmetrie und Determinanten in einigen Aufgaben der Fachwerktheorie. Wüllner, Festschrift S. 194.

Digitized by Google

V, H, T die am Knotenpunkt angreifenden äußeren Kräfte in Richtung der Vertikalen, des Zylinderhalbmessers und der Tangente an den umschriebenen Kreis bezw.,

β den Winkel zwischen aufeinanderfolgenden Ringstäben,



so lauten die Gleichgewichtsbestimmungen für einen Knotenpunkt mit der Ordnungsziffer mn:

$$(1)\qquad \begin{cases} S_{n,m-1} - S_{nm} + \frac{s}{d}(D_{n-1,m-1} - D_{n,m}) = V_{n,m}, \\ R_{n-1,m} + R_{n,m} + \frac{a}{d}(D_{n-1,m-1} + D_{n,m}) = H_{n,m}\operatorname{cosec}\frac{\beta}{2}, \\ R_{n-1,m} - R_{n,m} + \frac{a}{d}(D_{n-1,m-1} - D_{n,m}) = T_{nm}\sec\frac{\beta}{2}. \end{cases}$$

Wir suchen zunächst die Ordnungsziffer der Meridiane n dadurch herauszuschaffen, daß wir die Spannkräfte durch eine nach Vielfachen der Sinus und Kosinus fortschreitende Reihe ausdrücken, deren Koeffizienten σ, δ, ϱ den Gleichgewichtsbedingungen (1) genügen sollen.

$$(2)\qquad \begin{cases} S_{m,n} = {}_r\Sigma(\sigma_{mr}\cos n\beta r + \sigma'_{mr}\sin n\beta r), \\ D_{m,n} = {}_r\Sigma(\delta_{mr}\cos n\beta r + \delta'_{mr}\sin n\beta r), \\ R_{mn} = {}_r\Sigma(\varrho_{mr}\cos n\beta r + \varrho'_{mr}\sin n\beta r). \end{cases}$$

Die Gesamtzahl der Glieder der nach einer anderen Meridianordnungsziffer r fortschreitenden Reihe soll gleich der Zahl $p = \frac{2\pi}{\beta}$ der Meridiane sein. Diese Ansätze genügen schon von vornherein der Bedingung des zyklischen Wiederkehrens der Werte aller Spannkräfte, insbesondere der Gleichheit der nullten und $p$ten Größen.

Digitized by Google

Damit jetzt auf beiden Seiten der Gl. (1) trigonometrische Reihen gleicher Form stehen, müssen auch die äußeren Kräfte auf den rechten Seiten der sogenannten harmonischen Analyse unterworfen werden. Mit Hilfe[1]) letzterer kann man setzen:

$$(3)\qquad \begin{cases} V_{mn} = \sum^{r} (v_{mr}\cos n\beta r + v'_{mr}\sin n\beta r), \\ \operatorname{cosec}\frac{\beta}{2}\, H_{m,n} = \sum^{r} (h_{mr}\cos n\beta r + h'_{mr}\sin n\beta r), \\ \sec\frac{\beta}{2}\, T_{mn} = \sum^{r} (t_{mr}\cos n\beta r + t'_{mr}\sin n\beta r), \end{cases}$$

wo z. B. die Koeffizienten v rechnerisch oder mechanisch aus den folgenden Ausdrücken bestimmt werden können

$$(4)\qquad v_{mr} = \frac{2}{p}\sum_{1}^{p} V_{mn}\cos n\beta r, \quad v_{m0} = \frac{1}{p}\sum_{1}^{p} V_{mn}, \quad v'_{mr} = \frac{2}{p}\sum_{1}^{p} V_{mn}\sin n\beta r.$$

In (3) und (4) hat sich die Summierung über alle Meridiane $1, 2, \ldots n, \ldots p$ zu erstrecken. Die σ, δ, ϱ können wohl als harmonisch reduzierte Stabkräfte, die v, h, t als harmonisch reduzierte äußere Kräfte bezeichnet werden.

Vor der Einsetzung dieser Reihen bilden wir zunächst durch Abziehen der dritten von der zweiten der Gl. (1) die Beziehung:

$$(1\,a)\qquad R_{nm} + \frac{a}{d}\, D_{nm} = \tfrac{1}{2}\left(H_{nm}\operatorname{cosec}\frac{\beta}{2} - T_{n,m}\sec\frac{\beta}{2}\right).$$

Gl. (1) und (1 a) sollen nun durch die Ansätze (2) und (3) in jedem Gliede der Reihen befriedigt werden. Aus Gl. (1 a) kann man dann sofort ablesen:

$$(5)\qquad \varrho_{mr} + \frac{a}{d}\,\delta_{mr} = \tfrac{1}{2}(h_{mr} - t_{mr}), \qquad \varrho'_{mr} + \frac{a}{d}\,\delta'_{mr} = \tfrac{1}{2}(h'_{mr} - t'_{mr}).$$

Um die gliedweise Zuordnung der Glieder in den anderen Gl. (1) zu ermöglichen, sind die Umformungen zu beachten:

$$\cos(n-1)\beta r = \cos n\beta r\cos\beta r + \sin n\beta r\sin\beta r,$$
$$\sin(n-1)\beta r = -\cos n\beta r\sin\beta r + \sin n\beta r\cos\beta r.$$

Die zweite der Gl. (1) liefert nun durch Gleichsetzung der Beiwerte gleicher Winkelfunktionen die beiden Gleichungen:

$$(1\,b)\qquad \begin{cases} \varrho_{m,r}(\cos\beta r + 1) - \varrho'_{m,r}\sin\beta r + \frac{a}{d}(\delta_{m-1,r}\cos\beta r - \delta'_{m-1,r}\sin\beta r + \delta_{mr}) = h_{mr} \\ \varrho'_{mr}(\cos\beta r + 1) + \varrho_{mr}\sin\beta r + \frac{a}{d}(\delta'_{m-1,r}\cos\beta r + \delta_{m-1,r}\sin\beta r + \delta'_{mr}) = h'_{mr} \end{cases}$$

1) Siehe z. B. Runge, Theorie und Praxis der Reihen, S. 147 ff., wo auch die für die Zahlenrechnung nützlichen Kunstgriffe angegeben sind.

Digitized by Google

Durch Einsetzen von (5) in (1 b) gewinnt man:

$$\cos\beta r\,(\delta_{m-1,r}-\delta_{mr})-\sin\beta r\,(\delta'_{m-1,r}-\delta'_{mr})$$
$$=\frac{d}{a}\Big[h_{mr}+\tfrac{1}{2}(h_{mr}-t_{mr})(\cos\beta r+1)-\tfrac{1}{2}(h'_{mr}-t'_{mr})\sin\beta r\Big],$$

$$\sin\beta r\,(\delta_{m-1,r}-\delta_{mr})+\cos\beta r\,(\delta'_{m-1,r}-\delta'_{mr})$$
$$=\frac{d}{a}\Big[h'_{mr}+\tfrac{1}{2}(h'_{mr}-t'_{mr})(\cos\beta r+1)+\tfrac{1}{2}(h_{mr}-t_{mr})\sin\beta r\Big].$$

Die Auflösung nach $\delta_{m-1,r}-\delta_{mr}$ und $\delta'_{m-1,r}-\delta'_{mr}$ ergibt:

$$(6)\quad\begin{cases}\delta_{m-1,r}-\delta_{mr}\\ \quad=\dfrac{d}{a}\Big[h_{mr}\cos\beta r+h'_{mr}\sin\beta r+h_{mr}-t_{mr}+\tfrac{1}{2}(h'_{mr}-t'_{mr})\sin\beta r\Big]\\ \delta'_{m-r,r}-\delta'_{mr}\\ \quad=\dfrac{d}{a}\Big[h'_{mr}\cos\beta r-h_{mr}\sin\beta r+h'_{mr}-t'_{mr}-\tfrac{1}{2}(h_{mr}-t_{mr})\sin\beta r\Big].\end{cases}$$

Die Integrale dieser beiden Differenzengleichungen erster Ordnung können wir, wenn die beiden rechten Seiten von (6) mit $-u_{mr}$ bezw. $-u'_{mr}$ bezeichnet werden, sofort hinschreiben, als

$$(7)\qquad \delta_{mr}=\delta_{0r}+k\sum_{1}^{m}u_{kr},\qquad \delta'_{mr}=\delta'_{0r}+k\sum_{1}^{m}u'_{kr}$$

da man ja zum Werte der $m$ten Unbekannten gelangen muß, wenn man die ersten m Differenzen addiert.

Mit den Diagonalenspannkräften D_{0n} im nullten Feld und den äußeren Kräften lassen sich also die Diagonalenspannkräfte in jedem anderen Feld und aus Gl. (5) auch die Ringspannkräfte in geschlossener Form hinschreiben. Die δ_{0r} und δ'_{0r} sind nämlich aus den D_{0n} durch die folgenden Summenbildungen zu ermitteln:

$$(2\,a)\quad\begin{cases}\delta_{0r}=\dfrac{2}{p}\,n\sum_{1}^{p}D_{0n}\cos n\beta r,\quad \delta_{00}=\dfrac{1}{p}\,n\sum_{1}^{p}D_{0n},\\ \delta'_{0r}=\dfrac{2}{p}\,n\sum_{1}^{p}D_{0n}\sin n\beta r.\end{cases}$$

Zur Auswertung der Ständerkräfte S wenden wir das Verfahren der trigonometrischen Reihe auf die erste der Gl. (1) an und erhalten nach Gleichsetzung entsprechender Glieder:

$$(1\,c)\quad\begin{cases}\sigma_{m-1,r}-\sigma_{m,r}=v_{mr}-\dfrac{s}{d}\,(\delta_{m-1,r}\cos\beta r-\delta'_{m-1,r}\sin\beta r-\delta_{mr})\\ \sigma'_{m-1,r}-\sigma'_{m,r}=v'_{mr}-\dfrac{s}{d}\,(\delta'_{m-1,r}\cos\beta r+\delta_{m-1,r}\sin\beta r-\delta'_{mr}).\end{cases}$$

Digitized by Google

Setzt man die als bekannt anzusehenden rechten Seiten gleich $-w_{mr}$ und $-w'_{mr}$ bezw., so kann man analog Gl. (7) schließlich folgern:

$$(8) \qquad \sigma_{mr} = \sigma_{or} + k\sum_{1}^{m} w_{kr}, \qquad \sigma'_{mr} = \sigma'_{or} + k\sum_{1}^{m} w'_{kr},$$

so daß die Aufgabe als gelöst zu betrachten ist, wenn alle äußeren Kräfte im nullten Feld gegeben sind, wie das z. B. bei einem oben offenen Zylinderfachwerk mit $\sigma_{0r} = \sigma'_{0r} = \delta_{0r} = \delta'_{0r} = 0$ der Fall ist.

Es soll nun nicht verschwiegen werden, daß die Berechnung des obigen Systems auch nach den üblichen Verfahren sehr einfach ist, umständlicher immerhin aber würde die Spannungsbedingung werden, wenn wir das oben offene p eckige Zylinderfachwerk durch eine p-stäbige Pyramide schließen und dafür $p-3$ Diagonalen oder Auflagerkräfte im untersten Feld herausnehmen. Die bisher angewandte, zweckmäßigste Methode für solche Fälle ist die Müller-Breslausche der Rückverwandlung durch simultane Stabvertauschung, bei der sich das Problem auf $p-3$ Ersatzstabgleichungen zusammenzieht, und die natürlich irgendwelcher Symmetrieverhältnisse nicht bedarf.[1]) Für das gewählte zyklisch symmetrische Beispiel jedoch scheint die geschlossene Form unserer Lösung Vorteile zu bieten.

System von verschlungener Bauart. — Die Anordnung bleibt bekanntlich statisch bestimmt und starr. Beginnen wir die Ringe von unten zu zählen, so sind die harmonisch reduzierten Diagonalkräfte δ_{or} und δ'_{or} durch die drei stehen gebliebenen Diagonalen D_{0i}, D_{0k}, D_{0l} bestimmt, also nach (2a)

$$\delta_{0r} = \frac{2}{p}\,(D_{0i}\cos i\beta r + D_{0k}\cos k\beta r + D_{0l}\cos l\beta r),$$

$$\delta_{00} = \frac{1}{p}\,(D_{0i} + D_{0k} + D_{0l}),$$

$$\delta'_{0r} = \frac{2}{p}\,(D_{0i}\sin i\beta r + D_{0k}\sin k\beta r + D_{0l}\sin l\beta r).$$

Die Werte von D_{0i}, D_{0k}, D_{0l} kann man aus den Gleichgewichtsbedingungen für sämtliche am ganzen Tragwerk angreifenden wagerechten, den Ringebenen parallelen Kräfte finden.

Faßt man andererseits die an den Knotenpunkten des obersten Ringes angreifenden harmonisch reduzierten Pyramidenstabkräfte als

---

1) Die Bezeichnung „simultanes Ersatzstabverfahren" ist hier gegenüber dem sukzessiven Ersatzstabverfahren" Hennebergs gewählt.

Digitized by Google

äußere unbekannte, unter dem Winkel γ zur Senkrechten angreifende Kräfte x_r bezw. x'_r auf, so ergibt sich aus (7) und (6)

$$0 = \delta_{0r} + \varkappa \sum_1^m u_{kr} - \frac{d}{a} \sin\gamma \left[x_r (\cos\beta r + 1) + x'_r \tfrac{s}{2} \sin\beta r \right],$$

$$0 = \delta'_{0r} + \varkappa \sum_1^m u'_{kr} - \frac{d}{a} \sin\gamma \left[x'_r (\cos\beta r + 1) - x_r \tfrac{s}{2} \sin\beta r \right].$$

Auf diese Weise hat man demnach **nur 2 Gleichungen, mit den 2 Unbekannten** x_r und x'_r aufzulösen, um die Pyramidenstabkräfte X_n wiederum aus der Formel zu gewinnen

$$X_n = {}^r\Sigma (x_r \cos n\beta r + x'_r \sin n\beta r).$$

Statisch unbestimmte Kräfte. — Auf den Knotenpunkten je eines z. B. des m^{ten} Ringes sei eine Gruppe von gleichartigen, statisch unbestimmten Kräften $X_{m,n}$ verteilt, jede Gruppe auf einem Ring. Es braucht aber nicht an jedem Knotenpunkt eines Ringes eine Kraft der Gruppe anzugreifen. Man führe nach dem oben auseinandergesetzten Verfahren einen neuen Satz von statisch unbestimmten Kräften durch den Ansatz nach Gl. (3) und (4) ein:

$$(2\,\text{b}) \qquad \begin{cases} x_{mr} = \frac{2}{p} {}^n\Sigma_0^p X_{mn} \cos n\beta r, \quad x_{0r} = \frac{1}{p} {}^n\Sigma_1^p X_{mn} \\ x'_{mr} = \frac{2}{p} {}^n\Sigma_0^p X_{mn} \sin n\beta r. \end{cases}$$

Nun entspricht dem Zustand $x_{mr} = -1$ und alle anderen x_{ms} und $x_{ms} = 0$ der Fall einer Kräfteverteilung

$$X_{mn} = -1 \cdot \cos n\beta r,$$

und infolge dieses Zustandes entstehen Stabkräfte von der Größe

$$S_{mn}^{m_1 r} = \sigma_{mr}^{m_1} \cos n\beta r,$$

wo die unteren Ordnungsziffern die Lage des Stabes, die oberen die Ringziffer der statisch unbestimmten Kraft angeben.

Entsprechend werden am besten als äußere Kräfte die Meridiansummen der harmonisch reduzierten Kräfte nach Gl. (4) ${}^m\Sigma v_{mr}$ eingeführt und die infolge einer derselben im statisch bestimmten Hauptsystem entstehenden Stabkräfte bezeichnet mit

$$S_{mn}^{r\,0} = \sigma_{mr}^{0} \cos n\beta r.$$

Analoge Werte mit dem $\sin n\beta r$ gelten für die Zustände $x'_{mr} = -1$.

Digitized by Google

Die Produkte der Kräfte eines Stabes infolge zweier Zustände $x_{m_1 r} = -1$ und $x_{m_2 s} = -1$ werden:

$$S^{m_1 r}_{m n} S^{m_2 s}_{m n} = \sigma^{m_1}_{m r} \sigma^{m_2}_{m s} \cos n\beta r \cos n\beta s.$$

Das Produkt zweier Kräfte eines und desselben Stabes infolge der harmonisch reduzierten äußeren Kräfte bezw. infolge der harmonisch reduzierten statisch unbestimmten Kräfte erscheint in der Form:

$$S^{r0}_{m n} \cdot S^{m_2 s}_{m n} = \sigma^{0}_{m r} \sigma^{m_2}_{m s} \cos n\beta r \cos n\beta s$$

Die Koeffizienten der Elastizitätsgleichungen[1]) lauten:

$$\sum S^{m_1 r}_{m n} S^{m_2 s}_{m n} \frac{s_m}{EF} = m \sum \sigma^{m_1}_{m r} \sigma^{m_2}_{m s} \frac{s_m}{EF} n \sum \cos n\beta r \cos n\beta s.$$

Die rechten Seiten derselben Gleichung haben die Form:

$$\sum S^{r0}_{m n} S^{m_2 s}_{m n} \frac{s_m}{EF} = m \sum \sigma^{0}_{m r} \sigma^{m_2}_{m s} \frac{s_m}{EF} n \sum \cos n\beta r \cos n\beta s$$

mit gleichlaufenden Ausdrücken für die $\sin n\beta r$. Die Summe über n auf der rechten Seite wird aber gleich Null für r ungleich s und gleich $\frac{p}{2}$ für $r = s$, also:

$$\sum S^{m_1 r}_{m n} S^{m_2 s}_{m n} \frac{s_m}{EF} = 0, \qquad r \gtrless s$$

$$\sum S^{m_1 r}_{m n} S^{m_2 r}_{m n} \frac{s_m}{EF} = \frac{p}{2} \sum \sigma^{m_1}_{m r} \sigma^{m_2}_{m r} \frac{s_m}{EF} = \frac{p}{2} \delta^{r m_1 m_2}, \qquad r = s$$

$$\sum S^{r0}_{m n} S^{m_2 s}_{m n} \frac{s_m}{EF} = 0, \qquad r \gtrless s$$

$$\sum S^{r0}_{m n} S^{m_2 r}_{m n} \frac{s_m}{EF} = \frac{p}{2} m \sum \sigma^{0}_{m r} \sigma^{m_2}_{m r} \frac{s_m}{EF} = \frac{p}{2} \delta^{r 0 m_2}, \qquad r = s.$$

Es werden also alle Koeffizienten, die zwei statisch unbestimmten Kräften $x_{m_1 r}$ und $x_{m_2 s}$ auf verschiedenen Meridianen entsprechen, gleich Null und die Elastizitätsgleichungen, die in jeder Gleichung sich dann nur auf *einen* Meridian beziehen, lauten

$$m \sum \left(x_{m r} \delta^{r m m_1} + x'_{m r} \delta^{' r m m_1} \right) = \delta^{r 0 m_1}.$$

Sind nur in einem Ring statisch unbestimmte Größen vorhanden, so erhält man für jede derselben nur eine Gleichung, eine Erleichterung, die bekanntlich auch durch mehrere andere Verfahren der Statik der Baukonstruktionen von Krohn, Mohr, Müller-Breslau und S. Müller angestrebt worden ist.[2])

1) Müller-Breslau, Statik der Baukonstruktionen, Bd. II, Abt. 1, S. 35.

2) Müller-Breslau, Bd. II, ebendort S. 153. S. Müller, Zentralblatt der Bauverwaltung 1907 S. 23.

Digitized by Google

In manchen Fällen wird man auch bei statischer Unbestimmtheit an verschiedenen Ringen bequeme Differenzengleichungen aufstellen können, wenn man statt der Bestimmungsgleichungen der statisch unbestimmten Größen die jenen zugrunde liegenden, ursprünglichen geometrischen Bedingungen zwischen Längenänderungen der Stäbe und Knotenpunktsverschiebungen ansetzt.[1]) Wie jedes Sonderverfahren wird auch das im Vorhergehenden auseinandergesetzte nur für ein gewisses Gebiet von Sonderfällen nützlich sein, voraussichtlich für diejenigen Fachwerke, die mit einer gewissen Regelmäßigkeit der Winkel und Stablängen aufgebaut sind. Ja man sollte in Anbetracht der Sprödigkeit räumlicher Fachwerkaufgaben sogar suchen, neue der Differenzenrechnung besonders fügsame Anordnungen mit guten baulichen Eigenschaften aufzufinden.

Einige Reihenentwicklungen für π.

Von Rudolf Lohnstein in Berlin.

Vor einigen Jahren hat Glaisher[2]) einen Weg angegeben, gewisse langsam konvergierende Reihen in schneller konvergierende umzuwandeln; er hat auf diese Weise speziell für π und π^2 einige rasch konvergierende Ausdrücke hergeleitet. Ein Teil der von ihm angegebenen Reihen läßt sich auf einem einfacheren Wege gewinnen, welcher zu noch mehr derartigen, und zwar rascher konvergierenden Reihen führt, weswegen ich in folgendem in Kürze darauf eingehen möchte. Das Hilfsmittel, welches der Methode zugrunde liegt, besteht in der Partialbruchzerlegung reziproker ganzer rationaler Funktionen. Aus den nachfolgenden Beispielen ist das Prinzip der Methode leicht ersichtlich.

1. Die Funktion

$$f_i(n) = \frac{1}{(n^2-1)(n^2-4)\cdots(n^2-i^2)},$$

wo i eine ganze Zahl, läßt sich auf die Form

$$f_i(n) = a_1\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) + a_2\left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n+2}\right) + \cdots + a_i\left(\frac{1}{n-i} - \frac{1}{n+i}\right)$$

bringen. Bildet man nun $\sum f_i(n)$, wo n die durch 4 teilbaren Zahlen $> i$ durchläuft, so wird

$$\sum_{n=4k,\ i<4k<\infty} f_i(n) = a_1\sum\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) + \cdots + a_i\sum\left(\frac{1}{n-i} - \frac{1}{n+i}\right),$$

1) Müller-Breslau, Statik der Baukonstruktionen, Bd. II, Abt. 1, S. 4, Gl. 7.
2) Quarterly Journal. Bd. 34.

Digitized by Google

und man erkennt, daß die als Faktoren der $a_1, a_2, \cdots, a_i$ auftretenden Summen sich abwechselnd durch $\frac{\pi}{4}$ und durch rationale Zahlen ausdrücken lassen. Demnach erhält man allgemein eine Gleichung von der Form

$$\sum_{n=4k,\ i<4k<\infty} f_i(n) = A_i + B_i \frac{\pi}{4}, \tag{1}$$

oder

$$\pi = p_i + q_i \sum_{n=4k,\ i<4k<\infty} \frac{1}{(n^2-1)(n^2-4)\cdots(n^2-i^2)}, \tag{2}$$

wo p_i, q_i rationale Zahlen bedeuten.

Für $i = 2$ erhält man so

$$\pi = 3 + 24 \sum_{n=4,8,12,\ldots} \frac{1}{(n^2-1)(n^2-4)}, \tag{3}$$

oder

$$\pi = 3 + 6 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2-1)(16k^2-1)}. \tag{4}$$

Für $i = 3$ ergibt sich ebenso

$$\pi = \frac{10}{3} - 60 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2-1)(16k^2-1)(16k^2-9)}. \tag{5}$$

Beschränkt man sich in (5) auf das erste Glied der Summe (bis $k = 1$), so erhält man für π den bekannten Näherungswert $\frac{22}{7}$.

Für $i = 4$ erhält man

$$\pi = \frac{1759}{560} + \frac{315}{4} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k^2-1)(4k^2-1)(16k^2-1)(16k^2-9)}, \tag{6}$$

oder

$$\pi = \frac{1759}{560} + \frac{315}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)(2k+1)(2k+3)(4k+1)(4k+3)(4k+5)(4k+7)}. \tag{6a}$$

Für $i = 5$ ergibt sich

$$\pi = 3\,\frac{179}{1260} - 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 \sum_{n=8,12,16,\cdots\infty} \frac{1}{(n^2-1)(n^2-4)(n^2-9)(n^2-16)(n^2-25)} \tag{7}$$

oder

$$\pi = 3\,\frac{179}{1260} - 3^4 \cdot 5 \cdot 7 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)(2k+1)(2k+3)(4k-1)(4k+1)(4k+3)(4k+5)(4k+7)(4k+9)}. \tag{7a}$$

Digitized by Google

Ähnliche Ausdrücke ergeben sich, wenn man in $\Sigma f_i(n)$ die Zahl n die Werte $4k+2\,(i<4k+2<\infty)$ durchlaufen läßt. Man erhält dann für $i=2$:

$$(8)\qquad \pi = 3^1/_6 - \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(4k+1)(4k+3)},$$

für $i=3$:

$$(9)\qquad \pi = 3^3/_{15} + 15\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(4k-1)(4k+1)(4k+3)(4k+5)},$$

für $i=4$:

$$(10)\quad \pi = 3^3/_{20} - \frac{5\cdot 7\cdot 9}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(2k-1)(2k+3)(4k-1)(4k+1)(4k+3)(4k+5)},$$

für $i=5$:

$$(11)\quad \pi = 3^4/_{35} + 3^4\cdot 5\cdot 7\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(2k-1)(2k+3)(4k-3)(4k-1)(4k+1)(4k+3)(4k+5)(4k+7)}.$$

2. Es sei

$$f_i(n) = \frac{1}{n^2(n^2-1)(n^2-4)(n^2-9)\cdots(n^2-i^2)},$$

wo i eine ganze positive Zahl, dann ist

$$f_i(n) = \frac{b_0}{n^2} + b_1\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) + \cdots + b_i\left(\frac{1}{n-i} - \frac{1}{n+i}\right).$$

Hieraus ergibt sich, wenn man beiderseits die Summe von $n=i+1$ bis ∞ nimmt, eine Gleichung von der Form

$$(1)\qquad \pi^2 = p_i + q_i\sum_{n=i+1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n^2-1)(n^2-4)\cdots(n^2-i^2)},$$

wo p_i, q_i rationale Zahlen darstellen. — Ähnliche Gleichungen erhält man, wenn man n entweder über alle ungeraden oder alle geraden Zahlen $>i$ summiert.

Für $i=1$ ergeben sich auf diese Weise folgende drei Gleichungen:

$$(2a)\qquad \pi^2 = 10^1/_2 - 6\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)^2(k+2)},$$

$$(2b)\qquad \pi^2 = 10 - 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(2k+1)^2},$$

$$(2c)\qquad \pi^2 = 12 - 6\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2(4k^2-1)}.$$

Digitized by Google

Für $i = 2$ erhält man:

$$(3a) \qquad \pi^2 = \frac{235}{24} + 24 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)^2(k+3)(k+4)},$$

$$(3b) \qquad \pi^2 = \frac{88}{9} + 8 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(2k-1)(2k+1)^2(2k+3)},$$

$$(3c) \qquad \pi^2 = \frac{59}{6} + 6 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)^2(k+2)(2k+1)(2k+3)}.$$

Für $i = 3$ erhält man

$$(4a) \quad \pi^2 = \frac{5929}{600} - 216 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)^2(k+4)(k+5)(k+6)},$$

$$(4b) \quad \pi^2 = \frac{2221}{225} - 18 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)(2k+1)(2k+3)^2(2k+5)},$$

$$(4c) \quad \pi^2 = \frac{1487}{150} - 54 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)^2(k+2)(2k-1)(2k+1)(2k+3)(2k+5)}.$$

Für $i = 4$ ergibt sich in gleicher Weise

$$(5a) \quad \pi^2 = \frac{1160419}{117600}$$
$$+ 2^7 \cdot 3^3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)^2(k+5)(k+6)(k+7)(k+8)},$$

$$(5b) \quad \pi^2 = \frac{108784}{11025}$$
$$+ 2^5 \cdot 3^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)(2k-1)(2k+1)(2k+3)^2(2k+5)(2k+7)},$$

$$(5c) \quad \pi^2 = \frac{290147}{29400}$$
$$+ 2^3 \cdot 3^3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)^2(k+3)(k+4)(2k+1)(2k+3)(2k+5)(2k+7)}.$$

3. Es ist

$$\frac{1}{(n^2-1)^3 n^2} = \frac{1}{8}\frac{1}{(n-1)^3} - \frac{7}{16}\frac{1}{(n-1)^2}$$
$$+ \frac{15}{16}\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{8}\frac{1}{(n+1)^3} - \frac{7}{16}\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{15}{16}\frac{1}{n+1}.$$

Summiert man von $n = 2$ bis ∞, so erhält man hieraus

$$(1) \quad \pi^2 = 9^9/_{10} - \frac{16}{5} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2(n^2-1)^3} = 9^9/_{10} - \frac{16}{5} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)^3(k+2)^3}.$$

Digitized by Google

Summiert man nur über die geraden Zahlen, so ergibt sich

$$\pi^2 = \frac{288}{29} - \frac{48}{29}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(4k^2-1)^2}. \tag{2}$$

Summiert man über die ungeraden Zahlen, so erhält man

$$\pi^2 = \frac{306}{31} - \frac{3}{31}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(2k+1)^2(k+1)^2}. \tag{3}$$

Wenn man ferner die Funktion

$$f(n) = \frac{1}{n^2(n^2-1)^2(n^2-4)^2}$$

in Partialbrüche zerlegt, so erhält man

$$\begin{aligned} f(n) = {} & \frac{4}{4\cdot 12^2}\left(\frac{1}{(n-2)^2} - \frac{1}{(n+2)^2}\right) - \frac{23}{16\cdot 12^2}\left(\frac{1}{(n-2)^2} + \frac{1}{(n+2)^2}\right) \\ & + \frac{445}{96\cdot 12^2}\left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n+2}\right) - \frac{1}{6^2}\left(\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \\ & + \frac{1}{4\cdot 6^2}\left(\frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2}\right) - \frac{25}{6^4}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{64}\frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

Bildet man nun $\sum f(n)$ entweder von $n=3$ bis ∞, oder summiert man nur über alle ungeraden Zahlen von $n=3$ an oder über alle geraden Zahlen von $n=4$ an, so erhält man wieder drei Gleichungen für π^2, nämlich:

$$\pi^2 = \frac{54715}{5544} + \frac{2^{11}\cdot 3^4}{770}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)^2(k+2)^2(k+3)^2(k+4)^2}, \tag{4}$$

$$\pi^2 = \frac{68480}{6939} + \frac{2^6\cdot 3^3}{257}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)^2(2k-1)^2(2k+1)^2(2k+3)^2}, \tag{5}$$

$$\pi^2 = \frac{136615}{13842} + \frac{2^4\cdot 3^4}{769}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)^2(k+2)^2(2k+1)^2(2k+3)^2}. \tag{6}$$

Der Ausdruck (6) konvergiert sehr rasch; nimmt man nur zwei Glieder der Summe (bis $k=2$), so erhält man π^2 schon auf zehn Dezimalstellen richtig.

4. Die Partialbruchzerlegung der Funktion $\frac{1}{n^2(n+1)^2}$ führt auf die Gleichung

$$\pi^2 = 10 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)^2}. \tag{1}$$

Digitized by Google

In ähnlicher Weise findet man:

$$(2) \qquad \pi^2 = 10\tfrac{1}{2} - 16\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)^2} = 10\tfrac{1}{2} - 16\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2(k+2)^2},$$

$$(3) \qquad \pi^2 = 10\tfrac{2}{3} - \frac{64}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(4k^2-1)^2}.$$

5. Es ist

$$\frac{1}{n^2(n^2-1)^2} = \frac{1}{n^4} + \frac{\frac{1}{4}}{(n-1)^2} - \frac{\frac{3}{4}}{n-1} + \frac{\frac{1}{4}}{(n+1)^2} + \frac{\frac{3}{4}}{n+1}.$$

Bildet man die Summe über $n = 2, 6, 10, \ldots$, so erhält man:

$$(1) \qquad \pi^2 - 3\pi = 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2(4k-3)^2(4k-1)^2}.$$

Begnügt man sich auf der rechten Seite mit dem ersten Glied der Summe, so erhält man für π die näherungsweise gültige quadratische Gleichung:

$$\pi^2 - 3\pi = \frac{4}{9}, \quad \text{also} \quad \pi = \frac{3}{2} + \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = 3{,}141476.$$

Hieraus kann man eine sehr einfache Näherungskonstruktion des Kreisumfanges herleiten, welche für viele praktische Zwecke hinreichend genau sein dürfte.

Summiert man $\frac{1}{n^2(n^2-1)^2}$ über alle geraden Zahlen, so erhält man:

$$(2) \qquad \frac{5\pi^2}{48} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2(4k^2-1)^2}$$

oder

$$\pi^2 = 9\tfrac{3}{5} + \frac{12}{5}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2(4k^2-1)^2}.$$

Summiert man über alle durch 4 teilbaren Zahlen, so ergibt sich:

$$(3) \qquad \frac{2\pi^2}{3} + 3\pi = 16 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2(16k^2-1)^2}.$$

Summiert man $\frac{1}{n^2(n^2-1)^2}$ über alle Zahlen von 2 bis ∞, so ergibt sich

$$(4) \qquad \pi^2 = 9\tfrac{3}{4} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2(k+1)^2(k+2)^2}.$$

Summiert man $\frac{1}{n^2(n^2-1)^2}$ über alle ungeraden Zahlen von 3 an, so ergibt sich

$$(5) \qquad \pi^2 = 9\tfrac{6}{7} + \frac{3}{7}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2(k+1)^2(2k+1)^2}.$$

Digitized by Google

6. Zum Schluß seien noch einige einfache Reihen angeführt, welche sich in ähnlicher Weise ergeben:

$$(1) \qquad \pi^2 = 8 + 16\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2-1)^2},$$

$$(2) \qquad \pi^2 = 9 + 3\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)^2},$$

$$(3) \qquad \pi^2 = 8\tfrac{1}{4} + 12\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+2)^2},$$

$$(4) \qquad \pi^2 + 2\pi = 16 + 32\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(16k^2-1^2)^2},$$

$$(5) \qquad \pi = 4 + 8\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(4k^2-1)^2},$$

oder

$$(6) \qquad \pi = 3\tfrac{1}{9} + 64\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k-1)^2(4k+1)(4k+3)^2},$$

$$(7) \qquad \pi^2 = \frac{1105}{112} + \frac{2^6\cdot 3^2}{5\cdot 7}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{[k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)]^2},$$

$$(8) \qquad \pi^2 = \frac{720}{73} + \frac{2^4\cdot 3^2}{73}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{[k(k+1)(2k-1)(2k+1)(2k+3)]^2},$$

$$(9) \qquad \pi^2 = \frac{2645}{268} + \frac{2^2\cdot 3^2}{67}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{[k(k+1)(k+2)(2k+1)(2k+3)]^2}.$$

Die Gleichungen (7), (8), (9) ergeben sich aus der Summation der Funktion $\frac{1}{n^2(n^2-1)^2(n^2-4)^2}$, und zwar, je nachdem man n alle Zahlen >2, oder nur die ungeraden, oder nur die geraden Zahlen durchlaufen läßt.

Berlin, im Oktober 1907.

Digitized by Google

Rezensionen.

Encyklopädie der Elementar-Mathematik von Heinrich Weber und Josef Wellstein. 3. Band: Angewandte Elementar-Mathematik bearbeitet von Heinrich Weber, Josef Wellstein und Rudolf H. Weber. Mit 358 Figuren im Text. XIII u. 666 S. gr. 8. Leipzig 1907, B. G. Teubner. Geb. ℳ 14,—.

Der vorliegende dritte Band der „Encyklopädie der Elementar-Mathematik" hat wesentlich den Zweck, aus Naturwissenschaften Anwendungen zu den arithmetischen und geometrischen Grundlagen zu liefern, die die beiden ersten Bände geschaffen haben. Der Band zerfällt in folgende Bücher:

Mechanik (Vektorgeometrie von Josef Wellstein, Analytische Statik und Dynamik von Rudolf H. Weber).

Elektrische und magnetische Kraftlinien von Rudolf H. Weber (Elektrizität, Magnetismus, Elektromagnetismus).

Maxima und Minima von Heinrich Weber (Geometrische Maxima und Minima, Anwendung der Lehre vom Größten und Kleinsten auf die Lehre vom Gleichgewicht und besonders der Kapillarität).

Wahrscheinlichkeitsrechnung von Heinrich Weber (einschl. Ausgleichung der Beobachtungsfehler).

Graphik von Josef Wellstein (Darstellende Geometrie, Graphische Statik und das ebene Fachwerk).

Dieser dritte Band der „Encyklopädie" ist bestimmt für Mathematiker, die sich mit den wichtigsten Anwendungen der Mathematik vertraut machen wollen. Demgemäß ist die reichhaltige Auswahl getroffen, und es sind tatsächlich die für den Mathematiker interessantesten Anwendungen behandelt. Es ist hierbei weniger Wert auf eine möglichst vollständige Untersuchung der einzelnen Gebiete gelegt, als darauf, dem Leser einen Überblick zu verschaffen und vor allem die Grundbegriffe klar zu legen. In dieser Richtung, in der geradezu wunderbaren Klarheit und Strenge in der Entwickelung der Grundbegriffe, möchte das Schwergewicht des ganzen Buches zu suchen sein. Die Darstellung ist hierbei durchweg eine elementare und sind alle Integrationen vermieden. Infolge davon mußte vielfach eine Beschränkung des Stoffes eintreten. So konnte in der Mechanik das Prinzip von d'Alembert nicht entwickelt werden. Hervorzuheben ist dagegen der ganze systematische Aufbau der Mechanik von den einfachsten Annahmen aus, die scharfe und klare und sonst so schwierige Einführung in die Grundbegriffe: Kraft, Geschwindigkeit, Arbeit, die Herleitung des Energieprinzipes usw. An Anwendungen aus der Mechanik werden behandelt zunächst die Keplerschen Gesetze auf Grund

Digitized by Google

von einfachen, elementaren Betrachtungen, sodann der freie Fall, die Wurfbewegung und das mathematische Pendel und der Carnotsche Kreisprozeß. An die eigentliche Mechanik schließt sich dann ein längerer Abschnitt über Elektrizität, Magnetismus und Elektromagnetismus, in dem diese Kapitel behandelt sind, soweit sich dieses mit Hilfe der Theorie der Kraftlinien und mit elementaren Mitteln machen läßt.

Die Abschnitte über Maxima und Minima und Wahrscheinlichkeitsrechnung, die dem Referenten ferner liegen, mögen hier übergangen werden.

Das letzte Buch „Graphik" wird eingeleitet durch die darstellende Geometrie. Es werden die allgemeinen Methoden und Sätze der Zentralprojektion, der Parallelprojektion und Axonometrie auf eine und auf zwei Projektionsebenen entwickelt und die Grundaufgaben gelöst. Im übrigen beschränkt sich die Untersuchung wesentlich auf die Darstellung von ebenen Figuren, wobei jedoch die Eigenschaften der Hauptlinien und die affinen Beziehungen zwischen Umklappung und Bild usw. entwickelt und für die Konstruktionen verwertet werden.

Hervorzuheben ist der Abschnitt über graphische Statik und das ebene Fachwerk: Der Verfasser geht hauptsächlich auf die interessanten mathematischen Fragen ein, die der Fachwerkstheorie zugrunde liegen. Dieselben werden mit großer Ausführlichkeit und sehr elegant behandelt. So wird die Stabilität der ebenen Fachwerke untersucht, ferner werden die verschiedenen Methoden für die Bestimmung der Spannungen entwickelt. Bei den allgemeinen Betrachtungen schließt sich der Verfasser wesentlich an Schur an. Die Beweisführung ist jedoch in vieler Beziehung originell. So werden die betreffenden Sätze nicht wie bei Schur aus dem Nullsystem, sondern lediglich aus der Betrachtung der ebenen Fachwerksfigur hergeleitet. Abgesehen davon, daß der Verfasser dadurch den elementaren Charakter der ganzen Untersuchung wahren wollte, findet der Referent hierin insofern eher einen Vorzug, als es ihm unnatürlich erscheint, ohne ganz triftige Gründe, Sätze, die sich auf ebene Figuren beziehen, durch räumliche Betrachtungen herzuleiten.

Das ganz vorzügliche Buch wird jedem Mathematiker hoch willkommen sein.

Darmstadt. L. Henneberg.

W. H. Young und **Grace Chisholm Young.** **The theory of sets of points.** XII u. 316 S. Cambridge 1906.

Die von Herrn H. W. Young zusammen mit seiner Frau, Frau Dr. Grace Chisholm Young herausgegebene Schrift stellt das erste ausführlichere Lehrbuch über die Theorie der Punktmengen dar. In gewisser Hinsicht konnte auch der unlängst von mir veröffentlichte Bericht als erster Versuch einer gedrängten lehrbuchartigen Darstellung gelten. Seitdem sind sieben Jahre vergangen, und die Theorie der Punktmengen hat mancherlei Fortschritte erfahren. Es gereicht mir daher zu besonderer Genugtuung, daß gewisse methodische Hilfsmittel der Beweisführung und der Darstellung, die ich in meinem Bericht angewandt habe, und deren Ausgestaltung eine meiner wesentlichen Leistungen bildete, zu einem erheblichen Teil in das Youngsche Werk übergegangen sind. Es enthält aber darüber hinaus alle wesentlichen Fortschritte, die im Gebiet der allgemeinen Punktmengentheorie inzwischen gemacht worden sind, sowohl die neueren Resultate wie auch die kürzeren Beweise der älteren wichtigeren

Digitized by Google

Theoreme. An einigen von ihnen ist Herr H. W. Young bekanntlich selbst beteiligt.

Ein Vorzug des Buches besteht in seiner Ausführlichkeit, seiner großen Zahl von Beispielen und anschaulichen Figuren; hier ist des Guten beinahe etwas zu viel getan. Eine Eigenart besteht ferner in der Einführung einer Reihe neuer, mehr oder weniger treffender Bezeichnungen. Im Gegensatz zu „abgeschlossen" bedienen sich die Verfasser schon längere Zeit der Bezeichnung „offen"; die perfekte Restmenge, die bei der Analyse einer abgeschlossenen Menge zuletzt übrig bleibt, nennen sie ihren „nucleus"; die aus den gemeinsamen Elementen unendlich vieler Mengen $\{\mathfrak{M}_\nu\}$ gebildete Menge, die Cantor ihren größten Divisor nannte, nennen sie „deducted", usw. Eine neue Bezeichnung haben sie auch für die oft auftretende Mengengattung eingeführt, die ich in meinem Bericht als Borelsche Mengen bezeichnet habe. Sie nennen sie innere Grenzmengen. Herr Young hat sich mit ihnen bekanntlich mehrfach beschäftigt, die über sie bekannten Resultate wiederholt abgeleitet, und den Satz hinzugefügt, daß sie endlich oder abzählbar sind, oder aber die Mächtigkeit des Kontinuums besitzen. In der Einführung dieser Mengen als besonderer Gattung unter Benutzung einer besonderen Bezeichnung steckt im übrigen keinerlei neuer Gedanke. Ihre wesentlichen Eigenschaften sind — bis auf den eben erwähnten Satz — auch sonst schon dargestellt worden, insbesondere auch in meinem Bericht.

Die Verfasser haben die Cantorschen Ordnungszahlen nur flüchtig gestreift; sie erscheinen erst nach der Ableitung der Punktmengensätze. Dem Leser bleibt also verborgen, wieso ihre Einführung in historischer Hinsicht die Grundlage war, auf die sich die ganze Cantorsche Punktmengentheorie aufgebaut hat, und daß sie schon deshalb eine hohe Bedeutung besitzen. Diese Kenntnis möchte ich meinerseits dem Leser nicht vorenthalten sehen. Andererseits geben die Verfasser auch diejenige Analyse der Punktmengen, die wir Cantor und Bendixson verdanken, und die in dem von ν auf $\nu + 1$ und von $\{\nu\}$ auf ω ausdehnbaren Abspaltungsprozeß wurzelt. Ihre Beweise können dagegen nur mit dem Schluß von ν auf $\nu + 1$ und einem „usw." operiren. Dies ist ein Weg, auf dem ich den Verfassern nicht zu folgen vermag. Meines Erachtens schulden wir Cantor gerade die Erkenntnis, daß dieses „usw" ein der Klärung bedürftiges Verfahren ist, und daß die Ausdehnbarkeit eines Prozesses von $\{\nu\}$ auf ω des Beweises bedarf. Zudem handelt es sich hier teilweise um Begriffe, deren Inhalt ohne Benutzung der transfiniten Operationen gar nicht definierbar ist.

Eine sehr ausführliche Darstellung ist auch den Sätzen über den Inhaltsbegriff gewidmet, sowohl für lineare, wie für ebene Mengen, unter Berücksichtigung aller der Definitionen, mit denen uns die neuere Entwicklung bedacht hat. Hier haben die Verfasser auch mancherlei eigene Beiträge einfügen können.

Nicht ganz einverstanden bin ich mit denjenigen Teilen des Buches, die die Analyse der eigentlichen geometrischen Gebilde betreffen. (S. 177 ff.) Die Verfasser haben hier im wesentlichen die Dinge zur Sprache gebracht, die in meinen Beiträgen zur Theorie der Punktmengen behandelt sind, haben aber teilweise eigene Wege eingeschlagen. Ich kann ihre Begriffsbestimmungen nur als künstlich bezeichnen. Sie gehen davon aus, das Dreieck zur Grundlage aller ihrer Definitionen zu machen, und zwar in der Weise, daß stets eine ab-

Digitized by Google

zählbare Menge solcher Dreiecke ausreichen soll. Die Analogie mit den Sätzen über lineare Intervallmengen ist ersichtlich. Die Folge ist aber, daß ein so elementarer und feststehender Begriff wie der Gebietsbegriff und seine Eigenschaften dadurch von der Wahl dieser Dreiecke abhängig werden und sich mit einem künstlichen Inhalt erfüllen. Rotiert z. B. ein gleichseitiges Dreieck um seinen Mittelpunkt, so daß es die Fläche eines Kreises überstreicht, und wählt man jetzt eine abzählbare Menge unter ihnen so aus, daß ihre Ecken auf dem Kreise überall dicht liegen, so definieren deren Flächen ein Gebiet, dem diese Eckpunkte zugerechnet werden, während die andern als Grenzpunkte des Gebiets betrachtet werden. Doch mag diese ungefähre Andeutung genügen.

Noch eigenartiger ist der Kurvenbegriff der Verfasser (S. 219ff.). Sie gehen von einer nirgends dichten ebenen Punktmenge aus, legen um jeden ihrer Punkte ein Gebiet, dessen Breite kleiner als δ ist, und nennen die Punktmenge in dem Fall Kurvenbogen oder Kurve, daß erstens diese Gebiete sich für jedes δ zu einem einzigen Gesamtgebiet zusammensetzen, und zweitens dessen Breite mit abnehmendem δ nicht gegen Null konvergiert. Abgeschlossenheit wird für diesen Kurvenbegriff nicht verlangt; es heißt ausdrücklich, daß die Punkte, die nicht zu der entsprechenden abgeschlossenen Punktmenge gehören, in endlicher, abzählbarer, oder nicht abzählbarer Menge existieren können. Da nähere Angaben nicht gemacht sind, hätte man jede Punktmenge als Kurve zu bezeichnen, die auf einer zusammenhängenden nirgends flächenhaften (linienhaften) Punkmenge überall dicht liegt. Daß man den Begriffen, die man einführt, einen durchaus subjektiven Inhalt zu geben berechtigt ist, liegt auf der Hand; doch wüßte ich keinerlei Resultat anzugeben, das die Verfasser mit diesem ihrem etwas ungewöhnlichen Kurvenbegriff abgeleitet hätten.

Der Jordansche Kurvensatz wird in dem von Jordan ausgesprochenen Umfang bewiesen, und zwar nach der Methode, die de la Vallée Poussin in seinem Lehrbuch der höheren Analysis benutzt hat; doch entbehrt der Beweis der Strenge. Die formale Lücke des Jordanschen Beweises, auf die ich schon mehrfach hingewiesen habe, tritt auch in dem Youngschen Buche auf; der Schluß, daß das Ringgebiet gegen eine geschlossene Kurve konvergiert, ist gerade das, was des Beweises bedarf. Während aber bei Jordan und de la Vallée Poussin diese Lücke auf Grund der sonst abgeleiteten Formeln ausgefüllt werden kann, sind derartige Formeln hier nicht vorhanden. Außerdem enthält die Youngsche Darstellung noch eine andere Lücke. Die Verfasser haben wohl gesehen, daß die Existenz des Ringgebietes eines bindenden Beweises bedarf, doch sind ihre Ausführungen hierzu bei weitem nicht ausreichend. Auf die Art, in der man den höchst einfachen und glücklichen Grundgedanken von de la Vallée Poussin in die Form eines bindenden Beweises bringen kann, bin ich übrigens in dem zweiten Teil meines mengentheoretischen Berichts ausführlich eingegangen.

Endlich erlaube ich mir ein Wort über die Art des Zitierens. Wenn die Verfasser den Wunsch hatten, daß sich der Leser an der Hand ihrer Zitate und ihrer etwas eigenartig ausgewählten Bibliographie ein zutreffendes Urteil über die Entstehung der im Buche dargestellten Resultate bilden könne, so wird ihm dies sehr schwer fallen.

Königsberg i. Pr. A. Schoenflies.

Digitized by Google

René Baire. Leçons sur les théories générales de l'analyse. Tome I: Principes fondamentaux, variables réelles. X u. 232 S. Paris 1907, Gauthier-Villars.

Das Werk, welches aus Vorlesungen des Verfassers an der Fakultät zu Dijon hervorgegangen ist, verfolgt den Zweck, die allgemeinen Grundlehren der Analysis, einerseits unter tunlichster Beschränkung des Stoffes, insbesondere unter Ausschaltung aller Untersuchungen speziellerer Natur, andererseits jedoch den höchsten Anforderungen an Strenge entsprechend zu entwickeln. Der Verfasser ist dabei, wie er selbst hervorhebt, bestrebt, den Nachweis zu führen, daß Strenge und Knappheit der Darstellung einander keineswegs ausschließen, und er erreicht dieses Ziel, ganz abgesehen von der ihm zu Gebote stehenden außerordentlich klaren und exakten Darstellungsweise, vor allem dadurch, daß er die in die Lehrbücherliteratur noch verhältnismäßig wenig eingedrungenen moderneren Grenzbegriffe gleich von Anbeginn an zur Grundlage seiner Betrachtungen macht.

Sofort nach der Definition der Irrationalzahl mittels des Dedekindschen Schnittes (wobei allerdings bemerkt werden könnte, daß man den Namen Dedekinds hier ebenso vergeblich suchen würde wie etwa in Jordans „Cours", wie denn überhaupt auf historische Notizen gänzlich verzichtet ist) wird der Begriff der oberen Grenze eingeführt, welcher zunächst zur Definition der Differenz zweier Irrationalzahlen verwandt wird, während alle übrigen Rechenoperationen mit den Irrationalzahlen auf später verschoben werden. Auf dem Begriff der oberen Grenze bauen sich sodann auf diejenigen des oberen und unteren Limes, welche unmittelbar die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Konvergenz einer Zahlenfolge ergeben. Es werden alsdann die Funktionen einer und mehrerer Variabeln eingeführt und die Stetigkeit derselben vorläufig mittels konvergenter Zahlenfolgen definiert, andererseits aber die „gleichmäßige Stetigkeit" von Funktionen „rationalen Argumentes" in der gewöhnlichen Weise erklärt. Ein „Ausdehnungsprinzip", nach welchem man eine gleichmäßig stetige Funktion $f(x,y)$ zweier rationaler Argumente stets so erweitern kann, daß sie für beliebige reelle Argumente definiert erscheint und stetig ist, liefert sodann, angewandt auf die Funktionen $x \pm y$, xy, $\frac{x}{y}$ (ebenso wie nachher auf x^y), mit einem Schlage sowohl die Definitionen der sämtlichen Grundoperationen für die irrationalen Zahlen als auch die unveränderte Gültigkeit aller Rechengesetze.

Es läßt sich nicht leugnen, daß diese Darstellung der Irrationalzahltheorie an Kürze und Präzision wohl kaum noch übertroffen werden kann. Wenn man andererseits jedoch bedenkt, welche große Fülle von neuen und keineswegs einfachen Begriffen neben dem der Irrationalzahl selbst vom Lernenden aufgenommen werden muß, ehe die Summe zweier reeller Zahlen endgültig erklärt ist, so läßt sich immerhin ein gewisser Zweifel nicht von der Hand weisen, ob die Frage nach einem von allen Weitläufigkeiten befreiten, zugleich aber für den Lernenden möglichst durchsichtigen und leicht faßlichen Aufbau dieser Theorie hier ihre endgültige Lösung gefunden hat; um so mehr als die der Definition der Rechenoperationen vorangehenden Untersuchungen durch das Fehlen eben dieser Definition und die dadurch bedingte fortgesetzte Unterscheidung zwischen rationalen und irrationalen Zahlen naturgemäß eine Einbuße an Einfachheit erleiden.

Digitized by Google

Die nächstfolgenden Untersuchungen behandeln in klarer Weise der Reihe nach die Meßbarkeit konkreter Größen (Stetigkeitsaxiom), die Häufungsstellen und allgemeine Sätze über stetige Funktionen (Stetigkeit in einem Intervalle, Erreichen der oberen Grenze, Lückenlosigkeit). Ein kurzer Abriß über die Konvergenzkriterien unendlicher Reihen beschließt das erste Kapitel.

Das zweite Kapitel bringt zunächst auf im ganzen 11 Seiten den Begriff der Ableitung und des Differentials erster Ordnung, die allgemeinen Differentiationsgesetze einschließlich der Differentiation der elementaren Funktionen, den Rolleschen und den Mittelwertsatz sowie die sämtlichen entsprechenden Untersuchungen für die Funktionen mehrerer Veränderlichen, wobei auf den Begriff des Grenzwerts einer Funktion allerdings nicht näher eingegangen wird. In sehr präziser und eleganter Behandlungsweise schließen sich hieran unmittelbar die Definition und die Eigenschaften des bestimmten Integrals einer stetigen Funktion und je ein kurzer Abschnitt über die unbestimmte Integration, uneigentliche Integrale und die Differentiation unter dem Integralzeichen. Es folgen zunächst der Existenznachweis und die Differentiation impliziter Funktionen wie auch (unter Einführung der Funktionaldeterminanten) von Systemen solcher, und im Zusammenhange hiermit die Diskussion der Abhängigkeit mehrerer Funktionen voneinander; sodann die Besprechung der Ableitungen und Differentiale höherer Ordnung der Funktionen einer und mehrerer Variabeln, wobei die Sorgfalt, welche dem Begriffe des Differentials im Gegensatz zu den meisten bisherigen Darstellungen gewidmet wird, besonders hervorzuheben ist. Den Abschluß des Kapitels bildet ein zur Förderung des Verständnisses der Differentiationsgesetze sehr dienlicher Abschnitt über die Transformation der abhängigen und der unabhängigen Variabeln sowie ein solcher über die Integration der totalen Differentiale.

Das dritte und letzte Kapitel, welches unter gleichzeitiger Einführung des mehrfachen Integrals von den geometrischen Anwendungen des Integralbegriffs handelt, ist umso mehr zu begrüßen, als eine zusammenfassende und allen Anforderungen an Strenge genügende Darstellung dieses Gegenstandes meines Wissens bisher mangelte. Es werden zunächst besprochen die Definition und die Berechnung der Bogenlänge einer Raumkurve sowie die allgemeine Inhaltsdefinition ebener Bereiche nebst der Bedingung für ihre Meßbarkeit, woran sich dann der Nachweis der Existenz und die Diskussion des Doppelintegrals einer stetigen Funktion schließen. (Die recht weitläufigen Betrachtungen bei der Zurückführung des Doppel- wie auch nachher des mehrfachen Integrals auf sukzessive Integrationen hätten m. E. vermieden werden können, wenn an deren Stelle lediglich gezeigt worden wäre, daß bei einer beliebigen Gebietsteilung das Integral[1]) $\int dx \int f(x,y)dy$, erstreckt über das volle Gebiet, gleich ist der Summe der analog gebildeten über die Teilgebiete erstreckten Integrale und somit kleiner ist als die zu dieser Gebietsteilung gehörige „obere Summe", ebenso größer als jede beliebige „untere Summe" — ein Weg, den ich für eine Neuauflage des Werkes in Vorschlag zu bringen mir gestatten möchte.) Die Transformation des Doppelintegrals geschieht nicht in der Jacobischen Weise durch sukzessive Einführung der neuen Veränderlichen, sondern (ähnlich wie dies in Jordans Cours für den allgemeineren Integral-

1) Da nur von stetigen $f(x,y)$ die Rede ist, so steht dessen Existenz von vornherein fest. (Vgl. S. 164.)

Digitized by Google

begriff durchgeführt ist) indem nach Bertrands Vorgang die beiden Integrationsgebiete direkt aufeinander bezogen werden; die sorgfältige Durchführung erfordert dabei allerdings recht eingehende Untersuchungen. Behufs Definition des Inhalts krummer Flächen endlich werden (ebenfalls ähnlich wie bei Jordan) den Elementarquadraten der Ebene der unabhängigen Variabeln u, v gewisse Parallelogramme zugeordnet, welche die Fläche in einer ihrer Ecken berühren; zur Erklärung der Bedeutung der so erhaltenen Inhaltszahl I ist dann noch der vollständige Nachweis hinzugefügt, daß die Inhalte „benachbarter" aus ebenen Polygonen zusammengesetzter Flächen zwar gegen I, niemals aber gegen eine kleinere Zahl konvergieren können. Zum Schlusse werden die Linien- und Flächenintegrale behandelt.

Zusammenfassend kann man wohl sagen, daß die Auswahl des Stoffes mit großer Umsicht getroffen ist, und daß alle Untersuchungen mit einer Strenge und Klarheit durchgeführt sind, wie sie bisher in Lehrbüchern wohl nur selten erreicht worden sind. Das Werk, dessen zweiter Band die analytischen Funktionen, Differentialgleichungen, geometrischen Anwendungen und elliptischen Funktionen behandeln soll, ist in hohem Maße geeignet, dem Lernenden wie auch dem Lehrer als zuverlässiger Berater zu dienen und wird infolge seiner großen Vorzüge zweifellos eine weite Verbreitung finden.

München. F. Hartogs.

H. Bruns. Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmaßlehre. A. u. d. T. B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der math. Wissenschaften Band XVII. VIII u. 310 S. u. 18 S. Anhang. gr. 8. Leipzig 1906, B. G. Teubner. Geh. ℳ 7,80, geb. ℳ 8,40.

Dieses Buch bezeichnet eine entscheidende Wendung in der Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

In erster Linie bringt es die langjährigen mühevollen Arbeiten zur Darstellung und zu einem theoretischen Abschluß, die der Verfasser mit seinen Arbeitsgenossen und Schülern den Kollektivgegenständen gewidmet hat. Wenn man sich nicht darauf beschränken will, die in einer Tabelle oder in graphischen Darstellungen vorliegenden Beobachtungen über einen Kollektivgegenstand durch die Angabe des Mittelwertes und der Streuung zusammenzufassen, so steht man vor der Aufgabe, die Beobachtungen durch eine analytische Darstellung wiederzugeben. Während nun die Gesamtheit der Messungen einer und derselben Größe hinreichend genau durch das Gaußsche Verteilungsgesetz wiedergegeben wird, hat schon Fechner dessen Unzulänglichkeit für die Darstellung anderer Kollektivgegenstände bemerkt und Abänderungen vorgeschlagen. Gegenüber dem, bei biologischen Untersuchungen vielfach benutzten Versuche Pearsons, die Verteilungsgesetze der Kollektive in 4 Typen unterzubringen, hat nun Bruns den weit aussichtsvolleren Gedanken durchgeführt, die Korrektion, die am Gaußschen Verteilungsgesetze anzubringen ist, durch eine Reihenentwicklung darzustellen, von der wenige Glieder für eine hinreichend genaue Wiedergabe genügen. Die mathematische Behandlung dieser Reihe, vor allem ihre Herstellung durch numerische Bearbeitung der über den Kollektivgegenstand vorliegenden Beobachtungen, füllt den weitaus größten Teil des Buches aus. Daß hier, wo ein Astronom sich diesem Gegenstande gewidmet

Digitized by Google

hat, auch die Schärfen und die Vorteile der feineren Rechenkunst Berücksichtigung gefunden haben, erhöht das Interesse an diesen, etwas starr in mathematischem Formalismus vorgetragenen, doch stets umsichtigen Ausführungen in allen Einzelheiten. Dem praktischen Zwecke numerischer Auswertung dienen die dem Buche beigegebenen Tafeln der Krampschen Transzendente und ihrer ersten sechs Ableitungen.

Aber das Buch bietet, schon insoweit es die Sammelbegriffe behandelt, weit mehr als nur den Zusammenschluß der eigenen Arbeiten des Verfassers über die analytische Darstellung der Kollektivgegenstände. Es darf sich geradezu als das erste Lehrbuch der Kollektivmaßlehre überhaupt bezeichnen, das über die theoretischen, vor allem die mathematischen Fragen erschöpfende Auskunft gibt, während allerdings die zahlreichen Anwendungen, in denen sich die Lehre von den Sammelbegriffen wertvoll erwiesen hat, kaum berührt sind. Es wäre sehr zu begrüßen, wenn der Verfasser seine Absicht, Anwendungen folgen zu lassen, bald durch Herausgabe eines besonderen Bandes verwirklichen könnte.

Um die Kollektivmaßlehre als den für die Erfahrungswissenschaft bedeutsamsten Teil der Wahrscheinlichkeitslehre hervortreten zu lassen, entwickelt der Verfasser die Hauptlehren der letzteren, die er seit 25 Jahren in akademischen Vorlesungen regelmäßig vorgetragen hat. Wie er da die logischen und mathematischen Ausgangspunkte der Wahrscheinlichkeitsrechnung behandelt, die für den weiteren Aufbau erforderlichen analytischen Funktionen einführt, wie sich in seine Darstellung das sogenannte Bayessche Prinzip einreiht, wie er die Teilungsprobleme, die Spieleinsätze, die geometrischen Wahrscheinlichkeiten vorträgt, — das alles ist von anregender Eigenart durchdrungen und tief durchdacht.

Indessen, der Berichterstatter erblickt in dem Buche noch mehr als eine neue, durch die Kollektivmaßlehre bereicherte und vertiefte Darstellung der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Er sieht in ihm die entscheidende Vorarbeit für einen völligen Umbau der überlieferten Wahrscheinlichkeitslehre. Nicht einbauen sollte man in letztere die neue Kollektivlehre, vielmehr sollte man die Wahrscheinlichkeitslehre ganz und gar auf dem Erfahrungsgrunde der Kollektivgegenstände aufbauen. Wenn man — um hier nur an einem trivialen Beispiele zu zeigen, wie das gemeint ist — die Wahrscheinlichkeit, Pasch zu werfen, zu $^1/_6$ angibt, so sagt man offenbar nichts aus über irgend einen Wurf mit 2 Würfeln, denn über den weiß man nichts, sondern man bezeichnet eine Eigenschaft des Kollektivgegenstandes, der sämtliche Würfe, die mit einem Würfelpaare möglich sind, umfaßt. Und so sind es immer Sammelbegriffe, teils logisch mit Hilfe der Kombinatorik ersonnene, teils der Erfahrung entnommene, die den Gegenstand der Wahrscheinlichkeitslehre bilden. Baut man diese Wissenschaft auf solchem Grunde auf, so bewahrt man sie vor den Zweifeln und Bedenken, die in den neueren Lehrbüchern mit Recht so manchem Problem, das den großen Analytikern des 18. Jahrhunderts berechtigt erschien, entgegen gehalten werden. Wenn ein solcher Neubau der Wahrscheinlichkeitslehre gelingt, so wird das Buch von Bruns für seinen Plan in wesentlichen Zügen bestimmend sein.

Dresden. G. Helm.

Digitized by Google

Horace Lamb. Lehrbuch der Hydrodynamik. Deutsche autorisierte Ausgabe. Nach der dritten englischen Auflage unter Mitwirkung des Verfassers besorgt von † Johannes Friedel. Mit 79 Figuren. XXVI u. 787 S. gr. 8. Leipzig 1907, B. G. Teubner. Geb. ℳ 20,—.

In den letzten Jahrzehnten hat sich das Interesse der Mehrzahl der deutschen Physiker infolge der Fortschritte der elektromagnetisch-optischen Forschungen vorwiegend diesen zugewandt. Die Engländer haben das Verdienst, darüber die der Mechanik angegliederten Teile der Physik nicht vernachlässigt zu haben. Bei ihnen muß suchen, wer sich über den augenblicklichen Stand der Hydrodynamik unterrichten will. Dies wird nun durch die Übersetzung des schon früher rühmlich bekannten Lambschen Buches wesentlich erleichtert.

Dies Werk ist ein treffliches Beispiel für mathematische Physik. Es beschränkt sich bei der Wahl der mathematischen Hilfsmittel keineswegs auf die Elemente, sondern nimmt sie aus jedem Gebiet, in dem sich welche befinden. Doch bleibt die Mathematik Mittel, der physikalische Zweck wird darüber nie aus dem Auge verloren; deshalb werden z. B. manche Existenzbeweise aus der Potentialtheorie und ähnliches trotz ihrer zweifellosen Bedeutung für die Mathematik durch plausible physikalische Überlegungen ersetzt. Dagegen will das Buch physikalisch vollständig sein; es will alle zur Hydrodynamik in Beziehung stehende Gebiete behandeln oder, wenn der Zusammenhang weniger eng ist, doch berühren. Sorgfältige Literaturangaben erleichtern das Auffinden der Orginalarbeiten. Auch hebt es den Zusammenhang mit technischen Fragen, namentlich mit der Nautik, vielfach hervor.

Von der Fülle des behandelten Stoffs läßt sich im Rahmen einer Besprechung unmöglich anders als durch Anführung der Kapitelüberschriften eine Vorstellung geben. Sie lauten: 1. Die Bewegungsgleichungen. 2. Integration der Gleichungen in speziellen Fällen. 3. Wirbelfreie Bewegung. 4. Zweidimensionale Bewegung. 5. Dreidimensionale Probleme. 6. Über die Bewegung fester Körper in einerFlüssigkeit. 7. Wirbelbewegung. 8. Flutwellen. 9. Oberflächenwellen. 10. Expansionswellen. 11. Zähigkeit. 12. Rotation flüssiger Massen.

Es ist dem Buche, an dem kaum etwas auszusetzen ist, als daß es gelegentlich Zahlenangaben in Fuß und Meilen statt in metrischen Längenmaßen macht, weite Verbreitung zu wünschen.

Berlin. M. Laue.

G. H. Bryan. Thermodynamics. An Introductory treatise dealing mainly with first Principles and their direct Applications. XIV u. 204 S. gr. 8. Leipzig 1907, B. G. Teubner. Geb. ℳ 7,—.

Das Buch stellt in knapper, übersichtlicher Form auf rein deduktivem Wege die Thermodynamik dar. Es beschäftigt sich in den beiden ersten, zusammen ziemlich die Hälfte des Bandes umfassenden Teilen mit den Grundlagen. Den einleitenden Paragraphen des ersten Teils folgt zunächst der erste, dann der zweite Hauptsatz, letzterer in seiner ältesten, Clausiusschen Form. Der zweite Teil ist fast ausschließlich dem Begriff der Irreversibilität gewidmet. Scharf wird sein Gegensatz zur reinen Mechanik hervorgehoben, dann der

Digitized by Google

Grundgedanke der Gastheorie, die Unumkehrbarkeit statistisch aufzufassen, kurz gestreift, endlich die Begriffe Entropie, nutzbare Energie usw. eingeführt. Der dritte Teil umfaßt die Anwendungen. Zuerst kommt auf wenigen Seiten ein Abschnitt über die Thermodynamik der Strahlung, welcher freilich vom Verfasser nur als eine Skizze gedacht ist, und aus diesem Grund, sowie deswegen, weil hier doch vielfach kompliziertere Verhältnisse vorliegen als in der Thermodynamik der Körper, vielleicht besser an das Ende gestellt wäre. Dann folgt die Behandlung der homogenen Körper, dann die der Körper in verschiedenen Aggregatzuständen, die Gibbssche Phasenregel und die Thermoelektrizität. Den Schluß bildet ein kurzer Abschnitt über zyklische Systeme und andere mechanische Analogien zum zweiten Hauptsatz. Dies alles ist in knappen, prägnanten Worten klar dargestellt.

Mit besonderem Interesse wird, wer die neuesten Forschungen im Gebiete der theoretischen Physik kennt (Forschungen übrigens, welche erst nach Abschluß des Buches bekannt geworden sind), zwei Stellen auf S. 55 und 104 lesen. Bei der ersten handelt es sich um die Frage, wie die Temperatur eines bewegten Körpers zu bestimmen ist. Der Verfasser denkt sich den üblichen Kreisprozeß mit einem Hilfskörper ausgeführt, bei welchem ein bewegter und ein ruhender Körper als Wärmereservoire dienen. Er hebt hervor, daß das Resultat dieses Prozesses, also auch die gemessene Temperatur nur dann von der Geschwindigkeit des Körpers unabhängig ist, wenn die Trägheit des Hilfskörpers durch Wärmezufuhr nicht geändert wird. Die bisherige Theorie stellt sich bekanntlich auf diesen Standpunkt. Jetzt aber wissen wir, daß die Trägheit der Hohlraumstrahlung durch Wärmezufuhr vermehrt wird, und daß daher die Masse aller Körper (denn sie enthalten stets Strahlung) qualitativ dasselbe Verhalten zeigt. In Übereinstimmung mit dem Schlusse des Verfassers ist nach dieser Theorie die Temperatur nicht vom Bewegungszustand unabhängig, vielmehr sinkt sie bei (adiabatischer) Beschleunigung. (Vergl. hierzu K. v. Mosengeil, Ann. d. Phys. **22**, 867, 1907 und M. Planck, Berl. Ber. 1907, S. 542, sowie Ann. d. Phys. **26**, 1, 1908.)

Die andere Stelle spricht von der Entropiezunahme bei der Reflexion und Brechung an der Grenze nicht absorbierender Körper. Man findet in der Tat eine solche, wenn man die Entropie nach diesem Vorgang als Summe der Entropien des reflektierten und des gebrochenen Strahls berechnet. Offenbar fällt es dem Verfasser als verwunderlich auf, daß sich hiernach diese beiden Strahlen trotz ihrer Kohärenz nicht wieder vereinen lassen sollen. Tatsächlich ist dies der Fall, der fragliche Vorgang also umkehrbar. Man darf eben auf kohärente Strahlen nicht den bei Körpern stets richtigen Satz anwenden, daß die Entropie eines Systems Summe der Entropien seiner Teile ist. Die vom Verfasser behauptete Lokalisierbarkeit der Entropie, welche denselben Satz zur notwendigen Voraussetzung hat, scheint mir freilich aus diesem Grunde unmöglich.

Man sieht schon an diesen Beispielen, welche Anregungen das Buch zu geben vermag. Es ist nur zu bedauern, daß es nicht in deutscher Sprache erschienen ist. Es wird so bei uns kaum die Verbreitung finden, die ihm zu wünschen wäre.

Berlin. M. Laue.

Digitized by Google

Erich Marx. Die Geschwindigkeit der Röntgenstrahlen. Des 29. Bandes der Abhandl. d. Mathem.-Phys. Klasse der K. Sächsischen Gesellsch. d. W. Nr. 6. Mit 6 Figuren im Text. 49 S. Lex.-8. Leipzig 1906, B. G. Teubner. ℳ 1,60.

Nach der Wiechert-Stokesschen Hypothese sind die Röntgenstrahlen elektromagnetische Störungen. Danach müssen sie sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten. Der Verfasser hätte sich ein großes Verdienst um die Wissenschaft erworben, wenn er diese Folgerung experimentell geprüft hätte.

Leider hat sich aber inzwischen herausgestellt, daß er sich durch komplizierte Gasentladungserscheinungen hat täuschen lassen, so daß sein Versuch für die Geschwindigkeit der Röntgenstrahlen nichts beweist. (Vergl. eine Reihe von Abhandlungen von Pohl und Franck in den Verh. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. 1908.)

Berlin. M. Laue.

Marcel Brillouin. Leçons sur la viscosité des liquides et des gaz. Première et Seconde Partie. Paris 1907, Gauthier-Villars.

Sehr zu begrüßen ist das Erscheinen dieses Lehrbuches, welches im Gegensatz wohl zu allen bisher existierenden die innere Reibung der Gase und Flüssigkeiten zu seinem ausschließlichen Gegenstande macht. Der vorliegende erste Band beschränkt sich auf die Flüssigkeiten. Nach einer längeren Besprechung der experimentellen Grundlegung, welche bis auf Newton zurückführt, folgt die Ableitung der Grundgleichungen der Theorie, aus denen zunächst die wichtigsten Folgerungen allgemeiner Art gezogen werden. Es folgt weiter die teils strenge, teils angenähert durchgeführte Integration der letzteren für viele spezielle Fälle, welche entweder an sich interessante Anwendungen darstellen, oder zur Begründung der Theorie derjenigen Apparate wichtig sind, deren sich die experimentelle Forschung über die Reibung bedient. Daran schließt sich die eingehende Beschreibung der zum Poiseuilleschen Gesetz führenden Experimentaluntersuchungen. Besonders werden auch die Versuche von Warburg u. a. mit Quecksilber erwähnt, welche lehren, daß die Grenzschichten auch bei *nicht* benetzenden Flüssigkeiten nicht an den Wänden entlang gleiten, sondern an ihnen haften. Ferner wird der Einfluß von Temperatur und Druck, der der Konzentrationen bei Salzlösungen und der der chemischen Konstitution bei einigen organischen Flüssigkeiten besprochen. Das Schlußkapitel endlich behandelt die Turbulenz; es bringt die experimentellen und theoretischen Untersuchungen von Hagen, Osborne Reynolds und Couette, während die bekannte Arbeit von H. A. Lorentz über diesen Gegenstand leider unerwähnt bleibt.

Das Buch gewährt eine im allgemeinen sehr viel vollständigere Übersicht über unsere Kenntnisse auf dem Gebiet der Reibung als alle anderen und zeichnet sich durch Klarheit der Darstellung aus. Es kann daher jedem warm empfohlen werden, der sich mit diesem Teil der Physik eingehender beschäftigen will.

Während der erste Teil dieses Werkes der Reibung der tropfbaren Flüssigkeiten vorwiegend gewidmet war, beschäftigt sich der zweite hauptsächlich mit derselben Erscheinung bei den Gasen. Da die allgemeine, auch die Kompressibilität berücksichtigende Theorie schon im ersten Teil enthalten

Digitized by Google

war, treten theoretische Erwägungen im zweiten ziemlich zurück, zumal da spezielle auf Gase anwendbare Resultate von ihr bisher kaum erzielt sind. Neu ist dagegen der kinetische Gesichtspunkt, welcher in den Schlußkapiteln auch auf Flüssigkeiten übertragen wird. Zwar werden die berühmten Untersuchungen von Clausius, Maxwell u. a. nur in den Grundrissen und Ergebnissen angeführt, dafür findet sich aber manche andere, wohl auf den Verfasser selbst zurückzuführende Betrachtung, welche mit Interesse gelesen zu werden verdient. Das Wertvollste an dem Buche ist aber (wie auch beim ersten Bande) die umfassende Darstellung der einschlägigen Experimentaluntersuchungen. Wer sich hierüber einen Überblick gewinnen will, wird es mit Nutzen zu Rate ziehen.

Berlin. M. Laue.

M. Bouty. „Cours de Physique de l'École Polytechnique par M. J. Jamin." Troisième Supplément par M. Bouty. 417 S. Paris 1906, Gauthier-Villars.

Wie schon der Titel lehrt, ist dieser kleine Band ein Supplementband zu dem bekannten Jaminschen Kompendium der Physik. In ihm wurden die neuesten Erscheinungen auf dem Gebiete der Strahlung, Elektrizität und Ionisation wiedergegeben. Als Quelle haben zum Teil gedient die verschiedenen „Rapports, présentés au Congrès International à Paris 1900. Paris, Gauthier-Villars, Paris 1900, tome I bis III", in denen die verschiedensten Gelehrten der Welt ihre Spezialgebiete dargestellt haben. Bouty gibt von den die Strahlung, Elektrizät und speziell die Ionisation behandelnden Rapports einen knappen und klaren Auszug und verweist dabei auf die in den früheren Bänden des Lehrbuches behandelten gleichartigen Gebiete.

Zunächst werden die Rapports von W. Wien, O. Lummer, E. Pringsheim und P. Lebedew über die schwarze Strahlung, die Strahlung der Gase und den Strahlungsdruck exzerpiert, an die sich die Gesetzmäßigkeiten im Linienspektrum, die Reststrahlen, die Hagen-Rubensschen Versuche und die neueren Untersuchungen über die anomale Dispersion anschließen. Ein breiter Raum wird den Hertzschen Wellen und ihrer Anwendung bei der drahtlosen Telegraphie gewährt, ebenso den Wechselströmen, Mehrphasenströmen und oszillographischen Methoden. Auch auf dem Gebiete des direkten und inversen Zeemann-Phänomens werden die neuesten Arbeiten berücksichtigt. Den weitaus größten Teil nimmt die Elektrolyse, die Ionentheorie, die Nernstsche Theorie der Diffusion von Elektrolyten, die Ionisation durch Flammen, die Radioaktivität und die Theorie von den Entladungserscheinungen ein.

Einem Supplementband entsprechend reihen sich die Referate über die modernen Disziplinen nebeneinander in klarer und präziser Form, ohne den Charakter eines Lehrbuches zu haben.

Wenn ein Tadel ausgesprochen werden soll, so ist es der, daß der Verfasser auch die Blondlotschen N-Strahlen ernst behandelt, die für jeden Wissenden doch nun endlich abgetan sein sollten.

Breslau. O. Lummer.

Digitized by Google

Ugo Broggi. Traité des assurances sur la vie avec développements sur le calcul des probabilités. Traduit de l'italien par S. Lattès, avec une préface de M. Achard. XII u. 306 pag. 8°. Paris 1907, Librairie scientifique A. Hermann.[1])

Die unter dem Titel „Matematica attuariale" im Verlage von Hoepli in Mailand erschienene Originalausgabe hat durch Herrn Lattès, Professor am Lyceum zu Montpellier, eine sorgfältige Übersetzung erfahren, deren Benutzung für französische Versicherungsmathematiker neben dem allgemeinen Nutzen eines handlichen und gut disponierten Lehrbuches noch den Vorteil hat, ihnen die wesentlichsten Arbeiten der letzten Jahre von deutschen Autoren auf diesem Gebiete bequem zugänglich zu machen.

Das auf Vollständigkeit keinen Anspruch machende Literaturverzeichnis enthält fast ausschließlich deutsche Namen, wie Bohlmann, Czuber, Großmann, Lexis u. a., vor allem sind die Arbeiten des erstgenannten herangezogen worden, so daß man das Lehrbuch Broggis mit Recht als ein Kompendium der modernsten Versicherungstechnik bezeichnen kann.

Er führt zunächst aus, daß eine Theorie der Versicherung auch ohne die Wahrscheinlichkeitsrechnung möglich ist, sofern sie sich auf die Aufgaben der täglichen Praxis beschränkt, wofür ja die Statistik hinreichend sichere Grundlagen liefert; daß aber die Theorie der Wahrscheinlichkeit nicht entbehrt werden kann, wenn man sich Rechenschaft geben will über die Größe der Abweichungen berechneter Wahrscheinlichkeitswerte von den auf empirischem Wege festgestellten Werten. Die Wahrscheinlichkeitstheorie gibt daher die Mittel zur Kritik der aus statistischen Daten abzuleitenden Wahrscheinlichkeiten, sie ermöglicht die Erkenntnis, ob einer statistischen Relativzahl, welche in der Form einer Wahrscheinlichkeit dargestellt ist, auch tatsächlich eine Wahrscheinlichkeit zugrunde liegt, welche der in Frage stehenden Massenerscheinung innewohnt.

Da die Theorie des Versicherungswesens in ihrem wichtigsten Teile hauptsächlich auf die Sterbenswahrscheinlichkeit begründet ist, tritt ihr Zusammenhang mit der Wahrscheinlichkeitstheorie überhaupt damit klar hervor.

Im I. Teile seines Buches geht Verfasser von den Tschebycheffschen Sätzen aus und gelangt mit ihrer Hilfe zu einem strengen Beweise des Bernoullischen Theorems sowie des Poissonschen „Gesetzes der großen Zahlen" und des Gaußschen Fehlergesetzes. Sodann wird die Sterblichkeitsmessung, die Dispersion und die Ausgleichung von Sterbetafeln behandelt. Im II. Teile folgt die Theorie der Leibrenten, Überlebensrenten und der sonst vorkommenden Rentenwerte, während im III. Teile die Versicherungstechnik im engeren Sinne, Berechnung der Prämien und Reserven, Rückkaufswerte, Gewinnbeteiligung der Versicherten usw. dargestellt wird.

Das IV. Kapitel ist der Theorie des Risikos gewidmet, welche hauptsächlich in Anlehnung an Bohlmann entwickelt wird und sich durch besonders klare und kurzgefaßte Darstellung des augenblicklichen Standes dieser Theorie auszeichnet.

Breslau. E. Wagner.

1) Eine von U. Broggi besorgte deutsche Ausgabe seiner „Matematica attuariale" wird im Oktober 1908 bei B. G. Teubner in Leipzig erscheinen.

Digitized by Google

R. Emden. Gaskugeln. Anwendungen der mechanischen Wärmetheorie auf kosmische und meteorologische Probleme. Mit 24 Figuren, 12 Diagrammen und 5 Tafeln im Text. VI u. 498 S. gr. 8. Leipzig 1907, B. G. Teubner. Geb. ℳ 13,—.

Herr Emden schließt sich im vorliegenden Werk, über dessen Inhalt er sich bereits in seinen Vorlesungen an der Techn. Hochschule in München ausgesprochen hat, eng an die Forschungen von A. Ritter an, der früher an der entsprechenden Anstalt in Aachen gewirkt hat. Diese Untersuchungen wurden in Wiedemanns Annalen schrittweise veröffentlicht, wurden jedoch, da sie seitens der Wissenschaft nur geringe Beachtung fanden, von Ritter selbst unter einem ähnlichen Titel bei Rümpler (Hannover) veröffentlicht, wo sechs zusammenfassende Betrachtungen erschienen. Über den Inhalt der letzteren ist etwa folgendes zu sagen:

Zunächst wurde die Frage nach der Höhe der Atmosphäre behandelt, und zwar unter der Voraussetzung des Energie- und Entropieprinzips und der für die kinetische Gastheorie geltenden Zustandsgleichung $pv = HT$, in der p die Spannung, v das Volumen, H die Regnaultsche Konstante, T die vom absoluten Nullpunkte (-273^0) aus gemessene absolute Temperatur bedeutet.

Um die Frage zu beantworten, nahm Ritter einen indifferenten Gleichgewichtszustand an, der sich folgendermaßen charakterisierte. Ein Gasquantum, welches sich um eine gewisse Höhe hob, gelangte in eine Umgebung von derselben Spannung und Temperatur, in die es selbst nach den Gesetzen der Wärmemechanik versetzt wurde. Der Vorgang war also ein adiabatischer. Der Grundgedanke erwies sich als äußerst fruchtbar.

Als Höhe ergab sich $H = \frac{c_p T_0}{A}$. Hier bedeutete $c_p = 0{,}2375$ die Wärmekapazität der atm. Luft bei konstanter Spannung, T_0 die absolute Temperatur an der Erdoberfläche, $A = \frac{1}{424}$ den reziproken Wert des Wärmeäquivalents, also $H = 0{,}2375 \cdot 273 \cdot 425 = 27491$ m. Für eine Atmosphäre aus Wasserdampf dagegen ergab sich eine Höhe von 348952 m, wobei angenommen wurde, daß keine Änderungen durch etwaige Kondensation hervorgerufen wurden. Dachte er sich die Atmosphäre durch einen Schacht mit dem Erdmittelpunkte in Verbindung gesetzt, so ergab sich für atmosphärische Luft unter denselben Bedingungen die Temperatur $T = 31902^0$, die Spannung $p = 12965000$ Atmosphären und das spezifische Gewicht 143,5.

Es lag nun nahe, die Sonne als einen glühenden Gasball aufzufassen, der ohne starren Kern war. Der theoretische Zustand einer solchen Gaskugel entsprach einer sog. polytropischen Kurve. Diese blieb eine solche während der etwaigen Zusammenziehung infolge der Gravitation nach dem Newtonschen Gesetz. Den Weg, den jeder Punkt dabei durchlief, bezeichnete Ritter als eine Kosmogonide, die sich wiederum als polytropische Kurve ergab. Für ihre drei Projektionen auf die Koordinatenebenen folgte für atmosphärische Luft

$$pv^{\frac{4}{3}} = \text{Const.}, \quad Tv^{\frac{1}{3}} = \text{Const.}, \quad \frac{T^4}{p} = \text{Const.}$$

Für die spezifische Wärme ergab sich $\lambda = \frac{c_p - \varepsilon c_v}{1 - \varepsilon}$, also für atmosphärische Luft, bei der $k = \frac{c_p}{c_v}$, der Exponent $\varepsilon = \frac{4}{3} = 1{,}41$ zu setzen war (c_v = Kapazität für konst. Volumen), $\lambda = \frac{c_p}{k} \frac{k - \varepsilon}{1 - \varepsilon} = -0{,}16312$, $c_p = -0{,}038741$.

Digitized by Google

Nahm man also die spezifische Wärme bei konstantem Druck als konstante Größe an, so ergab sich, daß die spezifische Wärme einer kosmischen Gaskugel einen nach Raum und Zeit konstanten *negativen* Wert hat. Dieses Resultat war überraschend, denn es sagte, daß, wenn infolge der Gravitation die Temperatur eines kleinen Gasquantums um einen Grad Celsius zunahm, sie 0,038741 Wärmeeinheiten abgab, während umgekehrt das Entsprechende stattfand. Dieser Satz widersprach durchaus den üblichen Anschauungen, welche eine Abkühlung der Sonne voraussetzen, denn es ergab sich, daß die stattfindende Kontraktion der Sonne zu einer fortdauernden Erhitzung führte, während welcher nur 18,7 % der Gravitationswärme auf Ausstrahlung verwandt wurden, dagegen der Rest von 81,3 % der Erhitzung zugute kam. Insbesondere zeigte sich, daß das Produkt aus Mittelpunktswärme und Radius der Gaskugel konstant war.

Bekanntlich hatte H. v. Helmholtz (und im Anschluß an ihn Tyndall und W. Thompson) berechnet, auf wie viele Jahre der Sonnenball die augenblickliche Ausstrahlung decken könnte; Ritter dagegen zeigte, daß nach den Resultaten der kinetischen Gastheorie die Ausstrahlung gar nicht hinreichte, eine Deckung zu veranlassen, sondern daß die Ausstrahlung mindestens fünfmal so stark sein müßte als in Wirklichkeit, wenn eine Deckung stattfinden sollte. Daß damit die sog. Kant-Laplacesche Theorie von der Bildung des Sonnensystems der Vernichtung anheimfiel, war selbstverständlich, und es gehörte allerdings Mut dazu, ruhig in der Veröffentlichung seiner Resultate zu verharren und unbeirrt seinen Weg weiter zu gehen.

Inzwischen war das sog. Stefansche Gesetz aufgestellt worden, wonach die Ausstrahlung eines gasförmigen Körpers proportional der 4ten Potenz der absoluten Temperatur sein sollte. Dies deutete darauf hin, daß die Differenz zwischen dem Ritterschen und Helmholtzschen Resultate einigermaßen abzuschwächen war, allerdings nur um einen geringen Prozentsatz. Überhaupt ergab sich, daß entweder die kinetische Gastheorie oder die Helmholtzsche Theorie einer vollständigen Umgestaltung entgegengehen mußte.

Es war also durchaus zeitgemäß, daß Herr Emden die Ritterschen Resultate kritisch untersuchte und, wo es nötig schien, sie mit etwaigen neueren Forschungen in Einklang zu setzen suchte. Überdies war er vorsichtig genug, das Manuskript vor dem Druck einer Autorität, wie dem Prof. Dr. Schwarzschild in Göttingen, vorzulegen, der ihn bei der Korrektur wesentlich unterstützt hat. Es handelt sich also bei der Veröffentlichung um Resultate einer kritischen Prüfung der Ritterschen Veröffentlichungen. Diese Prüfung ist für den Aachener Forscher durchaus günstig ausgefallen. Nicht nur werden sämtliche inzwischen versuchten Widerlegungen Ritters als illusorisch hingestellt, sondern auch folgendes Endurteil ausgesprochen:

Den Arbeiten Ritters sind noch lange nicht genügende Beachtung und ein hinreichend vertieftes Studium zuteil geworden; sie enthalten manche Schätze, die noch gehoben werden können. Namentlich gilt dies in bezug auf die Betrachtungen über Geschwindigkeiten im interstellaren Raum und die Temperaturen, die beim Eindringen von Meteoriten in widerstehende Medien erzeugt werden. Sie stehen in innigem Zusammenhange mit anderen Arbeiten Ritters, die noch vollständig unbeachtet geblieben sind, obwohl sie so unerwartete Resultate enthalten, daß ein gewisses Mißtrauen berechtigt wäre, würde nicht Ritters Name für die Gediegenheit dieser Untersuchungen bürgen.

Digitized by Google

Ihren Ausgangspunkt scheint diese ganze Gedankenreihe zu nehmen von einer kleinen Arbeit Ritters: Über ein Paradoxon der mechanischen Wärmetheorie; Wiedemanns Annalen **160**, 454, 1877 und **2**, 616, 1877.

An Stelle des Gasballes, aus dem nach Kant bzw. Laplace das Sonnensystem entstanden sein soll, treten nach der Ritterschen Theorie höchstens kosmische Staubwolken, die dem Sonnensystem zufällig begegnen und gegebenenfalls zur Massenvermehrung beitragen. Die von Laplace aufgestellte Behauptung sukzessiver Absonderung der Planeten vom Sonnenkörper wird als illusorisch hingestellt und als metaphysische Spekulation betrachtet, die jede kritische Prüfung unmöglich macht.

Das Werk des Herrn Emden sei hiermit jedem Leser zum ernsten Studium empfohlen, da die Hauptfragen der Kosmogonie, soweit sie in der Literatur bisher zur Sprache kamen, wissenschaftlich behandelt sind. Es ist als das ehrenvollste Denkmal zu betrachten, welches dem Geheimrat A. Ritter gesetzt werden konnte. Ein überreicher Lehrstoff ist auf rund 500 Seiten behandelt.[1])

Hagen. G. Holzmüller.

H. A. Lorentz. Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung nebst einer Einführung in andere Teile der Mathematik. Mit besonderer Berücksichtigung der Bedürfnisse der Studierenden der Naturwissenschaften. Übersetzt von G. C. Schmidt. Zweite Auflage. Mit 257 Abbildungen. VI u. 562 S. gr. 8. Leipzig 1907, J. A. Barth. Geh. ℳ 12,—, geb. ℳ 13,—.

W. Nernst, A. Schönflies. Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften. Kurzgefaßtes Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung mit besonderer Berücksichtigung der Chemie. Fünfte Auflage. Mit 69 Figuren. XII u. 371 S. gr. 8. München 1907, R. Oldenbourg. Geh. ℳ 11,—, geb. ℳ 12,50.

H. Burkhardt. Vorlesungen über die Elemente der Differential- und Integralrechnung und ihre Anwendung zur Beschreibung von Naturerscheinungen. Mit 38 Figuren. XI u. 252 S. gr. 8. Leipzig 1907, B. G. Teubner. Geh. ℳ 6,—.

Den drei genannten Werken, von denen das erste in zweiter, das zweite in fünfter Auflage erscheint, eignet die gleiche Tendenz: solche Studierenden in die Prinzipien der höheren Mathematik einführen zu wollen, welchen Differential- und Integralrechnung hauptsächlich als Hilfsmittel zum Studium der Naturwissenschaften dienen soll.

Das Werk des holländischen Physikers ist in erster Auflage bereits im Jahre 1882 erschienen, ist aber nicht als das erste seiner Art anzusprechen,

1) Der Unterzeichnete ließ ein Jahr vor dem Emdenschen Werke im gleichen Verlage ein Büchlein erscheinen: „Elementare kosmische Betrachtungen über das Sonnensystem und Widerlegung der von Kant und Laplace aufgestellten Hypothesen über dessen Entwicklungsgeschichte". Auch dieses Büchlein hat in Herrn Emdens Werke eine hochwissenschaftliche Bestätigung erhalten. Leider sind auf dem ersten Bogen einige Druckfehler stehen geblieben, die jedem Kenner ohne weiteres als solche auffallen. Der Standpunkt, von dem es ausgeht, ist im wesentlichen derselbe wie der des Herrn Emden. Ein mittlerer Zustand wird zwischen der Helmholtzschen und Ritterschen Theorie angenommen. Die kosmischen Staubwolken werden, wie dort, im Schlußworte skizziert.

Digitized by Google

das bekannte Lehrbuch von Autenheimer ist doch noch früheren Datums. Unter den drei genannten dürfte das Lorentzsche Lehrbuch am weitesten gehen, sowohl was die einführenden Kapitel angeht, als auch im Hinblick auf den Umfang des Stoffes. Es beginnt nämlich mit dem binomischen Satz, den Haupteigenschaften der Determinanten, dem Rechnen mit komplexen Größen, den quadratischen Gleichungen, bespricht kurz Partialbruchzerlegung, arithmetische und geometrische Reihen und führt in die Trigonometrie und Vektorenrechnung, in sphärische Trigonometrie und graphische Darstellung goniometrischer Funktionen ein. Auf der anderen Seite geht der Verfasser bis zu den Doppel- und mehrfachen Integralen und behandelt die partielle Integration bei mehrfachen Integralen, wovon eine Anwendung auf die Greenschen Sätze gemacht wird. Aus der Theorie der Differentialgleichungen werden die bekanntesten Methoden mitgeteilt, Systeme von simultanen Differentialgleichungen werden behandelt im Hinblick auf die Bewegungsgleichungen eines Systems materieller Punkte, auch partielle Differentialgleichungen an dem Beispiel der Bewegungen in einer Luftsäule erörtert.

Allen drei Werken gemeinsam ist die Voranstellung eines Exkurses in die analytische Geometrie, und die weitere, bereits von Autenheimer getroffene Anordnung, daß auf einen ersten Teil der Differentialrechnung, der die Differentiation der einfachsten Funktionen gibt, sobald wie möglich die Elemente der Integralrechnung folgen, woran sich ein zweiter Teil der Differential- und der Integralrechnung schließt.

Das dritte Werk dürfte dem Stoffumfange nach am wenigsten bringen; dafür wird hier auf Erörterung prinzipieller Gesichtspunkte um so größerer Wert gelegt. Auf eine Einleitung, die das Wesen der Infinitesimalrechnung erörtert und die Grundbegriffe der Differentialrechnung am Tangentenproblem und an der Fallbewegung entwickelt, folgen Differentiation rationaler Funktionen, Differentiation irrationaler Funktionen, Elemente der Integralrechnung, die Logarithmen und die Exponentialfunktion, Integration rationaler gebrochener Funktionen, Anwendung auf den Verlauf chemischer Vorgänge, höhere Differentialquotienten, Mittelwertsatz und Taylorsche Formel, Interpolation, Rechnen mit Differentialien (unendlich kleinen Größen), Funktionen von zwei Variablen, die trigonometrischen und die zyklometrischen Funktionen. Charakteristisch für das Burkhardtsche Buch ist, daß sein Verfasser verzichtet, die bekannten geometrischen Anwendungen der Integralrechnung zu bringen, daß auf der anderen Seite das Rechnen mit Näherungsformeln ausführlich erörtert wird, wo auch das gerade in der Geodäsie übliche Verfahren zur Umkehrung von Näherungsformeln mitgeteilt wird, und weiter die Interpolation durch ganze rationale und durch trigonometrische Funktionen. Ein Anhang bringt noch die Interpolation durch Exponentialfunktionen. Eine bemerkenswerte Abweichung von der üblichen Darstellung bietet des Verfassers Einführung der Exponentialfunktion und des natürlichen Logarithmus. Herr Burkhardt glaubt dem Chemiker und dem Mineralogen, an welche er dabei denkt, diese Funktionen näher zu bringen, wenn er nicht, wie üblich, vom $\lim \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ ausgeht, sondern den natürlichen Logarithmus, definiert durch das bestimmte Integral, zum Ausgangspunkt nimmt.

Das Werk von Nernst und Schoenflies endlich hält, was Stoffumfang anbetrifft, etwa die Mitte zwischen dem Lorentzschen und dem Burkhardtschen.

Digitized by Google

Auch die fünfte Auflage dieses ausgezeichneten Lehrbuches hat in Plan und Anlage keine wesentlichen Änderungen erfahren.

Berlin. E. Jahnke.

G. Kowalewski. Einführung in die Infinitesimalrechnung mit einer historischen Übersicht. Aus Natur und Geisteswelt Band Nr. 197. Mit 18 Figuren im Text. IV u. 126 S. 8. Geh. ℳ 1,—, geb. ℳ 1,25.

Will sich der Gebildete eine Vorstellung verschaffen von exakter Behandlung der Naturwissenschaften im modernen Sinne, dann ist dies ohne Kenntnis der Infinitesimalrechnung nicht mehr möglich. Es lag daher durchaus im Plane der so ausgezeichneten Sammlung „Aus Natur und Geisteswelt", durch ein besonderes Bändchen in die Grundbegriffe und Hauptsätze dieses Kalküls einzuführen. Dabei stand der Verfasser vor einer nicht leichten Aufgabe. War das Buch mehr auf den mathematischen Studenten zuzurichten, dann mußte die Darstellung so streng wie möglich ausfallen. Eine solche Einführung konnte allerdings auf die anderen Leser nicht ermutigend wirken. Sollte das Bändchen einem weiteren Kreise einen Begriff von dem Wesen der Rechnung mit dem Unendlichen geben, dann mußte auf strenge Begründung des Kalküls verzichtet und an zahlreichen Anwendungen dem Leser die Fruchtbarkeit und Macht des Kalküls vor Augen geführt werden. Der Verfasser hat versucht einen Mittelweg einzuschlagen. Und es muß bemerkt werden, daß seine Darstellung eine ganz ausgezeichnete zu nennen ist, die insbesondere dem mathematischen Studenten nur dringend empfohlen werden kann.

Eine kurze historische Übersicht ist angehängt, welche über die beiden Erfinder der Infinitesimalrechnung, Leibniz und Newton, und ihre Vorläufer berichtet.

Berlin. E. Jahnke.

O. Staude. Analytische Geometrie des Punktes, der geraden Linie und der Ebene. Ein Handbuch zu den Vorlesungen und Übungen über analytische Geometrie. A. u. d. T. Teubners Sammlung von Lehrbüchern aus dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften Bd. XVI. Mit 387 Figuren. VIII u. 447 S. gr. 8. Leipzig 1905, B. G. Teubner. Geb. ℳ 14,—.

Das vorliegende Werk hat der Verfasser einem von ihm in Angriff genommenen Lehrbuche über die Theorie der Flächen 2. O. als Einleitung vorausgeschickt „in ähnlicher Weise, wie es O. Hesse in seinen Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes getan hat." Das Buch umfaßt „in einheitlicher und vergleichender Darstellung die Grundlehren der Koordinatengeometrie in den verschiedenen Mannigfaltigkeiten." Die Abgrenzung des Inhalts ist durch das Stichwort „Lineare Gleichungen und lineare Transformation" gegeben. Der erste Abschnitt behandelt die Punktreihe und den Strahlenbüschel, der zweite die Ebene, der dritte den Raum, den Ebenenbüschel und das Bündel. In jedem dieser drei Abschnitte wird „dem historischen Gange folgend, von dem Begriffe der Kartesischen Koordinaten unter Hervorhebung der einzelnen Schritte der Weiterentwicklung bis zu den projektiven Koordinaten übergegangen und an den Gebilden erster Ordnung die Awendung der verschiedenen Koordinaten gezeigt. Dabei ist weniger eine erschöpfende Behandlung als eine Über-

Digitized by Google

sicht über die für den Gebrauch wichtigsten Begriffe und Methoden angestrebt." — Die Absicht des Verfassers, ein für die Praxis brauchbares Buch zu schaffen, ist glänzend in die Tat umgesetzt. Das Werk ist nicht bloß in der ganzen Anlage durchsichtig disponiert, sondern auch im einzelnen ist die Ausführung so übersichtlich wie nur denkbar; jeder Artikel ist mit einer besonderen, kurzen und treffenden Überschrift versehen, die zahlreichen (387) ungemein sauber ausgeführten Figuren erleichtern eine schnelle Übersicht über die jedesmal in Frage kommenden Begriffe und Benennungen. Häufig gebrauchte Formelsysteme sind vollständig aufgestellt, auch in verschiedenen Bezeichnungsweisen, was bei der praktischen Anwendung des Buches viel Zeit erspart; auch das ausführliche, alphabetische Register am Schlusse ist sehr angenehm. — 35 Seiten sind den im Anhang zugefügten „Anmerkungen" gewidmet. „Die beiden ersten enthalten eine Zusammenstellung derjenigen Sätze über Determinanten und lineare Gleichungen, welche die überall wiederkehrenden analytischen Hilfsmittel für die Betrachtungen des Textes ausmachen ... Die übrigen Anmerkungen enthalten neben Quellenangaben auch vergleichende Übersichten über die verschiedenen Teile des Buches." — Dem vortrefflichen Werke, das jedem, der mit analytischer Geometrie zu tun hat, einen wahren Genuß bereiten wird, ist die weiteste Verbreitung zu wünschen, insbesondere kann es den Studierenden nur aufs wärmste empfohlen werden.

Halensee b. Berlin. P. Zühlke.

O. Hesse. Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der geraden Linie, des Punktes und des Kreises in der Ebene. 4. Aufl. revidiert und ergänzt von S. Gundelfinger. VIII u. 251 S. gr. 8. Leipzig 1906, B. G. Teubner. Geb. ℳ 6,—.

Das klassische Buch von O. Hesse neu herauszugeben, war eine dankbare und schwierige Aufgabe — dankbar, weil die allen Schriften Hesses eigentümliche Art, Strenge mit Eleganz zu vereinigen, zwar schon viele Nachahmer, aber bisher noch keinen wirklich ebenbürtigen Konkurrenten gefunden hat und auf jeden Leser immer wieder ihren besonderen Reiz ausübt — schwierig, weil es sich darum handelte, kleine Mängel, deren Beseitigung die fortschreitende Erkenntnis forderte, so zu beheben, daß die Eigenart des Buches nicht gefährdet wurde.

Dem Bearbeiter ist es gelungen, das bewährte Alte mit pietätvoller Hand den neuen Verhältnissen anzupassen. Die zahlreichen Änderungen im Text bedeuten durchweg Verbesserungen; der schon in der 3. Auflage angebahnte „Ausbau der Zeichenregeln" ist hier konsequent weitergeführt. An solchen Stellen, wo umfangreiche Verbesserungen erforderlich schienen, hat der Bearbeiter auf Änderungen im Text verzichtet, vielmehr auf die am Schlusse zu einem 21 Seiten starken Anhang zusammengestellten Ergänzungen und Zusätze verwiesen, „um den einheitlichen Charakter des Ganzen nicht zu beeinträchtigen."

Dem in seiner Art immer noch unübertroffenen Buche ist von Herzen zu wünschen, daß es auch in der vorliegenden Gestalt die ihm von seinem Verfasser gestellte Aufgabe, „gefällig anzuregen und zu weiteren Entdeckungen zu ermuntern", mit demselben Erfolge wie bisher erfüllen möge.

Halensee b. Berlin. P. Zühlke.

Digitized by Google

Moritz Cantor. **Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.** Erster Band: Von den ältesten Zeiten bis zum Jahre 1200 n. Chr. Dritte Auflage. Mit 114 Figuren u. 1 lithogr. Tafel. VI u. 940 S. gr. 8. Leipzig 1907, B. G. Teubner. Geh. ℳ 24,—, geb. ℳ 26.—.

Als M. Cantor 1898 im 69. Lebensjahre den dritten Band seiner Vorlesungen in die Welt sandte, äußerte er sich in der Einleitung, die wie ein wissenschaftliches Testament klingt, daß sein Anteil an der Geschichte der Mathematik vollendet sei, nur die Herausgabe neuer Auflagen der vorhandenen Bände rechne er noch zu seiner Aufgabe. Jetzt — 10 Jahre später — liegen nicht nur alle drei Bände in zweiter Auflage vor, sondern es ist ein Stab von Mitarbeitern auf seine Anregung gesammelt worden, um einen vierten Band zu schaffen, an dem er auch selbst Hand anlegt. Nunmehr ist sogar der erste Band in dritter Auflage erschienen. Welch reiche Tätigkeit an einem Lebensabend, der wenigen gegeben ist.

Ungeahnt ist die Geschichtsforschung der mathematischen Wissenschaft in dem letzten Jahrzehnt gewachsen. Wo einst M. Cantor die Samen der neuen Wissenschaft legte, ein einsamer Arbeiter auf brachem, aber jungfräulich-fruchtbarem Boden, da glänzt jetzt üppige Saat. Dem Meister ist es beschieden, sich seiner Ernte zu freuen. Ein großer Kreis von Helfern ist ihm entstanden, so groß, daß die geleistete Arbeit insgesamt zu übersehen schon anfängt Schwierigkeiten zu machen. Mit Eifer hat Cantor die neuen Fortschritte nach Möglichkeit beobachtet, sie nach Möglichkeit zur Revision des ersten Bandes benutzt. Und kommen Kritiker und weisen diese oder jene weitere Verbesserungsfähigkeit nach, so ist es ihr Amt; aber sie trüben nicht den gewaltigen Eindruck des großen Werkes, das das feste Fundament unserer Forschung bildet. Man dankt es Eneström, daß er in seiner Bibl. math. nach ideal angelegtem Plan eine Stelle geschaffen hat, an der weitere Ergänzungen und Richtigstellungen in übersichtlicher Weise von den verschiedenen beteiligten Gelehrten zusammengetragen werden. Man fasse die „kleinen Bemerkungen", die dort einlaufen, nicht als kleinliche Nörgelei auf; gerade sie beweisen die Hochachtung vor dem Werke des Altmeisters, sie wollen ihm zur möglichsten Vollkommenheit auch in den kleinsten Einzelheiten verhelfen.

Band Ic ist um 58 Seiten gewachsen. Wo neue Quellenschriften veröffentlicht wurden (Hippokrates, Heron u. a.), sind umfangreiche Überarbeitungen vorgenommen worden. Die babylonische Mathematik ist, den jetzigen Kenntnissen entsprechend, der ägyptischen vorangesetzt. Bei der indischen Mathematik kommen die neueren Forschungen zur Geltung. Die Stellungnahme in der Boëthiusfrage ist geändert u. a. m. In jedem Abschnitt hat die Kleinarbeit eingesetzt, oft nur dem Fachmann sichtbar.

Berlin. J. Tropfke.

Max Simon. **Didaktik und Methodik des Rechnens und der Mathematik.** Zweite, umgearbeitete und vermehrte Auflage. (Sonderausgabe aus Dr. A. Baumeisters „Handbuch der Erziehungs- und Unterrichtslehre für höhere Schulen"). VIII u. 206 S. gr. 8. München 1908, C. H. Beck. Geh. ℳ 4,50, geb. 5,50.

In der ersten Auflage (1895) 128 Seiten stark, ist das vorliegende Werk jetzt auf 206 Seiten gestiegen. Die Zusätze betreffen Darstellung und Kritik

Digitized by Google

der neueren Bestrebungen auf dem Gebiete des mathematischen Unterrichtes, Vermehrung des Literaturmaterials, Ergänzung der historischen Notizen. Der verarbeitete Stoff ist außerordentlich groß und reicht zum Teil weit über das Thema hinaus. Wer Simons Schriften kennt, weiß, daß der Verf. stets aus dem Vollen seiner ureigensten Erfahrung spricht. Die Subjektivität, die das Ganze mit einer aggressiven Frische durchwebt, regt an und fesselt den Leser, nicht zum wenigsten auch durch den Widerspruch, den die vorgetragenen Ansichten hervorrufen. Man wird in sehr vielen Punkten mit Simon nicht einverstanden sein können, und doch imponiert auch dem Andersdenkenden die Wucht der Persönlichkeit, die aus jeder Zeile spricht.

Die Lektüre der Schrift ist nicht leicht; man muß fast schon die Materie beherrschen, wenn man sich durch die aphoristische Darstellung hindurchringen will. Die Einleitung lese man auf keinen Fall zuerst. Eine größere Ausführlichkeit wäre oft angebracht. Die Kritik fremder Ansichten setzt häufig die Vertrautheit des Lesers mit diesen und den betreffenden Schriften voraus, so daß Anfänger oder gar Laien beim besten Willen nicht folgen können. Die vielfachen Verweise auf empfehlenswerte Literatur würden, in Anmerkungen untergebracht, den Zusammenhang weniger stören und könnten dann auch konsequenter ausgebaut werden. Das Hervorheben der eigenen Leistungen behagt selten.

So verdienstvoll die historischen Bemerkungen des Verfassers sind — sie sind bekanntlich die Früchte emsiger eigener Literaturarbeit —, so gehen sie doch an manchen Stellen über den Rahmen einer „Didaktik und Methodik" hinaus. Ich verweise auf den Exkurs über die 60-teilung, die übrigens unglücklicherweise, recht unmotiviert, zwischen die Besprechung der verschiedenen Winkelerklärungen eingeschoben ist, auf die Geschichte der komplexen Größen, auf die der algebraischen Zeichen, die beinahe kleine Sonderabhandlungen bilden. Auf dem Gebiete der Geschichte der Mathematik ist in den letzten Dezennien stark gearbeitet; Simons Angaben entsprechen nicht immer diesen Fortschritten und sind im einzelnen recht verbesserungsfähig. Aber daß er soviel Wert auf die Geschichte der Mathematik im Interesse eines lebendigen Unterrichtes legt, kann nicht hoch genug angerechnet werden, und wem der eigene mathematische Unterricht lieb ist, der folge den Fußtapfen, auf denen Simon vorangeht.

Berlin. J. Tropfke.

W. Ahrens. Briefwechsel zwischen C. G. J. Jacobi und M. H. Jacobi. Mit zwei Bildnissen. XX u. 282. gr. 8. Leipzig 1907, B. G. Teubner. Geh. ℳ 6,90, in Leinwand geb. ℳ 7,50.

Selbst Heine, der ein Gegner der Veröffentlichung von Privatbriefen war, gab zu, daß die Geschichte eines Dichters leicht Aufschluß über sein Gedicht erteilt, und daß sich sehr oft nachweisen ließe, daß „politische Stellung, Religion, Privathaß, Vorurteil und Rücksicht auf seine Gedichte eingewirkt" haben. Gleiches gilt auch für die Mathematiker und Physiker bezüglich ihrer Schriften und Leistungen. Über den erzieherischen Wert geschichtlicher Forschung überhaupt kann kein berechtigter Zweifel aufkommen. Nur der Weg über das Werden führt zum Gewordenen, und solche Briefwechsel bilden neben den Fachwerken selbst die wesentlichen Beweisstücke zur Lebensgeschichte berühmter Männer. Sie zeigen die Fäden, um lose Erscheinungen zu verknüpfen, und klären manches Dunkel auf.

Digitized by Google

Wer die vorliegende Arbeit von W. Ahrens liest, wird dies zugeben müssen. Die Brüder Jacobi gehören dem Hochadel der Wissenschaften an. Sowohl der Berliner Mathematiker als auch der Petersburger Physiker haben Hervorragendes geleistet. Aus dem Briefwechsel entnimmt man, wie sich die Brüder in ihrer Entwicklung beobachteten und gegenseitig beurteilten. Zum Staunen ist es, wie der hochtheoretische Mathematiker die praktischen Leistungen seines Bruders in der Galvanoplastik und in der Elektrotechnik hochschätzte — ein Vorgang, der in der nach gaußschen Periode durch Jahrzehnte aussetzte und erst jüngst wieder hervortrat.

In der Laienwelt war nur der Petersburger Bruder berühmt gewesen, und der Königsberger hat auf seiner italienischen Reise 1843 neidlos die Verwechslung mit seinem Bruder ertragen müssen. Er schrieb ihm:

Das große Volk war überall wieder in wahrer Verzweiflung, daß ich es war und nicht Du; „Monsieur, nous avons beaucoup profité ici de vos procédés de dorure." „Pardon, Monsieur" usw. Deine Verehrerin Mistreß Somerville (die bekannte Physikerin), ein gutmütiges altes Frauchen, war ganz stolz, daß Du ihr von den ersten (galvanoplastischen) Platten geschickt, die sie sich nach Florenz kommen ließ und damit den Großherzog von Toskana in Erstaunen setzte; sie sprach so immerfort bloß von Dir, daß Dirichlet und ich in die größte Heiterkeit kamen, und mir die Dirichlet (die Frau des gleichzeitig in Italien weilenden Mathematikers Dirichlet, eine Schwester Felix Mendelssohns) zu Weihnachten um ihr Geschenk schrieb, al fratello del celebre Jacobi."

Von einer andern Dame mußte er die Frage über sich ergehen lassen: Sind Sie der Bruder des berühmten Jacobi? worauf er schlagfertig entgegnete: Nein, das ist *mein* Bruder.

Neben etwas Scherzhaftem enthalten die Briefe aber Tiefernstes. Das traurige Schicksal des Mathematikers wird wohl bei jedem Leser Teilnahme erwecken.

Das fleißige Buch verdient bei allen Belangnehmenden Aufmerksamkeit und sei ihnen warm empfohlen.

Budapest. Josef Herzog.

Phil. Häfner. Stromverteilungssysteme und Berechnung elektrischer Leitungen. Mit 276 Abbildungen. VIII u. 326 S. 8. Hannover 1906, Dr. Max Jänecke. Geh. ℳ 8,—, geb. ℳ 8,60.

Der Verfasser hält über diesen Gegenstand am Staatstechnikum in Bremen Vorlesungen. Dieses Buch, welches als IX. Band der Repetitorien der Elektrotechnik von A. Königswerther erschien, soll in erster Linie seinen Schülern zur Nachhilfe dienen. Die Gleichstromleitungen werden aus lehrkundiger Rücksicht von jenen für Wechselstrom getrennt behandelt. Nachdem die Verteilungssysteme beschrieben sind, wird auf die Netzermittlungen eingegangen. Ihre widerstandstreue Umbildung wird durch Zahlenbeispiele erläutert. Dem Gleichstrom widmet der Verfasser 220, dem Wechselstrom 95 Seiten. Viele Teile des ersten gelten natürlich dem zweiten auch. Die Probleme des Wechsel- und Drehstromes haben in den langen ober- und unterirdischen Leitungen große Bedeutung erlangt. Da sie aber größere mathematische Kenntnisse erfordern, so wurde auf die Literatur vielfach verwiesen. Den Berechnungen

Digitized by Google

an Leitergebilden sind bereits Gauß, Maxwell, Kirchhoff, Bosscha und andere nachgegangen. Mit der Entwicklung der Starkstromtechnik haben diese Fragen seit 1890 praktische Wichtigkeit erlangt. Die englische Meinung aus jenen Erstlingszeiten, daß es sich dabei bloß um Erweiterungen der Kirchhoffschen Gesetze handelt, mußte dem wachsenden Bedürfnisse weichen. Auch die selbstische Ansicht mancher Maschinenbauer, die der Verbesserung des Maschinen-Wirkungsgrades um 0,5 vom Hundert nicht genug Aufmerksamkeit schenken konnten, dagegen den wirtschaftlich weitgehenderen Bestrebungen beim Leitungsbau fremd, weil ohne Verständnis, gegenüberstanden, ist wohl im allgemeinen verschwunden.

Das Buch erfüllt seinen erstrebten Zweck als erste Einführung in die Leitungsberechnungen.

Budapest. Josef Herzog.

Joannis Verneri de triangulis sphaericis libri quatuor, de meteoroscopiis libri sex cum prooemio G. J. Rhetici. I. De triangulis sphaericis libri quatuor. Von A. A. Björnbo. Mit 1 Bildnis, 12 Seiten Wiedergabe der Einleitung zur Original-Ausgabe, Cracau 1557, in Facsimile und 211 Fig. im Text. III u. 184 S. gr. 8. Leipzig 1907, B. G. Teubner. Geh. ℳ 8,—.

Der Nürnberger Pfarrer Johannes Werner (1468—1528) war ein begeisterter Mathematiker und Astronom, an Befähigung heranreichend an seinen großen älteren Mitbürger Regiomontan (1436—1476). Die Hauptwerke beider, de triangulis libri V des einen, das obige de triangulis sphaericis libri IV des anderen, hatten das gleiche Schicksal, ihre Schöpfer starben über ihnen hinweg. Regiomontans Werk erschien — unvollendet, wie es war — im Druck erst 1533, Werners Manuskript wurde mit Mühe von Freunden aus dem Nachlaß vor dem Untergang gerettet und wanderte dann von Hand zu Hand; ein Versuch des Rhaeticus, es zum Druck zu geben, kam über eine Einleitung nicht hinaus, da Rhaeticus in seinem Opus Palatinum selbst Größeres zu schaffen suchte. Schließlich war das Schriftstück verschollen. Soviel Nachricht ist nur auf uns gekommen, daß Werners Schrift die Dreiecksbücher Regiomontans weit übertraf, daß Werner in ihr rechnerische Methoden (sogenannte prosthaphäretische) schuf, die die Vorläufer logarithmischen Rechnens bilden, und daß das Manuskript auf seinen Wanderungen zuweilen eigennützig, wie von Apian, ausgebeutet wurde. Mit großem Scharfsinn hat unser bester Kenner der Geschichte der Trigonometrie, v. Braunmühl (vgl. dessen Vorlesungen zur Geschichte der Trigonometrie) das Erfinderrecht jener vorlogarithmischen Methoden für Joh. Werner festgelegt. — Jetzt fügt es ein seltener Zufall, daß eine Handschrift des Wernerschen Werkes in der vatikanischen Bibliothek aufgefunden ist. Björnbo, der glückliche Entdecker, ist als Schüler v. Braunmühls besonders berufen, die lange vermißte Schrift in einem Abdruck der Öffentlichkeit zu übergeben. Aller Wahrscheinlichkeit nach ist das gefundene Manuskript eine Reinschrift, die Rhaeticus zu dem Drucke aus den sehr in Unordnung gekommenen Originalblättern des Werner hatte herstellen lassen.

Die Untersuchungen v. Braunmühls finden sich nach Kenntnisnahme des Inhalts glänzend bestätigt. Erst jetzt lernt man die ganze Bedeutung des einfachen Nürnberger Pfarrers kennen. Wäre sein Werk vollendet seiner Zeit

Digitized by Google

übergeben worden, dann hätte die Entwicklung der Trigonometrie ein ganz anderes Tempo eingeschlagen. So brachte erst Vieta (1593), dann die Einführung der Logarithmen (Neper 1614) die Trigonometrie zu einer neuen Blüte.

Berlin. J. Tropfke.

W.-W. Rouse Ball. Histoire des Mathématiques. Edition française revue et augmentée traduite sur la troisième édition anglaise par L. Freund. Paris 1906. A. Hermann. Tome premier. Tome deuxième, avec des additions de R. de Montessus. 1907.

Von W.-W. Rouse Balls Geschichte der Mathematik (3. Aufl. 1901) erschien 1903/4 eine italienische Übersetzung unter Mitwirkung von Loria, jetzt ist auch eine französische Ausgabe veranstaltet. Der Vorlage ist getreu gefolgt; ihre Vorzüge, aber auch Nachteile sind bewahrt. Eine vollzogene Redaktion hat die Fehler des Originals bis zu einem gewissen Grade auszugleichen gesucht; indes sind verschiedene Ausstände, die schon bei der italienischen Ausgabe gemacht worden sind (vgl. Eneström, Bibl. math. V_3, 313), nicht berücksichtigt. — Das Ballsche Werk gibt mehr eine biographische Darstellung; Leben und Werke der einzelnen Mathematiker werden in historischer Folge geschildert. Es fehlt aber der rote Faden, die Betonung des Entwicklungsganges in der Mathematik; hier kann Ball mit unserem Cantor nicht in Wettbewerb treten. Einzelne Kapitel, besonders nach der Neuzeit hin, befriedigen diesen Anspruch mehr. — Bd. I führt bis Huyghens, Bd. II reicht von Newton bis auf die Gegenwart. Anhänge sind: Vieta als Geometer (M. Chasles), Nepers Ablandlungen über die Logarithmen (Biot), Kepler (M. Chasles und J. Bertrand), die Dynamik bei Galilei und Huyghens (Mach, E. Bertrand), Statik (P. Duhem), die geometrischen Methoden (G. Darboux).

Berlin. J. Tropfke.

F. Rudio. Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippokrates. 1. Heft der Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Altertum. Griechisch und deutsch. Mit einem historischen Erläuterungsberichte als Einleitung. Im Anhange ergänzende Urkunden, verbunden durch eine Übersicht über die Geschichte des Problems von der Kreisquadratur vor Euklid. Mit 11 Figuren. X u. 184 S. 8. Leipzig 1907, B. G. Teubner. Steif geh. ℳ 4,80.

Die angezeigte neue Schrift Rudios ist zum Studium sehr empfehlenswert: sie ist ausgezeichnet durch strenge Wissenschaftlichkeit und vollendete Darstellung. Rudio stellt die alten Urkunden zur Kreisquadratur aus der Zeit vor Euklid kritisch zusammen. Im Mittelpunkt steht der bekannte Bericht des Philosophen Simplicius (6. Jahrh. n. Chr.), den dieser zur Erläuterung einer Aristotelesstelle über die Möndchen des Hippokrates verfaßt hatte. Diesen Text rein und in der richtigen Auffassung dargestellt und auf seine Quellen zurückgeführt zu haben, ist Rudios eigenstes Verdienst (vgl. Bibl. math. 3_3 und 4_3).

Vorausgeschickt ist ein historischer Erläuterungsbericht. Der Text des Simplicius ist von einer trefflichen deutschen Übersetzung begleitet. Besonders

Digitized by Google

im Druck hervorgehoben sind die Stellen, die Simplicius der Geschichte der Geometrie von Eudemus (um 320 v. Chr.) wörtlich entnommen hat und die wahrscheinlich zum Teil eine Abhandlung des Hippokrates von Chios (450—430 n. Chr. in Athen) wiedergeben. Die ältere Darstellung Brettschneiders, der zuerst diesen Text als wichtig für die mathematische Geschichtsforschung erkannt hatte, war z. T. widersinnig gewesen und hatte dem Simplicius bei den Mathematikern den Ruf eines höchst ungeschickten, ja unfähigen Menschen zugezogen. Rudios Textkritik und Deutung bestätigt jetzt das Ansehen, das Simplicius bei unseren modernen Philosophen als „trefflicher Aristoteleserklärer" genießt.

In einem Anhange gibt Rudio weitere Urkunden zur Geschichte der Kreisquadratur (über Anaxagoras, Hipparch, Antiphon, Bryson, Hippias), immer im Original und in gleichmäßig guter Übersetzung. Sehr willkommen ist das Wörterverzeichnis am Schluß.

Als erstes Heft eines neuen Verlagunternehmens der Firma B. G. Teubner „Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Altertum" führt sich der vorliegende Band aufs beste ein.

Berlin. J. Tropfke.

Fritz Krauss. Die Thermodynamik der Dampfmaschinen. Mit 17 Figuren. VIII u. 142 S. 8. Berlin 1907, Julius Springer. Geh. ℳ 3,—

Die kleine Schrift könnte als das Buch von der Entropie bezeichnet werden, denn diese ist es, deren Behandlung sich der Verfasser mit der vorliegenden Arbeit hauptsächlich zur Aufgabe gemacht hat. An dem Beispiel einer Dampfmaschinenanlage, welche von Anfang bis zu Ende zahlenmäßig durchgerechnet wird, versucht der Verfasser zu zeigen, auf welche Weise sich der Satz vom Zuwachs der Entropie bei der Betrachtung des Arbeitsprozesses in dessen aufeinanderfolgenden Abschnitten darstellt. Es liegt ein Körnchen Wahrheit darin, wenn Verfasser — vielleicht in etwas zu schroffer Weise — behauptet: „Für den Begriff der Entropie sind mancherlei Definitionen versucht worden, von denen viele die Eigentümlichkeit haben vollkommen unverständlich zu sein; die verständlichen Definitionen sind dagegen zum großen Teile unrichtig". Daß es nicht ganz einfach ist den Begriff der Entropie zu erklären, beweist Verfasser selber dadurch, daß er seiner eigenen Erklärung zwei volle Kapitel von zusammen 24 Seiten widmet. Es muß aber anerkannt werden, daß es ihm, hauptsächlich mit Hilfe des genau durchgerechneten Zahlenbeispieles, gelungen ist, den unanschaulichen, schwer mit Worten zu erklärenden Begriff dem Verständnis näher zu bringen, und es dürfte auch für viele Fachleute neu und fesselnd sein durch die auf Seite 115 übersichtlich zusammengestellten Ergebnisse des durchgerechneten Beispieles zu erfahren, wo und in welcher Höhe die bekannten großen Arbeitsverluste bei der Erzeugung des Dampfes und seiner Verwertung in der Dampfmaschine auftreten.

Das klar geschriebene kleine Buch kann nicht bloß Theoretikern, sondern auch allen in der Praxis stehenden Dampfmaschinen-Ingenieuren und Besitzern von Dampfmaschinenanlagen angelegentlich empfohlen werden.

Grunewald. R. Vater.

Digitized by Google

Wegner-Dallwitz. Die Explosions-Gasturbine als Reaktionsturbine (als einstufiger Schnelläufer!) in Theorie und Konstruktion. Mit 8 Abbildungen. 55 S. 8. Rostock i. M. 1908, C. I. E. Volckmann Nachfolger. Geh. ℳ 1,50.

Hätte Verfasser seine Studie auf das theoretische Gebiet beschränkt, so wäre die Abhandlung vielleicht ganz fesselnd zu lesen gewesen. Da sie aber darauf zugeschnitten ist, nicht nur eine überhaupt mögliche Ausführbarkeit der beschriebenen Explosions-Gasturbine nachzuweisen, sondern sogar auch nachzuweisen, daß eine solche Turbine „unübertreffbar einfach und wohl auch leicht und billig ist" (S. 53), so muß denn doch dagegen Einspruch erhoben werden. Recht kühn behauptet der Herr Verfasser in dem Vorwort mit Rücksicht auf die verwickelte Bauart der bisher (nebenbei bemerkt fast durchgängig wohl nur auf dem Papier) vorhandenen Gasturbinen: „Die durchgreifende Vereinfachung ist nun gelungen!" Sieht man sich aber am Schlusse des Buches in Tabelle IV die Ergebnisse der eingehenden Berechnung an, so findet man unter anderem Folgendes: Die „unübertreffbar einfache" Turbine besitzt z. B. bei einer Leistung von nur 100 PS ein Rad von vier Meter Durchmesser und arbeitet selbst dann noch mit 2325, ja sogar unter Umständen mit 4750 Umdrehungen in der Minute (!), eine Turbine von 1000 PS bei einem Raddurchmesser von 3 m mit 1590 bis 3180 Umdrehungen in der Minute. Daß sich bei Materialbeanspruchungen, wie sie hier auftreten, und den daraus sich ergebenden hohen Material- und Herstellungskosten eine Maschinenfabrik bereitfinden würde eine solche Turbine auch nur zur Probe zu bauen, möchte ich bezweifeln. Die Gründe für die Mißerfolge der berühmten und sicherlich interessanten Riedler-Stumpf-Turbine scheinen dem Herrn Verfasser unbekannt geblieben zu sein.

Grunewald. R. Vater.

Tapla. Grundzüge der niederen Geodäsie. III. Kartierung. Mit 14 lith. Taf. VII u. 107 S. gr. 8. Wien 1906, Fr. Deuticke. Geh. ℳ 3,50.

Das sehr eingehend und klar geschriebene Buch bespricht zunächst in erschöpfender Weise die Kartierung der Vermessungsergebnisse mit gewöhnlichen Zeichenrequisiten und besonderen Kartierungsapparaten. Es folgt sodann ein für die Praxis in verständiger Kürze geschriebenes Kapitel über Ausgleichungsrechnung. Ausführlich wird dann die Kartierung der Polygonzüge, Dreiecksketten und -Netze, sowohl mit den gebräuchlichen Kartierungsapparaten, als auch durch Rechnung besprochen.

Die Triangulationen IV. Ordnung, die Netz- und Punkteinschaltungen sind hauptsächlich nach Näherungsmethoden behandelt, dem praktischen Zwecke des Buches entsprechend. Es ist jedoch auch der Weg zur strengen Ausgleichung der Dreiecke höherer Ordnung in allgemeinen Zügen gezeigt.

Einige Beispiele aus der Praxis wären erwünscht gewesen, obgleich jeder praktische Landmesser, für den das Buch ja geschrieben ist, seine Berechnungen nach der gegebenen Anleitung mit Leichtigkeit durchführen kann.

Vierzehn bequeme mit dem Text zu vergleichende Tafeln erläutern die Darstellung in anschaulicher Weise.

Berlin. K. Fuhrmann.

Digitized by Google

Klauser und Lahn. Lehrbuch der Vermessungskunde. Für den Gebrauch an Gewerbeschulen zugleich als Hilfsbuch für Bau- und Maschinen-Techniker usw. Bearbeitet und herausgegeben von Alfons Cappilleri. 3. Auflage. Mit 109 Figuren und 1 Tafel. VI und 138 S. gr. 8. Wien 1906, F. Deuticke. Geh. ℳ 3,—.

Das Lehrbuch enthält in den drei Hauptabschnitten: I. das Feldmessen, II. das Nivellieren, III. das Situationszeichnen und die Terraindarstellung und einen Anhang: „Praktische Anwendungen des Feldmessens und Nivellierens", eine Übersicht über die wesentlichsten Gebiete der Vermessungskunde in einem dem Zwecke des Lehrbuches entsprechenden Umfange. Die leichtfaßliche Darstellung wird in hinreichender Weise durch gute Figuren unterstützt.

Eine besondere Tafel „Konventionelle Bezeichnungen für Situationspläne" enthält die Darstellung des Geländes nach den österreichischen Katastralvorschriften. Bei der Besprechung des Theodolits §§ 51—54 hätte wohl, ohne den Umfang des Buches zu sehr zu erweitern, der *Repetitions-Theodolit* und die entsprechende Winkelmessung kurz erläutert oder wenigstens erwähnt werden müssen.

Zu § 67 ist zu bemerken, daß der Punkt c durch Seitwärtsabschneiden einfacher gefunden wird, indem man zu dem Strahl $c'B$, welcher den Punkt b *nicht* schneidet, durch b die Parallele und endgültige Linie bc zieht. —

Die in § 112 gegebene Formel für Inhaltsberechnung nach Koordinaten läßt sich auf eine für die Rechnung bequemere Form bringen;

$$2F = \sum[y_n (x_{n+1} - x_{n-1})], \quad -2F = \sum[x_n (y_{n+1} - y_{n-1})].$$

Man bekommt hiernach den Inhalt *zweimal* und hat eine Kontrolle.

Für das „Nivellieren aus der Mitte" §§ 146 wäre ein *Nivellementsprotokoll* erwünscht, welches sowohl die Koten der Endpunkte als auch die der Zwischenpunkte gibt.

Zu dem „Protokoll einer tachymetrischen Aufnahme" § 151 wäre auf Tafelwerke aufmerksam zu machen, z. B.: „Hilfstafeln für Tachymetrie von Jordan, Stuttgart J. B. Metzler 1899."

In diesen ist die Höhe H' nicht aus der Distanz D', sondern aus dem Lattenabschnitt L berechnet:

$$H' = (c + kL)\,\tfrac{1}{2}\sin 2\alpha$$

und dementsprechend aus Tafeln für $\cos^2\alpha$ und $\frac{1}{2}\sin 2\alpha$ berechnet.

Zu § 156 wäre zu erwähnen, daß die Höhe des Auf- und Abtragens wohl nicht immer berechnet zu werden braucht, sondern auf dem überhöhten Profil direkt abgegriffen werden kann.

Berlin. K. Fuhrmann.

H. Soyka. Präzisions-Winkellineal. Berlin 1908, F. Ashelm. ℳ 0,50.

Das Präzisions-Winkellinial enthält einen Transporteur und Maßstab sowie Parabel, Ellipse und Hyperbel nebst ihren Bestimmungsstücken. Brennpunkte, Achsen und Leitlinien sind ohne weiteres ablesbar. Der Apparat dürfte sich für den Unterricht in der analytischen Geometrie als recht brauchbar erweisen

Berlin. E. Jahnke.

Digitized by Google

J. Schick. Barytomik. Mit Fig. und 1 Tafel. 78 S. gr. 8. München 1907, G. Franz. Geh. ℳ 2.—.

Sei P ein beliebiger Punkt in der Ebene des Dreiecks ABC, auf dessen Seiten von P aus Lote gefällt werden. Die Fußpunkte dieser Lote bestimmen das zu P gehörige Fußpunktendreieck mit den Seiten a_1, b_1, c_1. Dann untersucht der Verfasser Fragen der folgenden Art: Wann ist $la_1^2 + mb_1^2 + nc_1^2$ konstant?

Was an der Arbeit auffällt, ist die Fülle neuer, hochtönender Namen für „olle Kamellen". Weshalb „Barytome" oder „apikale Querlinie" für Ecktransversale, „Doppelbarytome" für beliebige Transversale, wo doch unter Transversale allgemein eine beliebige Gerade in der Ebene des Dreiecks verstanden wird? „Barytomenpol" für Transversalenschnittpunkt? „Pedaler Ort" für Ort der Fußpunkte?

Berlin. E. Jahnke.

H. Neikes. Der goldene Schnitt und die „Geheimnisse der Cheopspyramide". Mit 1 Tafel. 20 S. 8. Cöln 1907, M. Du Mont-Schauberg. Geh. ℳ 1,20.

Als Max Eyth noch Baschmahandi in Oberägypten war, fiel das Buch des schottischen Astronomen Piazzi-Smyth über die Cheopspyramide in seine Hände. Hier las er, daß die Höhe der Pyramide sich zum Umfang der quadratischen Grundfläche verhalte wie der Halbmesser zum Kreisumfange, genau bis zur fünften Dezimale, womit der Nachweis erbracht sei, daß dem Erbauer der Cheopspyramide die Zahl π bereits bekannt gewesen sei. Die Begeisterung über diese Mitteilungen von Smyth packte den Oberingenieur derart, daß er sich hinsetzte und den wundervollen Roman „Der Kampf um die Cheopspyramide" schrieb. Ein neues Opfer pyramidaler Begeisterung ist Herr Neikes. Er findet, daß die Cheopspyramide „nach dem Maßverhältnis des goldenen Schnitts" erbaut sei, daß „das in England noch heute in Geltung befindliche Längenmaß, der englische Fuß, beim Bau der Cheopspyramide die Maßeinheit gewesen sei, und daß dieses Maß demnach von den alten Ägyptern auf die Engländer auf einem wohl schwer festzustellenden Wege übergegangen ist." „Es wird damit aber auch bewiesen, daß der Erbauer der Pyramide das wunderbare Maßverhältnis des goldenen Schnitts sehr genau und besser gekannt hat, als die größten Baukünstler späterer Zeiten bis auf den heutigen Tag."

Berlin. E. Jahnke.

M. Abraham und A. Föppl. Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität I. Dritte Auflage. Mit 11 Figuren. XVIII u. 460 S. gr. 8. Leipzig 1907, B. G. Teubner. Geb. ℳ 12,—.

Nach kurzer Frist ist bereits eine neue Auflage der Abrahamschen Neubearbeitung notwendig geworden, ein Beweis einmal für die Vortrefflichkeit des Werkes, andererseits aber ein erfreuliches Zeichen dafür, daß die Zahl der Physiker, Techniker und Mathematiker, die der Maxwellschen Theorie Interesse entgegenbringen und sich mit der Vektorsprache befreundet haben, im Wachsen begriffen ist.

Berlin. E. Jahnke.

Digitized by Google

Ratschläge und Erläuterungen für die Studierenden der Mathematik und Physik an der Universität Göttingen. Herausgegeben von der Direktion des mathematisch-physikalischen Seminars. Mit einem Anhang: Statuten des mathematischen Lesezimmers. Neue Ausgabe. 31 S. gr. 8. Leipzig 1907, B. G. Teubner. Geh. *M* 1,—.

„Die Schrift enthält eine übersichtliche Beschreibung der an der Göttinger Universität bestehenden Unterrichtseinrichtungen für Mathematik und Physik, welche die Studierenden dieser Fächer nach Möglichkeit über den Umfang dieser Einrichtungen und ihre spezifische Bedeutung und Wechselbeziehung aufklären und ihnen dadurch die sachgemäße Einrichtung ihrer Studien erleichtern soll." Die Schrift legt Zeugnis ab für die rastlose Fürsorge, welche den Mathematik und Physik Studierenden an der Göttinger Universität entgegengebracht wird, in wohltuendem Gegensatz zu der Zurückhaltung der mathematischen Professoren an mancher anderen Universität gegenüber ihren Studenten.

Berlin. E. Jahnke.

B. G. Teubners Verlag auf dem Gebiete der Mathematik, Naturwissenschaften und Technik nebst Grenzwissenschaften.[1]) CXXXI u. 392 u. *92* S. gr. 8. Leipzig 1908, B. G. Teubner.

Dem vierten internationalen Mathematiker-Kongreß zu Rom gewidmet, legt der vornehm ausgestattete Band auf 392 Seiten beredtes Zeugnis ab von dem Streben der Weltfirma, ihren Verlag auf dem Gebiete der mathematischen, naturwissenschaftlichen und technischen Disziplinen mehr und mehr auszugestalten und zu vertiefen.

Der Katalog beginnt mit einer Einführung, welche auf 37 Seiten des Näheren darlegt, wie sich der B. G. Teubnersche Verlag im Zusammenhang mit den Fortschritten der mathematischen Wissenschaft, der Naturwissenschaft und der Technik, im Zusammenhang mit dem Aufschwung des Unterrichtswesens an Hoch- und Mittelschulen und an technischen Lehranstalten entwickelt hat.

Es folgt ein alphabetisch geordnetes Verzeichnis aller seiner bisher veröffentlichten, bzw. unter der Presse oder in Vorbereitung befindlichen Werke, wobei ein kurzes Stichwort schnell über Inhalt, Umfang und wissenschaftliche Richtung des Buches unterrichtet.

Eine Zierde des Katalogs bilden die beigegebenen Bildnisse einiger der Hauptvertreter des Teubnerschen Verlags, von G. Galilei, H. Bruns, M. Cantor, F. R. Helmert, F. Klein, Fr. Kohlrausch, K. Kraepelin, C. Neumann, A. Penck und A. Wüllner, unter denen Galileis Bild nach dem Gemälde von Sustermans in den Uffizien besondere Anerkennung finden dürfte.

Eine sehr willkommene Beigabe bietet das angefügte Gedenktagebuch für Mathematiker, welches Herr Felix Müller mit bekannter Sorgfalt zusammengestellt hat.

Berlin. E. Jahnke.

1) Die Verlagshandlung ist gern bereit, jedem, der sich noch nicht im Besitze des Kataloges befindet, auf Wunsch ein Exemplar zu übersenden.

Digitized by Google

Vermischte Mitteilungen.

1. Aufgaben und Lehrsätze. Lösungen.

A. Aufgaben und Lehrsätze.

202. Ist n eine ganze rationale Zahl, $\varphi(n)$ die Anzahl der unterhalb n gelegenen, zu n relativ primen Zahlen, p ein Primfaktor von n und bezeichnet $\nu_p(m)$ allgemein den Exponenten der höchsten Potenz von p, die in $m!$ aufgeht, so ist

$$\frac{\varphi(n)}{p-1} = \sum_d \mu_d \cdot \nu_p\binom{n}{d},$$

wo μ_d den Möbiusschen Zahlenkoeffizienten bezeichnet und die Summation sich über alle Divisoren von n erstreckt.

Wenn p kein Primfaktor von n ist, so bezeichnet die Summe auf der rechten Seite den Exponenten der höchsten Potenz von p, die in dem Produkt der $\varphi(n)$ unterhalb n gelegenen zu n relativ primen Zahlen aufgeht.

Berlin. W. JÄNICHEN.

203. Ist wieder p ein Primteiler von n und bezeichnet allgemein $q_p(m)$ die Ziffernsumme, die man erhält, wenn man m im Zahlensystem mit der Basis p schreibt, so ist

$$\sum_d \mu_d \cdot q_p\binom{n}{d} = 0.$$

Berlin. W. JÄNICHEN.

204. Es sei $\mu_1, \mu_2, \cdots \mu_n$ eine Basis im Gebiet $\mathfrak{g}$ der ganzen algebraischen Zahlen eines algebraischen Körpers und $\nu_1, \nu_2, \cdots \nu_n$ die Basis eines Ideals $\mathfrak{j}$ von $\mathfrak{g}$, wobei

$$\nu_r = a_{r1}\mu_1 + a_{r2}\mu_2 + \cdots + a_{rn}\mu_n$$

ist für $r = 1, 2, \cdots n$. Bezeichnet dann A_{rs} die zu dem Element a_{rs} komplementäre Unterdeterminante der Determinante

$$\pm N(\mathfrak{j}) = |a_{rs}|$$

und k die kleinste in $\mathfrak{j}$ enthaltene ganze rationale Zahl, so ist $\frac{N(\mathfrak{j})}{k}$ der größte gemeinsame Teiler aller n^2 Unterdeterminanten A_{rs}.

Berlin. W. JÄNICHEN.

Digitized by Google

205. Konstruiert man um den Flächenpunkt P einer positiv gekrümmten Fläche F eine unendlich kleine Kugel, so liegen die Flächennormalen von F, die in den Punkten der Schnittkurve beider Flächen errichtet sind und für die die Entfernung von der Flächennormalen in P ein Extremwert ist, in zwei konjugierten Normalschnitten, die unter allen konjugierten Schnitten den größtmöglichen Winkel einschließen.

Berlin. W. JÄNICHEN.

206. Mit Hilfe der Ausgleichungsrechnung diejenige Kurve $y = a + b \sin \lambda x$ zu finden, die sich den Werten

$x =$	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
$y =$	13	15	17	12	8	2	4	6	9	12	12

am besten anschließt. — Lassen die übrigbleibenden Fehler eine weitere Periodizität (eine übergelagerte kürzere Periode) als wahrscheinlich erscheinen?

Potsdam. OTTO MEISSNER.

207. Es sollen in der Gleichung $y = ax^\alpha + bx^\beta$, in der x und y rechtwinklige Kartesische Koordinaten bedeuten, die Werte a, α, b und β so gewählt werden, daß sich die Kurve zwischen $x = 1$ und $x = 2$

a) der Exponentialfunktion $y = e^x$,

b) der Sinuslinie $y = \sin x$

möglichst eng anschließt. Ferner ist die Maximal- und die durchschnittliche Abweichung beider Ordinaten voneinander zu bestimmen.

Potsdam. OTTO MEISSNER.

208. Um das Doppelintegral

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{dx\,dy}{1-xy}$$

auszuwerten, kann man die Reihenentwicklung

$$\frac{1}{1-xy} = 1 + xy + x^2y^2 + x^3y^3 + \cdots$$

benutzen und erhält alsdann seinen Wert in Form der unendlichen Reihe:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots,$$

deren Summe bekanntlich $\frac{\pi^2}{6}$ ist. Die Gleichung

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{dx\,dy}{1-xy} = \frac{\pi^2}{6}$$

soll *ohne Benutzung der Summenformel*

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

hergeleitet und damit ein Beweis für diese gegeben werden.

Hannover. P. STÄCKEL.

Digitized by Google

209. Alle Geraden der Ebene, welche aus zwei achsenparallelen Parabeln P_1 und P_2 Sehnen von gleicher Länge ausschneiden, hüllen eine dritte Parabel P ein, die mit P_1 und P_2 auch achsenparallel ist und denselben Ähnlichkeitspunkt hat. Die Halbparameter p_1, p_2 und p dieser drei Parabeln stehen zueinander in einer sehr einfachen Beziehung.

Wie lautet der entsprechende Satz, wenn die Achsen von P_1 und P_2 antiparallel sind?

Aussig (Böhmen). stud. math. J. Krug.

210. Zieht man vom Schwerpunkte eines beliebigen Dreiecks, dessen Seiten a, b, c und dessen Winkel α, β, γ sind, zu den drei Eckpunkten die Strecken a', b', c', welche untereinander die Winkel α', β', γ' bilden $(\alpha' + \beta' + \gamma' = 2\pi)$, so bestehen folgende Doppelgleichungen:

1) $$\cot\alpha - \cot\alpha' = \cot\beta - \cot\beta' = \cot\gamma - \cot\gamma',$$

2) $$\frac{\sin(\alpha' - \alpha)}{aa'} = \frac{\sin(\beta' - \beta)}{bb'} = \frac{\sin(\gamma' - \gamma)}{cc'},$$

3) $$\frac{a'r_1}{a} = \frac{b'r_2}{b} = \frac{c'r_3}{c}.$$

r_1, r_2, r_3 sind die Umkreisradien der Teildreiecke.

Aussig, Böhmen. stud. math. Jos. Krug.

211. (Seitenstück zu **149**, X, 327, E. Lampe). — Zwei in einer Ebene gegebene Gerade schneiden sich in C unter dem Winkel γ; im Punkte P einer beliebigen Kurve K werden zu diesen Geraden Parallele gezogen, welche diese in A und B treffen. Der Flächeninhalt des Parallelogramms $PACB$ sei F. Sieht man von dem Falle $F = 0$ ab, so hat F einen größten oder kleinsten Wert 1) dann, wenn P eine Spitze der Kurve ist, 2) wenn der zwischen den gegebenen Geraden gelegene Abschnitt der in P an die Kurve gelegten Tangente in P halbiert wird.

Aussig (Böhmen). stud. math. Josef Krug.

212. Bekanntlich bestimmt ein Kegelschnittbüschel auf jeder Geraden g seiner Ebene eine Involution. Man kann vermittels dieser Involution die Büschelkegelschnitte so in Paare ordnen, daß die zugehörigen Punktpaare der Involution einander harmonisch trennen. K', K'' sei ein solches Kegelschnittpaar. Als Polkegelschnitt P der Geraden g bezeichnet man den Ort ihrer Pole für die Büschelkegelschnitte. P geht, wie bekannt, durch die Doppelpunkte der oben erwähnten Involution. Es soll nun bewiesen werden, daß die drei Pole der Geraden g nämlich für K', K'' und P auf einer geraden Linie liegen; und zwar wird der letztgenannte Pol durch die beiden anderen harmonisch von der Geraden g getrennt.

Langendreer, den 29. November 1907. F. Borgehold.

Digitized by Google

213. Es sind zwei Kreise K (Mittelpunktskoordinaten $\frac{1}{2}p$, $\frac{1}{2}q$; Radius $r = \frac{1}{2}\sqrt{p^2+q^2}$) und K′ (Mittelp.-K. m, 0; Radius R) gegeben; auf K ein Punkt O (Koordinaten 0, 0). Irgend ein Strahl durch O schneide K in P, K′ in P'. Man beweise, daß der Ort der Punkte Q auf OP, für welche $OQ = OP' - OP$, die Fußpunktkurve eines Mittelpunktkegelschnittes, wenn K′ in eine Gerade ausartet, einer Parabel ist. (Vgl. die Aufgaben **154**, Bd. X, 328 u. **183**, Bd. XII, 186).

Speyer. H. Wieleitner.

214. Auf einem Rotationssphäroid ist eine stetige Kurve gezogen; in den Schnittpunkten derselben mit den Meridianen werden an das Sphäroid die Meridiantangenten gelegt. Man diskutiere das System von Regelflächen, welches entsteht, wenn man die Ausgangskurve variieren läßt, und greife aus dem System von Regelflächen besonders einfache Fälle heraus.

Augsburg, im Juli 1907. Franz Joh. Müller.

---

215. Die partielle Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \left(a + b\,\frac{\partial z}{\partial s}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}$$

zu lösen, wo a und b Konstanten bedeuten.

Augsburg, im Juli 1907. Franz Joh. Müller.

---

216. Gegeben sind die Hebelarme l_1 und l_2 ihrer Länge nach; sie sind gegeneinander unter einem bestimmten Winkel φ geneigt, starr miteinander verbunden und um den Punkt O drehbar.

Im Punkt A des Hebels l_1 wirkt eine Kraft P mit konstanter vertikaler Richtung, während am Endpunkte B des Hebels l_2 eine zweite Kraft p angreift, welche auf Grund äußerer Vorrichtungen nur im horizontalen Sinne wirken kann.

Versteht man unter a und b die augenblicklichen Momentenarme der beiden Kräfte P und p, so ist $p = \frac{a}{b}P$. Trägt man nun diesen Quotienten $\frac{a}{b}P$, der sich mit jeder Hebelstellung ändert, über der Horizontalprojektion der entsprechenden, jedesmaligen Stellung des Hebels l_2 als Ordinate auf, so erhält man eine Kurve, aus der sich p [für ein konstantes P] für jede Stellung entnehmen läßt.

Man diskutiere diese Kurve so, daß dieselbe graphisch dargestellt werden kann.

NB! Die Kurve findet im Eisenbahnwagenbau [automatisch auslösbare Wagentreppe] Verwendung.

Augsburg, im Juli 1907. Franz Joh. Müller.

Digitized by Google

217. Aus der Funktionalgleichung $\frac{\varphi(x)}{\varphi\left(\frac{1}{x}\right)} = f(x)$ erhält man zu jeder vorgegebenen Funktion $\varphi(x)$ in trivialer Weise die Funktion $f(x)$. Unter welcher Bedingung läßt sich die Gleichung umgekehrt nach φ auflösen und wie gestaltet sich die Auflösung?

München. A. WENDLER.

218. Man bestimme die Gleichung einer *Strophoide* (rationale zirkulare Kubik, deren Tangenten im Doppelpunkt aufeinander senkrecht stehen), wenn gegeben sind der singuläre Brennpunkt O, ein beliebiger Kurvenpunkt D und die Tangente in ihm, sowie eine durch D gehende Gerade g, auf der der Doppelpunkt der Kurve liegen soll. Wie läßt sich die Kurve aus diesen Stücken konstruieren?

Schw. Gmünd. E. KÖSTLIN.

219. Die orthogonalen Projektionen ω_1, ω_2, ω_3 eines im Raume gelegenen rechten Winkels ω auf drei festgedachte, zueinander senkrechte Ebenen sind voneinander unabhängig. Es ist zu zeigen, daß umgekehrt zu drei beliebig gegebenen Projektionswinkeln ω_1, ω_2, ω_3 noch drei Paare zugehöriger rechter Winkel ω existieren. Welche Determinationen bestehen zwischen ω_1, ω_2, ω_3, damit wenigstens ein Paar von Lösungen ω reell ist?

Können überhaupt zwei, oder gar alle drei Paare von Lösungen ω reell sein?

Königsberg i. P. W. FR. MEYER.

220. Man verstehe unter x_n die mit der Variabeln x und dem Parameter a gebildete $n$te Faktorielle:

$$x_n = x(x+a)(x+2a)\cdots\{x+(n-1)a\}.$$

Ist dann y_n die analoge, mit einer Variabeln y und demselben Parameter a gebildete Faktorielle, so gilt bekanntlich, als Erweiterung des binomischen Satzes, die Formel:

$$x_n + \binom{n}{1} x_{n-1} y_1 + \binom{n}{2} x_{n-2} y_2 + \cdots + \binom{n}{1} x_1 y_{n-1} + y_n = (x+y)_n,$$

die unschwer vermöge vollständiger Induktion beweisbar ist.

Tiefer liegt folgende Relation mit *alternierenden* Vorzeichen, wo n eine gerade natürliche Zahl, $= 2l$, bedeutet:

$$x_n - \binom{n}{1} x_{n-1} x_1 + \binom{n}{2} x_{n-2} x_2 - + \cdots + x_n = (2a)^l \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2l-1) x_l.$$

Diese Relation ist zu beweisen.

Königsberg i. P. W. FR. MEYER.

221. Seien x, y, z rechtwinklige kartesische Koordinaten eines Raumpunktes; es sollen die Flächen $\varphi(x, y, z) = 0$, die der linearen partiellen Differentialgleichung $y\frac{\partial \varphi}{\partial x} + x\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$ genügen, analytisch wie geometrisch in einfacher Weise charakterisiert werden. Die in Rede stehenden Flächen bilden eine Art Seitenstück zu den Rotationsflächen.

Königsberg i. P. W. FR. MEYER.

Digitized by Google

222. Seit Lagrange kennt man den innigen Zusammenhang zwischen der Fundamentalformel der sphärischen Trigonometrie:

$$\text{(I)} \qquad \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

mit einer gewissen Form des Additionstheorems der elliptischen Funktionen. Welche Form des Additionstheorems entspricht dann der *Polarformel* zu (I)? Schwierigkeit bereitet dabei die richtige Deutung eines Vorzeichens.

Königsberg i. P. W. Fr. Meyer.

223. In der Invariantentheorie wird man auf die lineare partielle Differentialgleichung geführt:

$$a_0 \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + 2 a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} + 3 a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial a_3} + \cdots + n a_{n-1} \frac{\partial \varphi}{\partial a_n} = -1 ,$$

wo φ als abhängige, die $a_1, a_2, \ldots, a_n$ als unabhängige Variable anzusehen sind, a_0 als eine Konstante.

Welches ist die allgemeine Lösung der Gleichung? Man suche zu dem Behuf n unabhängige Partikularlösungen.

Königsberg i. P. W. Fr. Meyer.

224. Es seien $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_r$ ganze positive Zahlen, von denen keine null ist. Man bilde die Produkte:

$$f_i(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_r) = \binom{\alpha_1 + i}{i}\binom{\alpha_2 + i}{i} \cdots \binom{\alpha_r + i}{i} \qquad i = 0, 1, 2, \cdots$$

und mit ihnen die Zahlen:

$$g_k(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_r) = f_{k-1} - \binom{k}{1} f_{k-2} + \binom{k}{2} f_{k-3} - \cdots + (-1)^{k-1} \binom{k}{1} f_0 . \qquad k = 1, 2, 3, \cdots$$

Dann besteht der Satz:

1. *Es ist* $g_k(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_r) = 0$, *sobald* $k > \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r$ *ist.*

Man berechne ferner die Zahlen

$$p(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_r) = g_1 - g_2 + g_3 - g_4 + \cdots$$
$$q(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_r) = g_1 - \tfrac{1}{2} g_2 + \tfrac{1}{3} g_3 - \tfrac{1}{4} g_4 + \cdots$$

Beide Reihen auf der rechten Seite brechen nach dem eben ausgesprochenen Satze ab und es gelten die Sätze:

2. *Es ist* $p(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_r) = 0$, *sobald* $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \alpha_r > r$ *ist. Ist aber* $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots \alpha_r = r$, *also alle* α *gleich* 1, *so ist* $p(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_r) = (-1)^{r-1}$.
3. *Es ist* $q(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_r) = 0$, *sobald* $r > 1$ *ist. Ist aber* $r = 1$, *so ist* $q(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$.

Straßburg i. E. Paul Epstein.

225. Es soll der Grenzwert:

$$\lim_{x=0} \frac{S_{p,x}}{x} = \lim_{x=0} \frac{\left(\frac{1}{1}\right)^p + \left(\frac{1}{2}\right)^p + \left(\frac{1}{3}\right)^p + \cdots + \left(\frac{1}{x}\right)^p}{x}$$

bestimmt werden.

Göttingen. Hermann Filzer.

Digitized by Google

226. Es seien $a_1, a_2, \cdots, a_n$ voneinander verschiedene ganze Zahlen. Es soll bewiesen werden, daß die Funktion

$$(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n) - 1$$

stets irreduzibel ist. Ferner soll untersucht weiden, in welchen Fällen die Funktion

$$(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n) + 1$$

reduzibel ist.

Berlin. I. Schur.

B. Lösungen.

183 (Bd. XII, S. 186) (H. Wieleitner). — **a)** *Zwei Kreise mit den Mittelpunkten O und O' haben, auf OO' gemessen, die Durchmesser AB = 2R, A'B' = 2r; A'O sei gleich a. Man ziehe durch A' irgend einen Strahl, der die Kreise bez. in Q, Q' schneidet, und mache A'P = A'Q − A'Q', so beschreibt P im allgemeinen eine bizirkulare Quartik mit Doppelpunkt in A'. Welche Beziehungen müssen zwischen R, r und a bestehen, damit die erzeugte Kurve 1) eine Pascalsche Schnecke, 2) eine Bernoullische Lemniskate sei?*

b) *Wenn sich die beiden Kreise B (= B') berühren, so entsteht in A' eine Spitze. Man drücke die Fläche der so entstandenen Kurve durch R und r aus, und zwar 1) bei innerer, 2) bei äußerer Berührung.*

Zu **a).** Man nimmt A' zum Anfangspunkt, $O'O$ zur x-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems, dann lauten die Gleichungen der beiden Kreise:

$$O(R) \equiv (x - a)^2 + y^2 - R^2 = 0, \qquad O'(r) \equiv (x - r)^2 + y^2 - r^2 = 0,$$

wenn die Punkte auf OO' in der Reihenfolge $AA'B'B$ liegen. Diese Kreise bringt man mit der Geraden $y = mx$ zum Schnitt; es sei $Q \equiv (x_1, y_1)$ und $Q' \equiv (x_1', y_1')$. Dann ergibt sich

$$x_1 = \frac{a \pm \sqrt{(1+m)^2 R^2 - m^2 a^2}}{1 + m^2}, \quad x_1' = \frac{2r}{1 + m^2},$$

ferner wird

$$A'Q = x_1 \cdot \sqrt{1 + m^2} = \frac{a \pm \sqrt{(1+m^2) R^2 - m^2 a^2}}{\sqrt{1 + m^2}},$$

$$A'Q' = x_1' \cdot \sqrt{1 + m^2} = \frac{2r}{\sqrt{1 + m^2}}.$$

Damit erhält man

$$A'P = \varrho = A'Q - A'Q' = \frac{1}{\sqrt{1 + m^2}} \left(a \pm \sqrt{(1 + m^2) R^2 - m^2 a^2} - 2r\right),$$

$$(1 + m^2)\,\varrho^2 - 2(a - 2r)\sqrt{1 + m^2} \cdot \varrho + (a - 2r)^2 = (1 + m^2) R^2 - m^2 a^2;$$

da aber $m = \operatorname{tg} \varphi$ ist, so ist die letzte Gleichung die Ortsgleichung für P in Polarkoordinaten ϱ, φ, wobei $B'A'$ die positive Richtung der Polarachse ist; diese Gleichung läßt sich in folgende Form bringen:

$$(1) \qquad \varrho^2 - 2(a - 2r)\,\varrho \cos \varphi + (a - 2r)^2 \cos^2 \varphi = R^2 - a^2 \sin^2 \varphi.$$

1) Um zu erkennen, in welchem Fall man eine Pascalsche Schnecke erhält, vergleicht man (1) mit der Polargleichung dieser Kurve, die auf die Form $(\varrho + b \cos \varphi)^2 = c^2$ gebracht werden kann; man setzt deshalb (1) in folgende Form

$$\varrho^2 - 2(a - 2r)\,\varrho \cos \varphi + (4r^2 - 4ar) \cos^2 \varphi = R^2 - a^2.$$

Digitized by Google

Soll hier die linke Seite ein vollständiges Quadrat werden, so ist dies nur möglich für $a = 0$; dann erhält man aus (1) als Gleichung der Kurve

$$(\varrho + 2r\cos\varphi)^2 = R^2.$$

Geht also der Kreis $O'(r)$ durch O hindurch, so daß A' mit O zusammenfällt, so erhält man eine Pascalsche Schnecke, und man erkennt leicht, daß die hier vorgenommene Konstruktion mit der üblichen identisch wird, wobei man durch einen Punkt (A') eines Kreises $(O'(r))$ Sekanten zieht und vom zweiten Schnittpunkt (Q') aus darauf eine konstante Strecke $(A'Q = R)$ abträgt. Es ist zu beachten, daß bei der hier erhaltenen Gleichung die positive Polarachse vom Pol A' aus der Kurve heraustritt.

2) Man vergleicht jetzt (1) mit der Polargleichung der Bernoullischen Lemniskate $\varrho^2 = 2c^2\cos 2\varphi$ und erkennt, daß zunächst $a - 2r = 0$ sein muß; dies gibt aus (1): $\varrho^2 = R^2 - a^2\sin^2\varphi$; nimmt man hier noch $R = \frac{a}{2}\sqrt{2}$, so wird $\varrho^2 = \frac{a^2}{2}(1 - 2\sin^2\varphi) = \frac{a^2}{2}\cos 2\varphi$. Es sind also $r = \frac{a}{2}$, $R = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ die Bedingungen für die Lemniskate, und man erkennt, daß hier $c = \frac{a}{2}$ wird, so daß also O' der eine Brennpunkt der Kurve ist. — Die Konstruktion wird dann im wesentlichen mit derjenigen identisch, wobei man durch den Schnittpunkt (A') zweier zu einander senkrechten Tangenten an einen Kreis $(O(R))$ Sekanten zieht und auf ihnen vom Schnittpunkt aus die Kreissehnen abträgt. Denn man erhält offenbar auch dann eine Lemniskate, wenn man irgend ein Vielfaches der Kreissehnen abträgt, und im vorliegenden Fall sind es die halben Sehnen.

Zu **b).** 1) Im Falle der inneren Berührung wird $a = 2r - R$. Damit geht die Kurvengleichung (1) in folgende über:

$$\varrho^2 + 2R\varrho\cos\varphi + 4r(R - r)\sin^2\varphi = 0.$$

Hieraus erhält man $\varrho = -R\cos\varphi \pm \sqrt{R^2 - (2r - R)^2\sin^2\varphi}$,

$\varrho^2 = 2(R^2 - 2Rr + 2r^2)\cos^2\varphi + 4r(R - r) \pm 2R^2\cos\varphi\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}$ $[k = (2r - R)/R]$.

Mit Rücksicht auf die Symmetrie der Kurve gegen die Polarachse ist dann die Fläche $F = \int_0^{\pi} \varrho^2 d\varphi = J_1 + J_2 \pm J_3$, wo die Bedeutung der drei Integrale J_1, J_2, J_3 aus dem Wert von ϱ^2 erhellt. Man erhält dann

$$J_1 = 2(R^2 - 2Rr + 2r^2)\int_0^{\pi}\cos^2\varphi\, d\varphi$$

$$= 2(R^2 - 2Rr + 2r^2)\left[\tfrac{1}{4}\sin 2\varphi + \tfrac{1}{2}\right]_0^{\pi} = (R^2 - 2Rr + 2r^2)\pi,$$

$$J_2 = 4r(R - r)\int_0^{\pi} d\varphi = 4r(R - r)\pi,$$

$$J_3 = 2R^2\int_0^{\pi}\cos\varphi\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi = 2R^2\left(\int_0^{\frac{1}{2}\pi} + \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi}\right) = 0,$$

Digitized by Google

wie man erkennt, wenn man im zweiten Integral $\varphi = \pi - \psi$ setzt. Das war übrigens wegen des doppelten Vorzeichens von J_2 zu erwarten. Daher ist schließlich $F = (R^2 + 2Rr - 2r^2)\pi$. Für $R = 2r$ wird $a = 0$; die Kurve wird zur Kardioide. Für ihre Fläche ergibt sich aus F richtig der bekannte Wert $6r^2\pi$.

2) Bei äußerer Berührung ist $a = 2r + R$. Damit nimmt (1) die Gestalt an: $\varrho^2 - 2R\varrho\cos\varphi + 4R(R+r)\sin^2\varphi = 0$. Daraus folgt durch Auflösung nach ϱ:

$$\begin{aligned}\varrho &= R\cos\varphi \pm \sqrt{R^2\cos^2\varphi - 4R(R+r)\sin^2\varphi} \\ &= R\cos\varphi \pm \sqrt{R^2 - (R+2r)^2\sin^2\varphi}\,, \\ \varrho^2 &= 2(R^2 + 2Rr + 2r^2)\cos^2\varphi - 4r(R+r) \\ &\quad \pm 2R\cos\varphi\sqrt{R^2 - (R+2r)^2\sin^2\varphi}\,.\end{aligned}$$

ϱ und ϱ^2 sind also reell und zweideutig für $\sin^2\varphi < \frac{R^2}{(R+2r)^2}$ und für $\sin\varphi_0 = \pm\frac{R}{R+2r}$ ergibt sich nur ein Wert ϱ, der den Berührungspunkten der Kurve mit den von A' an $O(R)$ gehenden Tangenten entspricht. Dem Teil der Kurve zwischen diesen Punkten, der die Spitze A' enthält, entspricht der Wert ϱ_- mit dem Minuszeichen, dem andern Teil der Wert ϱ_+ mit dem Pluszeichen. Wegen der Symmetrie der Kurve gegen die Polarachse ist dann die Fläche

$$\begin{aligned}F &= \int_0^{\varphi_0}\varrho_+^2\,d\varphi + \int_{\varphi_0}^{0}\varrho_-^2\,d\varphi = \int_0^{\varphi_0}(\varrho_+^2 - \varrho_-^2)\,d\varphi \\ &= 4R\int_0^{\varphi_0}\cos\varphi\sqrt{R^2 - (R^2+2r)^2\sin^2\varphi}\cdot d\varphi \\ &= 4R^2\int_0^{\varphi_0}\frac{\cos\varphi\,(1-k^2\sin^2\varphi)}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\cdot d\varphi\,, \quad k = \frac{R+2r}{R}\,.\end{aligned}$$

Führt man $\sin^2\varphi = u$ ein und bemerkt, daß sich für φ_0 ergibt $\sin^2\varphi_0 = u_0 = \frac{R^2}{(R+2r)^2} = \frac{1}{k^2}$, so wird

$$\begin{aligned}&\int_0^{\varphi_0}\frac{\cos\varphi\,(1-k^2\sin^2\varphi)}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\cdot d\varphi = \tfrac{1}{2}\int_0^{u_0}\frac{1-k^2u}{\sqrt{u(1-k^2u)}}\cdot du \\ &= \tfrac{1}{2}\left[\sqrt{u(1-k^2u)} + \frac{1}{2k}\arcsin(2k^2u-1)\right]_0^{\frac{1}{k^2}} \\ &= \frac{1}{4k}(\arcsin 1 - \arcsin(-1)) = \frac{R\pi}{4(R+2r)}\,,\end{aligned}$$

also erhält man $F = \frac{R}{R+2r}\cdot R^2\pi$.

Schorndorf (Württemberg). C. Hoffmann.

Digitized by Google

Zusatz. Man kann auch im ersten Falle ($a = 2r - R$) die Bemerkung machen, daß $F = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\varrho_+^2 + \varrho_-^2)\,d\varphi$. Dadurch erübrigt sich die Betrachtung des Integrals J_3, das sofort herausfällt.

Speyer. H. Wieleitner.

Ähnliche Lösungen sind noch von den Herren W. Stegemann (Prenzlau) und O. Degel (Bayreuth) eingelaufen. Red.

2. Anfragen und Antworten.

(Vacat.)

3. Kleinere Notizen.

A propos d'un article de M. H. Bateman.

(Note bibliographique.)

I. Dans une note récente[1]), M. H. Bateman a démontré que par une droite multiple d'ordre $n - 2$ d'une surface d'ordre n, on peut mener $3n - 4$ plans tangents à cette surface. La démonstration donnée ne diffère pas de celle que M. Stuyvaert publia il y a six ans.

II. Voici la bibliographie de la question:

1. R. Sturm. *Über die Flächen mit einer endlichen Zahl von (einfachen) Geraden, vorzugsweise die der vierten und fünften Ordnung.* (Math. Ann. 1871, t. IV, pp. 249—283).
2. Murer. *Generazione della superficie d'ordine n con retta $(n-2)$-pla.* (Rendiconti di Palermo, 1888, t. II, pp. 107—109).
3. G. Fouret. *Sur le nombre de plans tangents que l'on peut mener à une surface algébrique par une droite multiple de cette surface.* (Rendiconti di Palermo, 1894, t. VIII, pp. 203—208).
4. M. Stuyvaert. *Sur quelques surfaces algébriques engendrées par des courbes du second et du troisième ordre. Dissertation inaugurale.* (Gand, Librairie Hoste, 1902, p. 13.)
5. J. De Vries. *Right lines on surfaces with multiple right lines.* (Proceedings of Amsterdam, 28 avril 1902, pp. 577—583.)
6. L. Godeaux. *Notes de Géométrie.* (Mémoires de la Société des Sciences de Liége, 1908, 3e série, tome VIII (à ajouter).)
7. Salmon-Chemin. *Géométrie Analytique à trois dimensions.* 3e partie, p. 92.

III. Picquet a démontré (*Mémoires sur les courbes et surfaces anallagmatiques.* Assoc. Franç. pour l'Avanc. des Sciences, Congrès de Paris. 1878, p. 119) que pour $n = 4$, les huit points de contact des plans tangents menés par la droite double sont huit points associés; pour $n = 5$, les onze points de contact sont sur une quadrique.

Liége. L. Godeaux.

1) *The tangent planes which can be drawn to an algebraic surface from a multiple line.* Archiv der Math. und Phys. (3) **13**, S. 48—51, 1908.

Digitized by Google

Die n-te Ableitung eines Quotienten.

Während für die n-te Ableitung eines Produktes uv zweier Funktionen die Leibnizsche Formel

$$(1) \qquad (uv)^{(n)} = \sum \binom{n}{\varkappa} u^{(n)} v^{(n-\varkappa)}$$

die explizite Darstellung durch die Ableitungen von u und v ergibt, pflegt eine Darstellung für die n-te Ableitung eines Quotienten in den Lehrbüchern nicht gegeben zu werden. Die Formel selbst ist natürlich längst bekannt; unter anderem wird sie bei Hoüel im ersten Bande des Cours de calcul différential et intégral bewiesen, und daher wird sie von Herrn J. N. Hatzidakis[1]) für einen ganz anderen Zweck ohne weiteres benutzt.

Sie lautet nämlich

$$(2) \qquad \left(\frac{u}{v}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n}{v^{n+1}} \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \dots & v_\varkappa \dots & v_n & u_n \\ v & 2v_1 & 3v_2 \dots & \varkappa v_{\varkappa-1} \dots & n v_{n-1} & u_{n-1} \\ 0 & v & 6v_2 \dots & \binom{\varkappa}{2} v_{\varkappa-2} \dots & \binom{n}{2} v_{n-2} & \binom{n}{2} u_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & v & u \end{vmatrix},$$

Hierin bedeuten $v_\varkappa$ und $u_\varkappa$ die $\varkappa$-ten Ableitungen von v und u.

Diese Gleichung ist richtig für $n = 1, 2$, und es läßt sich durch zweckmäßige Anwendung des Schlusses von n auf $n+1$ ihre Allgemeingültigkeit am einfachsten nachweisen. Zunächst ist offenbar, daß, wenn ihre Gültigkeit für $u = 1$ dargetan ist, ihre Richtigkeit auch für einen beliebigen Zähler u aufrecht erhalten bleibt, weil die Entwickelung nach den Gliedern der letzten Spalte mit der Leibnizschen Formel

$$\left(u \cdot \frac{1}{v}\right)^n = \sum \binom{n}{\varkappa} u^{(\varkappa)} \left(\frac{1}{v}\right)^{(n-\varkappa)}$$

sich als identisch erweist. Hiernach kann man, die Gültigkeit der Entwickelung

$$(3) \qquad \left(\frac{1}{v}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n}{v^{n+1}} \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \dots & v_n \\ v & 2v_1 & 3v_2 \dots & n v_{n-1} \\ 0 & v & 6v_2 \dots & \binom{n}{2} v_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot \cdot \cdot & v \end{vmatrix}$$

vorausgesetzt, auf folgende Weise zum Nachweise der weiteren Gültigkeit gelangen. Es ist

$$\left(\frac{1}{v}\right)^{(n+1)} = -\left(\frac{v'}{v^2}\right)^{(n)} = -\left(\frac{v'/v}{v}\right)^n.$$

1) J. N. Hatzidakis. Über invariante Differentialausdrücke. J. für Math. **104**, 102.

Digitized by Google

Da die Formel (2) gültig ist, wenn Formel (3) besteht, so kann man, $u = \frac{v'}{v}$ setzend, folgenden Ansatz machen:

$$(4)\quad \left(\frac{1}{v}\right)^{(n+1)} = \frac{(-1)^{(n+1)}}{v^{n+1}} \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & \dots & v_\varkappa \dots & v_n & \left(\frac{v'}{v}\right)^{(n)} \\ v & 2v_1 & 3v_2 \dots & \varkappa v_{\varkappa-1} \dots & n v_{n-1} & n\left(\frac{v'}{v}\right)^{(n-1)} & \\ 0 & v & 6v_2 \dots \binom{\varkappa}{2} v_{\varkappa-2} \dots \binom{n}{2} v_{n-2} & \binom{n}{2}\left(\frac{v'}{v}\right)^{(n-2)} & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & v & \frac{v'}{v} & \end{vmatrix}$$

Entwickelt man die Differentialquotienten der letzten Spalte nach der Leibnizschen Formel, so erhält das Glied der $(\lambda+1)$-ten Zeile die Form

$$\binom{n}{\lambda} \sum_{\varkappa=0}^{n-\lambda} \binom{n}{\varkappa} v^{n+1} \left(\frac{1}{v}\right)^{n-\lambda-\varkappa}.$$

Multipliziert man nun die $(\varkappa+1)$te Spalte mit $\binom{n}{\varkappa}\left(\frac{1}{v}\right)^{n-\varkappa}$ und addiert diese Glieder (summiert über $\varkappa = 0, 1, \dots n-1$) zur n-ten Spalte, so nimmt diese die Form an

$$\binom{n}{\lambda}\frac{v^{n+1-\lambda}}{v} + \sum_{0}^{n-1}\left(\frac{1}{v}\right)^{(n-\varkappa)} v^{(\varkappa-\lambda+1}\left[\binom{n}{\lambda}\binom{n-\lambda}{\varkappa-\lambda} - \binom{n}{\varkappa}\binom{\varkappa+1}{\lambda}\right].$$

Nun ist

$$\binom{n}{\lambda}\binom{n-\lambda}{\varkappa-\lambda} - \binom{n}{\varkappa}\binom{\varkappa+1}{\lambda} = -\binom{n}{\lambda-1}\binom{n-1}{\varkappa-\lambda}.$$

Man erhält also als allgemeines Glied:

$$\binom{n}{\lambda}\frac{v^{n+1-\lambda}}{v} - \binom{n}{\lambda-1}\sum_{\varkappa=0}^{n-1}\binom{n-\lambda+1}{\varkappa-\lambda}\left(\frac{1}{v}\right)^{n-\lambda-(\varkappa-\lambda)} v^{\varkappa-\lambda+1}.$$

Nun ist aber

$$\sum_{\varkappa=\lambda-1}^{n}\binom{n-\lambda+1}{\varkappa-\lambda+1}\left(\frac{1}{v}\right)^{n-\lambda-(\varkappa-\lambda)} v^{\varkappa-\lambda+1} = \left(v\cdot\frac{1}{v}\right)^{n-\lambda+1} = 0.$$

Daher erhält man als Ausdruck des Elements in der $(n+1)$-ten Spalte und $(\lambda+1)$-ten Reihe

$$\binom{n}{\lambda-1}\frac{v^{n-\lambda+1}}{v} + \binom{n}{\lambda}\frac{v^{n+1-\lambda}}{v} = \binom{n+1}{\lambda}\frac{v^{n+1-\lambda}}{v}.$$

Setzt man diesen Wert in die Formel (4) ein, so erhält man einen Ausdruck, der aus (3) dadurch hervorgeht, daß n durch $(n+1)$ ersetzt ist. Damit ist auch die allgemeine Gültigkeit der Formel (2) dargetan.

Digitized by Google

Aus der Richtigkeit der Formel (2) ergeben sich die von Herrn Hatzidakis gefundenen Ergebnisse unmittelbar. Sucht man, wie a. a. O. ausgeführt, Differentialausdrücke n-ter Ordnung dreier Funktionen X, Y, Z einer Variablen, die bei einer Transformation

$$X' = wx', \qquad X' = wy', \qquad Z' = wz', \tag{5}$$

in welcher w einen beliebigen Faktor bedeutet, invariant bleiben, so gehören dazu naturgemäß alle Ableitungen der Quotienten $\frac{X'}{S'}, \frac{Y'}{S'}, \frac{Z'}{S'}$, wobei

$$S' = \sqrt{X'^2 + Y'^2 + Z'^2} = ws' \tag{5a}$$

gesetzt ist. Soll nun die Funktion $F(X', Y', Z', \dots X^{(n)}, Y^{(n)}, Z^{(n)})$ invariant sein gegenüber der Transformation (1), d. h. nach ihrer Anwendung in

$$w^l F(x', y', z', \dots x^{(n)}, y^{(n)}, z^{(n)})$$

übergehen, so denke man sie sich auf die Form gebracht

$$f\left(S', S'', \dots S^{(n)}, \frac{X'}{S'}, \frac{Y'}{S'}, \frac{Z'}{S'}, \dots \left(\frac{X'}{S'}\right)^{(n-1)}, \dots \left(\frac{Z'}{S'}\right)^{(n-1)}\right).$$

In dieser Funktion sind die Argumente absolut invariant bis auf die Größen S', S'', $\dots S^{(n)}$. Die Entwickelung von $S^{(n)}$ durch wiederholte Differentiation von (5a) zeigt, daß in dem Ausdruck von f die $(n-1)$te Ableitung der willkürlichen Funktion w auftritt, während in der transformierten Funktion

$$w^l f\left(s', s'', \dots s^{(n)}, \frac{x'}{s'}, \dots \left(\frac{1'}{s'}\right)^{(n-1)}\right)$$

keine Ableitung von w auftritt. Es müssen daher die Koeffizienten von $S^{(n)} (n > 1)$ in f alle verschwinden.

Alle invarianten Differentialausdrücke im Hatzidakisschen Sinne sind in der Form enthalten:

$$f\left(S', \frac{X'}{S'}, \frac{Y'}{S'}, \frac{Z'}{S'}, \dots \left(\frac{Z'}{S'}\right)^{(n-1)}\right).$$

Dies ist aber nur in der Bezeichnungsweise von dem Hauptergebnis der angegebenen Arbeit verschieden.

Berlin. E. Salkowski.

4. Bei der Redaktion eingegangene Bücher.

Andrews, W. S. Magic squares and cubes. Chicago 1908, The open court publishing company.

Arnoux, G. Arithmétique graphique. Les espaces arithmétiques, leurs transformations. 84 S. Paris 1908, Gauthier-Villars. *Fr.* 3.—.

Atti della Società italiana per il progresso delle scienze. Prima riunione. Parma. Settembre 1907. Roma 1908.

Baire, R. Leçons sur les théories générales de l'analyse. Tome II: Variables complexes. Applications géométriques. 347 S. Paris 1908, Gauthier-Villars. *Fr.* 12.—.

Börsch, A. Bericht über Lotabweichungen. 29 S. Leiden 1908, E. J. Brill.

Czuber, E. Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. 2. Aufl. in 2 Bänden. I. Band: Wahrscheinlichkeitstheorie, Fehlerausgleichung, Kollektivmaßlehre. Mit 18 Figuren. X + 410 S. gr. 8. Leipzig 1908, B. G. Teubner. Geb. *M* 12.—.

Digitized by Google

Fuss, K. und Hensold, G. Lehrbuch der Physik. 8. Auflage. 558 S. 8. Freiburg i. B. 1908, Herder. ℳ 6.—.

Häring, G. Lehrbuch der analytischen Geometrie der Ebene für die Oberstufe der höheren Lehranstalten und zum Selbstunterricht. VII + 59 S. 8. München 1908, R. Oldenbourg. ℳ 0.90.

Junker, Fr. Höhere Analysis. II. Teil: Integralrechnung. 3. Auflage. 190 S. 8. Leipzig 1908, G. J. Göschen. ℳ 0.80.

Jouguet, E. Lectures de mécanique. La mécanique enseignée par les auteurs originaux. 1e partie: La naissance de la mécanique. X + 210 S. 8. Paris 1908, Gauthier-Villars. *Fr.* 7.50.

Kleiber, J. Experimental-Physik für die Unterstufe. Zum Gebrauch an bayer. Realschulen. 216 S. 8. München 1908, R. Oldenbourg.

Lesser, O. Graphische Darstellungen im Mathematikunterricht der höheren Schulen. Eine Sammlung von Materialien für die Hand des Lehrers. 108 S. 8. Leipzig 1908, G. Freytag. ℳ 5.—.

von Lilienthal, R. Vorlesungen über Differentialgeometrie. In 2 Bänden. I. Band: Kurventheorie. Mit 26 Figuren. VI + 368 S. gr. 8. Leipzig 1908. B. G. Teubner. Geb. ℳ 12.—.

Lummer, O. On the temperature and structure of the sun. Address delivered by invitation before the Philosophical Society of Washington, March 21, 1907. Philos. Soc. Washington **15**, 75—101.

Mathematisch-Physikalische Schriften für Ingenieure und Studierende, herausgegeben von E. Jahnke. 8. Leipzig 1908, B. G. Teubner.

1. R. Gans, Einführung in die Theorie des Magnetismus. 40 Textfig. VI + 110 S. Geh. ℳ 2.40, geb. ℳ 2.80.
2. K. W. Wagner, Elektromagnetische Ausgleichsvorgänge in Freileitungen und Kabeln. 23 Textfig. IV + 109 S. Geh. ℳ 2.40, geb. ℳ 2.80.
3. Cl. Schaefer, Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität und des Magnetismus. 32 Textfig. VIII + 174 S. Geh. ℳ 3.40, geb. ℳ 3.80.

Müller, E. Lehrbuch der darstellenden Geometrie für Technische Hochschulen. I. 273 Textfig. XIV + 368 S. gr. 8. Leipzig 1908, B. G. Teubner. Geb. ℳ 12.—.

Onoranze al Prof. Alfonso Sella. Roma 1908, Tipografia Nazionale.

Planck, M. Das Prinzip der Erhaltung der Energie. Von der philosophischen Fakultät Göttingen preisgekrönt. 2. Aufl. XVI + 278 S. gr. 8. Leipzig 1908, B. G. Teubner. Geb. ℳ 6.—.

Runge, C. Analytische Geometrie der Ebene. Mit 75 Figuren. IV + 198 S. gr. 8. Leipzig 1908, B. G. Teubner. Geb. ℳ 6.—.

Sachs, J. Tafeln zum mathematischen Unterricht. II + 120 S. gr. 8. Leipzig 1908, B. G. Teubner. Geb. ℳ 6.—.

Schnee, W. Über irreguläre Potenzreihen und Dirichletsche Reihen. I. Teil. Diss. Berlin 1908.

Schwering-Krimphoff, Ebene Geometrie. 6. Auflage. 138 S. Freiburg i. B., 1908, Herder. ℳ 2.20.

Thomae, J. Vorlesungen über bestimmte Integrale und die Fourierschen Reihen. Mit 10 Figuren. VI + 182 S. gr. 8. Leipzig 1908, B. G. Teubner. Geb. ℳ 7.80.

Villard, P. Les rayons cathodiques. Scientia No. 10. 2ième édition. Paris 1908, Gauthier-Villars. *Fr.* 2.—.

Voigt, W. Magneto- und Elektrooptik. 75 Textfig. XIV + 396 S. Leipzig 1908. B. G. Teubner. Geb. ℳ 14.—.

Wigand, A. Statik und Kinetik der Umwandlung im flüssigen Schwefel und die Schmelzwärme des monoklinen Schwefels. Leipzig 1908, W. Engelmann.

Digitized by Google

Nernst, W. und Schönflies, A., Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften. Von J. Jahnke . . . S. 347
Ratschläge und Erläuterungen für die Studierenden der Mathematik und Physik an der Universität Göttingen. Von E. Jahnke . . . 360
Rudio, F., Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippokrates. Von J. Tropfke . . . 355
Schick, J., Barytometrie. Von E. Jahnke . . . 359
Simon, Max, Didaktik und Methodik des Rechnens und der Mathematik. Von J. Tropfke . . . 361
Soyka, H., Praktisches Winkelmaß. Von F. Jahnke . . . 348
Stande, O., Analytische Geometrie des Punktes, der geraden Linie und der Ebene. Von P. Dahlke . . . 349
Tapia, Grundzüge der modernen Geodäsie. Von K. Fuhrmann . . . S. 347
Taubners, B. G., Verlag auf dem Gebiete der Mathematik, Naturwissenschaften und Technik neue Grenzwissenschaften. Von E. Jahnke . . . 360
Verneri, Joannis, de triangulis sphaericis libri quatuor, de meteoroscopis libri sex cum prooemio G. J. Rhetici. I. De triangulis sphaericis libri quatuor. Hrsg. von A. A. Björnbo. Von J. Tropfke . . . 354
Wagner-Dallwitz, Die Explosions-Gasturbine als Reaktionsturbine mit einstufiger Schaufelräderung in Theorie und Konstruktion. Von K. Vater . . . 347
Young, W. H., and Young, Grace Chisholm, The theory of sets of points. Von A. Scheeffer . . . 353

Vermischte Mitteilungen . . . 361

1. Aufgaben und Lehrsätze. Lösungen.
A. Aufgaben und Lehrsätze. 202. Von W. Jänichen. S. 361. — 203. Von W. Jänichen. S. 361. — 204. Von W. Jänichen. S. 361. — 205. Von W. Jänichen. S. 362. — 206. Von O. Meißner. S. 362. — 207. Von O. Meißner. S. 362. — 208. Von P. Stäckel. S. 362. — 209. Von J. Krug. S. 363. — 210. Von J. Krug. S. 363. — 211. Von J. Krug. S. 363. — 212. Von F. Poegehold. S. 363. — 213. Von H. Wieleitner. S. 364. — 214. Von F. J. Müller. S. 364. — 215. Von F. J. Müller. S. 364. — 216. Von F. J. Müller. S. 364. — 217. Von A. Wendler. S. 365. — 218. Von E. Kostlin. S. 365. — 219. Von W. Fr. Meyer. S. 365. — 220. Von W. Fr. Meyer. S. 365. — 221. Von W. Fr. Meyer. S. 365. — 222. Von W. Fr. Meyer. S. 366. — 223. Von W. Fr. Meyer. S. 366. — 224. Von P. Epstein. S. 366. — 225. Von H. Filzer. S. 366. — 226. Von I. Schur. S. 367.
B. Lösungen. Zu 188 (H. Wieleitner) von C. Hoffmann, W. Stegemann, O. Hegel und H. Wieleitner. S. 367.
2. Aufgaben und Antworten. (Vacat)
3. Kleinere Notizen. A propos d'un article de M. H. Bateman. Von L. Godeaux. S. 370. — Die sechs Ableitung eines Quotienten. Von E. Salkowski. S. 371
4. Bei der Redaktion eingegangene Bücher . . . 373

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft. Anhang Seite 89

68. Sitzung am 24. Juni 1908 . . . 89
Über das Auflösungsproblem im logischen Klassenkalkul. Von Leopold Löwenheim . . . 89—94
Über einige Ungleichungen. Von L. Lewent . . . 95—101
Bemerkung zu meinem Vortrage in der Sitzung am 26. Februar 1908 (VII, 50—61). Von Georg Wallenberg . . . 101
Mitglieder-Verzeichnis . . . 107—110

Eingelaufen sind und zum Abdruck in den nächsten Heften gelangen Beiträge der Herren

O. Biermann, P. Boedke, F. Boegehold, P. Ernst, E. Foethke, W. Godt, Philip E. B. Jourdain, W. Kluge, G. A. Miller, J. Neuberg, J. V. Pexider, E. Rath, R. Remak, H. Reißner, C. Rodenberg, F. Rogel, L. Saalschütz, E. Salkowski, O. Schenker, A. Schmid, C. Schmidt, H. Schumacher, O. Spieß, E. Steinitz, J. Valyi, A. Wendler, M. Winkelmann, M. Zacharias, E. Ziehmke.

Eingelaufene Lösungen. Zu 51 (E. N. Barisien) von E. N. Barisien und cand. math. W. Gaedecke. — Zu 64 (E. N. Barisien) von cand. math. W. Gaedecke. — Zu 95 (E. N. Barisien) von cand. math. W. Gaedecke. — Zu 186 (J. Neuberg) von cand. math. W. Gaedecke. — Zu 186 (W. F. Meyer) von O. Hegel. — Zu 190 (H. Wieleitner) von cand. math. W. Gaedecke, O. Berkhan, C. Hoffmann, W. Stegemann, E. Kostlin, O. Hegel und H. Wieleitner. — Zu 194 (J. Krug) von W. Heymann. — Zu 195 (J. Krug) von stud. math. A. Schmid (Göttingen). — Zu 196 (H. Wieleitner) von O. Hegel. — Zu 197 (H. Wieleitner) von O. Hegel und stud. math. H. Filzer (Göttingen). — Zu 201 (H. Wieferich) von cand. math. W. Gaedecke.

VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG UND BERLIN.

Soeben erschien:

DER KLEINE GEOMETER.

VON

G. C. YOUNG UND **W. H. YOUNG.**

Deutsche Ausgabe besorgt von S. und F. Bernstein.

Mit 127 Textfiguren und 8 bunten Tafeln. In Leinwand geb. ℳ 8.—

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin.

Beiträge zur Theorie der linearen Transformationen als Einleitung in die algebraische Invariantentheorie

von Hofrat Dr. **W. Scheibner,**
Professor an der Universität Leipzig

gr. 8. 1908. Geh. n. ℳ 10.—

Die vorliegen[de] ist zumeist aus älteren Vorlesungsaufzeichnungen des Verfassers entstand[en] scheint vornehmlich jüngeren Mathematikern den Zugang zu einer in den letz[ten] Jahren zu immer größerer Tragweite erwachsenen Disziplin zu erleichtern[.] dieses Maß von Anschauung und rechnerischer Gewandtheit dürfte die Beherrsch[ung] behandelten Stoffes, trotz seines vielfach elementaren Charakters, auf seit[en] diesseits immerhin in Anspruch nehmen. In den einzelnen Abschnitten w[ird] handelt: 1. Die lineare Transformation ganzer Funktionen 2. Anwendungen au[f die] orie der algebraischen Gleichungen 2., 3., 4. Grades. 3. Die Reduktion [der] Differentiale. 4. Die Gleichungen 5. und 6. Grades. Ferner anhangsweis[e] Eigenschaften der Kreisverwandtschaft, insbesondere der reziproken Radien [und] genannte Tschirnhaus-Transformation. 7. Die Auflösung der Ikosaederglöich[ung] e lineare Transformation der Thetafunktionen und elliptischen Modulfunkt[ionen] Eingehende historische Nachweisungen finden sich zur Orientierung des L[esers] gefügt.

Das Prinzip der Erhaltung der Energie

von Dr. **Max Planck,**
Professor der Theoretischen Physik an der Universität Berlin
und der Philosophischen Fakultät Göttingen preisgekrönt.

2. Auflage. [XVI u. 278 S.] 8. 1908. In Leinwand geb. n. ℳ 6.—

Das Werk behandelt die Lehre von der Erhaltung der Energie in drei Abschnitten. Im ersten wird die historische Entwicklung des Prinzips dargelegt, von seinen Uranfängen an, die sich in der Erkenntnis der Unmöglichkeit eines perpetuum mobile dokumentieren, bis zu der allgemeinen Durchführung, die in den Arbeiten von Mayer, Joule, Helmholtz, Clausius, Thomson usw. enthalten ist. Der zweite Abschnitt bringt die allgemeine Definition des Energiebegriffes, die Formulierung des Erhaltungsprinzips zum Zwecke seiner verschiedenartigen Anwendungen, und endlich eine Übersicht und Kritik der Beweise, die man im Laufe der Zeiten zu seiner Begründung beigebracht hat. Im dritten Abschnitt werden die gewonnenen Sätze benutzt, um zu zeigen, wie man durch die Anwendung des Prinzips der Erhaltung der Energie, von den Tatsachen der Erfahrung ausgehend, unter grundsätzlicher Fernhaltung aller Hypothesen über das Wesen der Naturkräfte, zu einer einheitlichen Übersicht über die Gesetze der gesamten Erscheinungswelt gelangen kann.

In den zwanzig Jahren, welche seit dem Erscheinen der ersten Auflage des Buches verflossen sind, haben sich im Reiche der Physik noch verschiedene Umwälzungen vollzogen. Aber jede neue Entdeckung und jede neue Begriffsbildung hat immer nur dazu beigetragen, das Energieprinzip in seiner zentralen Stellung zu befestigen. Durch diesen Umstand ist es möglich geworden, die in der neuen Auflage vorzunehmenden Verbesserungen auf einige geringe Änderungen und Zusätze zu beschränken.

Hierzu Beilagen von **B. G. Teubner** in **Leipzig**, die wir der Beachtung unserer Leser bestens empfehlen.

SITZUNGSBERICHTE DER BERLINER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT.

HERAUSGEGEBEN VOM VORSTANDE DER GESELLSCHAFT.

SIEBENTER JAHRGANG.

LEIPZIG UND BERLIN.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1908.

Digitized by Google

ALLE RECHTE,
EINSCHLIESZLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

Digitized by Google

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Knopp, K., Multiplikation divergenter Reihen	1—12
Lampe, E., Einige Aufgaben aus meinen Übungsstunden	63—76
Lewent, L., Über einige Ungleichungen	95—101
Lindner, P., Über Differentiation mit komplexem Index und ihre Beziehungen zur hypergeometrischen Funktion	77—83
Löwenheim, L., Über das Auflösungsproblem im logischen Klassenkalkul	89—94
Rothe, R., Über die Bekleidung einer Fläche mit einem Gewebe („Kurvennetze ohne Umwege")	12—18
Salkowski, E., Schraubenlinien und Loxodromen	83—87
Schafheitlin, P., Die Nullstellen der hypergeometrischen Funktion	19—28
——— Bemerkung zum vorstehenden Vortrage	88
Steinitz, E., Beiträge zur Analysis situs	29—49
Wallenberg, G., Beiträge zur Theorie der linearen Differenzengleichungen	50—63
——— Bemerkung zum vorstehenden Vortrage	101

Mitglieder-Verzeichnis . . . . . 102—104

Fünfundfünfzigste	Sitzung	am	30. Oktober 1907	1
Sechsundfünfzigste	„	„	27. November „	1
Siebenundfünfzigste	„	„	18. Dezember „	19
Achtundfünfzigste	„	„	29. Januar 1908	19
Neunundfünfzigste	„	„	26. Februar „	29
Sechzigste	„	„	25. März „	29
Einundsechzigste	„	„	29. April „	77
Zweiundsechzigste	„	„	27. Mai „	77
Dreiundsechzigste	„	„	24. Juni „	89

Digitized by Google

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

Herausgegeben vom Vorstande der Gesellschaft.

57. Sitzung am 18. Dezember 1907.

Vorsitzender: Herr Schafheitlin.
Anwesend: 32 Herren.
Wissenschaftliche Mitteilungen:
Herr Steinitz: Beiträge zur Analysis situs.
Herr Güntsche: Konstruktion des regelmäßigen 257-Ecks.
Herr Fleck: Wie würde sich die B. M. G. zu einem Verein von Freunden der Mathematik stellen?

58. Sitzung am 29. Januar 1908.

Vorsitzender: Herr Schafheitlin.
Anwesend: 27 Herren.
Wissenschaftliche Mitteilungen:
Herr Schafheitlin: Über die Nullstellen der hypergeometrischen Funktion (s. u.).
Herr Güntsche: Bemerkung zu dem Vortrage: Konstruktion des regelmäßigen 257-Ecks.

Die Nullstellen der hypergeometrischen Funktion.

Von P. Schafheitlin.

Vor längerer Zeit hat Herr Klein[1]) die Anzahl der Nullstellen der hypergeometrischen Reihe auf der reellen Achse zwischen 0 und 1 ermittelt; auf gleichem Wege hat danach Herr Van Vleck[2]) die Anzahl sämtlicher reellen und komplexen Nullstellen gefunden; seine Resultate sind aber, wenn auch

1) Über die Nullstellen der hypergeom. Reihe. Math. Ann. 1890, **37**, 573—590. Vgl. auch Hurwitz, Math. Ann. 1891, **38**, 452—458 und Gegenbauer, Monatsh. f. Math. u. Phys. 1891, **2**, 124—130.

2) A determination of the number of real and imaginary roots of the hypergeometric series. American Math. Soc. Transact. 1902, **3**, 110—131.

Digitized by Google

im allgemeinen richtig, in den speziellen Fällen, daß $\alpha, \beta, \gamma-\alpha$ oder $\gamma-\beta$ eine negative ganze Zahl ist, unrichtig. In jüngster Zeit hat ohne Kenntnis dieser Arbeit und auf ganz anderem Wege Herr Hurwitz[1]) dieselbe Anzahl berechnet und die Ergebnisse in einfachere Gestalt gebracht. Die obigen Spezialfälle schließt Herr Hurwitz aus, gibt aber einen Weg an, auf dem alsdann diese Zahlen zu berechnen sind, wie dies schon früher Herr Hilbert[2]) getan hat.

Wieder auf anderem Wege bin ich zur Berechnung dieser Zahlen gelangt. Wenn ich auch in einem Falle die genaue Zahl der komplexen Nullstellen nicht anzugeben vermag, so hat der Weg an und für sich vielleicht Interesse umso mehr, als eine Eigenschaft der Nullstellen hierbei benutzt wird, die bisher noch nicht bekannt gewesen zu sein scheint; nämlich die, daß jede Nullstelle, die auf der reellen Achse mit Ausnahme der Strecke von $+1$ bis $+\infty$ liegt, eine monotone Funktion der Exponentendifferenzen λ, μ und ν ist. Hieraus ergibt sich dann zunächst die Anzahl aller Nullstellen für die oben erwähnten Spezialfälle und daraus — mit einer Ausnahme — die betreffende Anzahl im allgemeinen Falle.

1. Die hypergeometrische Reihe:

$$(1) \qquad F(\alpha,\beta,\gamma,x) = 1 + \frac{\alpha\cdot\beta}{1!\,\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\,\beta(\beta+1)}{2!\,\gamma(\gamma+1)}x^2 + \cdots$$

$$= \frac{\Pi(\gamma-1)}{\Pi(\alpha-1)\,\Pi(\beta-1)} \sum_0^\infty \frac{\Pi(\alpha+\lambda-1)\,\Pi(\beta+\lambda-1)}{\Pi\lambda\,\Pi(\gamma+\lambda-1)}x^\lambda,$$

worin Π die Gaußsche Funktion $\Pi\varrho = \Gamma(\varrho+1)$ bedeutet, ist eine Lösung der Differentialgleichung:

$$(2) \qquad x(x-1)y'' + \{(\alpha+\beta+1)x-\gamma\}y' + \alpha\beta y = 0,$$

wo hier wie im folgenden durch den Strich die Ableitung nach x angedeutet wird. Die Parameter α, β, γ sollen reelle Werte und zwar γ mit Ausschluß der negativen ganzen Zahlen annehmen; die Reihe konvergiert für die Werte des Argumentes x, die innerhalb des Einheitskreises um den Nullpunkt liegen. Die Reihe kann als Element einer analytischen Funktion von x betrachtet werden, die mit Ausnahme der Punkte $+1$ und ∞ endlich und stetig ist. Zerschneidet man die Zahlenebene durch einen Querschnitt, der von $+1$ nach ∞ längs der positiven reellen Achse läuft, so kann in dem so begrenzten Bereich die Reihe über den Konvergenzkreis eindeutig fortgesetzt werden; die Reihe mit ihrer so bestimmten Fortsetzung soll als hypergeometrische Funktion bezeichnet werden.

Aus (1) und (2) folgt leicht, daß

$$(3) \qquad G = x^{\frac{\gamma}{2}}(1-x)^{\frac{\alpha+\beta-\gamma+1}{2}} F(\alpha,\beta,\gamma,x)$$

---

1) Über die Nullstellen der hyperg. Funktion. Math. Ann. 1907, **64**, 517—560.
2) Über die Diskriminante der im Endlichen abbrechenden hypergeom. Reihe. Journ. f. die reine u. ang. Math. 1888, **103**, 337—345.

Digitized by Google

eine Lösung der Gleichung:

$$(4)\quad 4x^2(1-x)^2G'' = \{(\lambda^2-1)(1-x)-(\mu^2-1)x(1-x)+(\nu^2-1)x\}\,G$$

ist, worin bedeuten:

$$(5)\qquad \lambda = 1-\gamma;\quad \mu = \alpha-\beta;\quad \nu = \gamma-\alpha-\beta.$$

Wegen der Vertauschbarkeit von α und β in (1) und (2) kann man stets annehmen, daß μ nicht negativ ist. Setzt man $-\lambda$ an Stelle von λ, wodurch (4) ungeändert bleibt, so erhält man eine zweite Lösung von (4):

$$(6)\qquad G_1 = x^{\frac{2-\gamma}{2}}(1-x)^{\frac{\alpha+\beta-\gamma+1}{2}}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma,x).$$

Setzt man dagegen $-\nu$ an Stelle von ν, so ergibt sich aus (3) und (4) die bekannte Formel:

$$(7)\qquad F(\alpha,\beta,\gamma,x) = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\beta,\gamma-\alpha,\gamma,x).$$

Aus (3), (4) und (6) folgt:

$$G\,G_1'' - G_1\,G'' = 0$$

oder durch Integration:

$$(8)\qquad G\,G_1' - G_1\,G' = \lambda = 1-\gamma,$$

wo die rechte Seite sich durch einfache Konstantenbestimmung ergibt. Aus (8) folgt, daß G eine mehrfache Nullstelle nur bei 0, 1 oder ∞ besitzen kann; da abgesehen von diesen 3 Punkten F dieselben Nullstellen wie G hat, so folgt, daß auch F keine mehrfachen Nullstellen besitzen kann außer in 1 oder ∞; denn bei 0 hat F stets den Wert + 1. Für $x = 1$ wird F unendlich, sobald $\gamma-\alpha-\beta \leqq 0$ ist; wenn dagegen $\gamma-\alpha-\beta > 0$ ist, so ist:

$$(9)\qquad F(\alpha,\beta,\gamma,1) = \frac{\Pi(\gamma-1)\,\Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\Pi(\gamma-\alpha-1)\,\Pi(\gamma-\beta-1)}.$$

Es ist demnach 1 eine Nullstelle, wenn $\gamma-\alpha$ oder $\gamma-\beta$ eine negative ganze Zahl oder Null ist.

Aus (4) folgt durch Differentiation nach ν, wenn G_ν die Ableitung nach ν bedeutet:

$$4x^2(1-x)^2G_\nu'' = \{(\lambda^2-1)(1-x)-(\mu^2-1)x(1-x)+(\nu^2-1)x\}\,G_\nu + 2\nu x G.$$

Man erkennt hieraus, daß G_ν eine in demselben Bereiche wie G endliche und stetige Funktion von x ist. Multipliziert man diese Gleichung mit G und (4) mit G_ν, so erhält man durch Subtraktion:

$$G_\nu G'' - G\,G_\nu'' = -\frac{\nu}{2x(1-x)^2}\,G^2.$$

Hieraus folgt durch Integration:

$$G_\nu G' - G\,G_\nu' = -\frac{\nu}{2}\int\frac{G^2dx}{x(1-x)^2}.$$

Digitized by Google

Ist x_0 eine Nullstelle von G und $\gamma > 0$, so folgt:

$$G_\nu G' = -\frac{\nu}{2}\int_0^{x_0} \frac{G^2 dx}{x(1-x)^2}. \tag{10}$$

Variiert man nun in G sowohl x als ν aber so, daß G unverändert bleibt, so ist:

$$G_\nu d\nu + G' dx = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{dx}{d\nu} = -G_\nu : G'.$$

Handelt es sich um eine Nullstelle von G, also auch von F, so folgt hieraus und aus (10):

$$\frac{dx_0}{d\nu} = \left\{\frac{\nu}{2}\int_0^{x_0} \frac{G^2 dx}{x(1-x)^2}\right\} : (G')^2. \tag{11}$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich: *Jede Nullstelle von F als Funktion von ν betrachtet wächst mit wachsendem ν, sobald sie auf der reellen Achse zwischen 0 und $+1$ liegt und sowohl ν als auch γ positiv sind.*

Entsprechende Sätze gelten für λ und μ; bei λ muß jedoch $\gamma > 1$ sein, und bei μ nimmt die Funktion mit wachsendem μ ab.

Aus der Gleichung

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = (1-x)^{-\beta} F\left(\gamma - \alpha, \beta, \gamma, \frac{x}{x-1}\right) \tag{12}$$

folgt, daß diese Sätze sich ausdehnen lassen auf den negativen Teil der reellen Achse.

Ist ein komplexer Wert von x eine Nullstelle von F, so ist sein konjugierter Wert ebenfalls eine Nullstelle; eine komplexe Nullstelle als Funktion von ν betrachtet kann niemals die reelle Achse zwischen $-\infty$ und $+1$ überschreiten, weil in diesem Punkte eine doppelte Nullstelle auftreten würde und dieses ist nach dem im Anschluß an Gleichung (8) Gesagten ausgeschlossen.

2. Nach diesen Vorbereitungen läßt sich leicht die Anzahl der reellen, zwischen 0 und 1 gelegenen Nullstellen von F angeben. Aus (1) sieht man, daß solche Nullstellen nicht existieren, wenn α, β und γ positiv sind; hält man an der Bedingung $\gamma \geq 1$ oder $\lambda \leq 0$ zunächst fest, so gibt es ebenfalls keine solche Nullstellen, wie aus (7) folgt, wenn α und β beide negativ sind. Nach der über μ getroffenen Festsetzung ($\alpha \geq \beta$) bleibt nur der Fall noch übrig, daß α und γ positiv sind und β negativ ist. Ist alsdann $\alpha < \gamma$, so folgt wieder aus (7), daß keine Nullstellen zwischen 0 und 1 existieren. Um den letzten Fall $\alpha \geq \gamma > 0$, $\beta < 0$ zu erledigen, gehe man von dem Grenzfall $\alpha = \gamma$ aus, in dem die hypergeometrische auf die binomische Reihe sich reduziert und den Wert $(1-x)^{-\beta}$ besitzt. In diesem Falle verschwindet F in 1, aber nicht zwischen 0 und 1 und es besitzt ν den positiven Wert $-\beta$. Läßt man nun γ ungeändert, α und β aber um δ wachsen, so nimmt ν um 2δ ab, während μ und λ ebenfalls ungeändert bleiben.

Digitized by Google

In (9) ist dann der Faktor $\Pi(\gamma-\alpha-1)=\Pi(-\delta-1)$ negativ, sobald $0<\delta<1$ ist, während die anderen Faktoren positiv sind; daher hat F selbst an der Stelle 1 einen negativen Wert und es muß demnach zwischen 0 und 1 eine Nullstelle liegen. Sobald also α größer wird als γ, verschwindet die Nullstelle in 1, dafür tritt eine oder eine größere ungerade Anzahl von Nullstellen zwischen 0 und 1 auf. Die letzte Möglichkeit ist aber für $\delta\leqq 1$ ausgeschlossen, denn für $\delta=1$ folgt aus (7):

$$F(\gamma+1,\beta+1,\gamma,x)=(1-x)^{-\beta-2}F(\gamma-\beta-1,-1,\gamma,x),$$

und der letzte Faktor hat als Funktion ersten Grades von x überhaupt nur eine Nullstelle. Nachdem aus (11) abgeleiteten Satze aber kann dann auch für $\delta<1$ nicht mehr als eine Nullstelle zwischen 0 und 1 liegen.

Auf diese Weise weiter schließend folgert man, daß für $1<\delta<2$ noch eine Nullstelle zwischen 0 und 1 hinzukommt, weil dann $\Pi(\gamma-\alpha-1)$ positiv ist.

Versteht man unter $E(\varrho)$ die größte positive ganze Zahl, die kleiner als ϱ ist (so daß also bei ganzzahligem positivem ϱ die Zahl $E(\varrho)=\varrho-1$ und $E(\varrho)=0$ für $\varrho\leqq+1$ ist), so erhält man das Resultat:

Ist $\lambda\leqq 0$, $\nu\geqq 0$, so liegen zwischen 0 und 1 genau $E(\alpha-\gamma+1)$ Nullstellen.

Hierin sind auch die vorhin erörterten Fälle mit enthalten, weil dann $E(\alpha-\gamma+1)$ Null wird.

Ist $\lambda<0$ aber $\nu<0$, so ist für die Funktion $F(\gamma-\beta,\gamma-\alpha,\gamma,x)$, die nach (7) außer 1 dieselben Nullstellen wie $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ hat, die Größe $\nu>0$; demnach hat $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ nach Obigem $E(-\beta+1)$ Nullstellen zwischen 0 und 1.

Aus (8) ergibt sich, daß die innerhalb des Einheitskreises gelegenen reellen Nullstellen von G und G_1 abwechselnd aufeinander folgen. Für kleine positive Werte von x sind G und G_1 positiv; demnach ist G_1' an der kleinsten positiven Nullstelle von G_1 negativ und daher ist für den Fall $\lambda>0$ an dieser Stelle G negativ, d. h. wenn $\lambda>0$ ist, liegen die einzelnen Nullstellen von $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ *vor* denen von $F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma,x)$, und es hat demnach $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ ebensoviele Nullstellen zwischen 0 und 1 oder eine mehr als $F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma,x)$. Welche von beiden Möglichkeiten eintritt, läßt sich in jedem Falle durch das Vorzeichen von $F(\alpha,\beta,\gamma,1)$ entscheiden.

Versteht man unter $E^*(\varrho)$ entweder $E(\varrho)$ oder $1+E(\varrho)$, so erhält man für die reellen Nullstellen von $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ zwischen 0 und 1 mit Ausschluß der Grenzen das von Klein angegebene Schema:

	$\nu\leqq 0$	$\nu\geqq 0$
$\lambda\leqq 0$	$E(1-\beta)$	$E(\alpha-\gamma+1)$
$\lambda\geqq 0$	$E^*(\gamma-\beta)$	$E^*(\alpha)$

3. Ist eines der beiden ersten Elemente, z. B. β, eine negative ganze Zahl $-n$, so ist F eine ganze rationale Funktion $n$ten Grades von x; in diesem

Digitized by Google

Falle läßt sich nun die Anzahl aller reellen und komplexen Nullstellen angeben. Es ist nämlich:

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x) = \frac{\Pi(\gamma-1)\,\Pi(\beta-\alpha-1)}{\Pi(\gamma-\alpha-1)\,\Pi(\beta-1)}(-x)^{-\alpha}F\Big(\alpha,\alpha-\gamma+1,\alpha-\beta+1,\frac{1}{x}\Big)$$
$$+\frac{\Pi(\gamma-1)\,\Pi(\alpha-\beta-1)}{\Pi(\gamma-\beta-1)\,\Pi(\alpha-1)}(-x)^{-\beta}F\Big(\beta,\beta-\gamma+1,\beta-\alpha+1,\frac{1}{x}\Big)\cdot \tag{13}$$

Durch (12) erhält man die Fortsetzung der Reihe (1) auf solche Argumente, deren reeller Bestandteil kleiner als $+\frac{1}{2}$ ist; durch (13) auf solche, die außerhalb des Einheitskreises liegen. Ist im speziellen $\beta = -n$, so fällt der erste Summand in (13) wegen des Faktors $\Pi(\beta-1)$ fort, und man erhält:

$$F(\alpha,-n,\gamma,x) = (1-x)^{n}F\Big(\gamma-\alpha,-n,\gamma,\frac{x}{x-1}\Big)$$
$$=\frac{\Pi(\gamma-1)\,\Pi(\alpha+n-1)}{\Pi(\gamma+n-1)\,\Pi(\alpha-1)}(-x)^{n}F\Big(-n,-n-\gamma+1,-n-\alpha+1,\frac{1}{x}\Big)\cdot \tag{14}$$

Ist x eine negative reelle Zahl, so ist $\frac{x}{x-1}$ und ist x ein positiver reeller unechter Bruch, so ist $\frac{1}{x}$ ein positiver echter Bruch. Man kann also durch (14) und das Kleinsche Schema in jedem Falle die Anzahl sämtlicher reellen, also auch sämtlicher komplexen Nullstellen angeben; jedoch muß hier der Fall $\alpha < \beta$ auch berücksichtigt werden. Führt man diese Methode im einzelnen aus und bedeutet ϱ_i eine Zahl, die entweder Null oder Eins ist, je nachdem i gerade oder ungerade ist, so erhält man folgende Ergebnisse:

Erster Hauptfall: $\gamma \geqq 1.\quad \beta = -n.$

I^{A}. *Ist* $\nu < +1$, *so liegen sämtliche Nullstellen zwischen* 0 *und* 1.

I^{B}. *Ist* $\nu \geqq +1$ *und* $\alpha > -n+1$, *so liegen* $m = E(\alpha-\gamma+1)$ *Nullstellen zwischen* 0 *und* 1, $r = E(1-\alpha)$ *zwischen* $-\infty$ *und* 0, ϱ_{n-m-r} *zwischen* 1 *und* $+\infty$ *und* $p = 2E\Big(\frac{n-m-r+1}{2}\Big)$ *sind komplex; nur wenn* $\gamma-\alpha$ *eine negative ganze Zahl ist, liegen* m *Nullstellen zwischen* 0 *und* 1 *und alle übrigen in* 1.

I^{C}. *Ist* $\nu \geqq +1$ *und* $\alpha < -n+1$, *so liegen sämtliche Nullstellen zwischen* $-\infty$ *und* 0.

Zweiter Hauptfall: $\gamma < 1.\quad \beta = -n.$

II^{A}. $\nu \leqq 0,\quad \alpha+n \leqq 0.$

Alle Nullstellen sind reell und liegen zwischen 1 *und* $+\infty$.

II^{B}. $\nu \leqq 0,\quad \alpha+n \geqq 0.$

Zwischen 1 *und* $+\infty$ *liegen* $m = E(1-\alpha)$ *Nullstellen, zwischen* 0 *und* 1 *liegen* $r = E(\gamma+n)$, *zwischen* $-\infty$ *und* 0 *liegen* ϱ_{n-m-r} *und* $p = 2E\Big(\frac{n-m-r+1}{2}\Big)$ *sind komplex.*

II^{C}. $\nu \geqq 0,\quad \alpha+n \leqq 0.$

Zwischen 1 *und* $+\infty$ *liegen* $m = E(\alpha-\gamma+1)$ *Nullstellen, zwischen* $-\infty$ *und* 0 *liegen* $r = E(\gamma+n)$, *zwischen* 0 *und* 1 *liegen* ϱ_{n-m-r} *und*

Digitized by Google

$p = 2E\left(\frac{n-m-r+1}{2}\right)$ *sind komplex. Nur wenn* $\gamma - \alpha$ *eine negative ganze Zahl ist, liegen m Nullstellen zwischen* 1 *und* $+\infty$ *und alle übrigen in* 1.

II^{D}. $\nu \geq 0$, $\alpha + n \geq 0$.

a) $\alpha > 0$. *In diesem Falle sei* $\alpha = m + \delta$, $\gamma = -r + \varepsilon$, *wo m und r positive ganze Zahlen mit Einschluß der Null bedeuten, und es sei* $0 \leq \delta < 1$, $0 < \varepsilon < 1$, *dann liegen m Nullstellen zwischen* 0 *und* 1, ϱ_r *zwischen* $-\infty$ *und* 0, ϱ_{n-m-r} *zwischen* 1 *und* ∞ *und* $2E\left(\frac{n-m-r+1}{2}\right) + 2E\left(\frac{r+1}{2}\right)$ *sind komplex, wenn* $\delta < \varepsilon$ *ist; dagegen heißen die entsprechenden Zahlen* $m+1$, $\varrho_r, \varrho_{n-m-r-1}$ *und* $2E\left(\frac{n-m-r}{2}\right) + 2E\left(\frac{r+1}{2}\right)$, *wenn* $\delta > \varepsilon$ *ist. Ist schließlich* $\delta = \varepsilon$, *so liegen m Nullstellen zwischen* 0 *und* 1, ϱ_r *zwischen* $-\infty$ *und* 0, $n-m-r$ *in* 1 *und* $2E\left(\frac{r+1}{2}\right)$ *sind komplex.*

b) $\alpha < 0$. *Ist* $\alpha = -m + \delta (m > 1)$, $\gamma = -r + \varepsilon$ *und ist* $\gamma - \alpha > 0$, *so liegen* $m - r$ *Nullstellen zwischen* $-\infty$ *und* 0, ϱ_r *zwischen* 0 *und* 1, ϱ_{n-m} *zwischen* 1 *und* ∞ *und* $2E\left(\frac{n-m+1}{2}\right) + 2E\left(\frac{r+1}{2}\right)$ *sind komplex.*

Ist dagegen $\gamma - \alpha < 0$ *und* $\gamma + n > 0$, *so liegen* ϱ_{r-m} *Nullstellen zwischen* $-\infty$ *und* 0, ϱ_m *zwischen* 0 *und* 1, ϱ_{n-r} *zwischen* 1 *und* ∞ *und* $2E\left(\frac{r-m+1}{2}\right) + 2E\left(\frac{m+1}{2}\right) + 2E\left(\frac{n-r+1}{2}\right)$ *sind komplex, wenn* $\delta < \varepsilon$ *ist; dagegen heißen die Zahlen* ϱ_{r-m}, ϱ_{m-1}, ϱ_{n-r+1} *und* $2E\left(\frac{r-m+1}{2}\right) + 2E\left(\frac{m}{2}\right) + 2E\left(\frac{n-r+2}{2}\right)$, *wenn* $\delta > \varepsilon$ *ist. Ist schließlich* $\delta = \varepsilon$, *so liegen* $n - r + m$ *Nullstellen in* 1, ϱ_{r-m} *zwischen* $-\infty$ *und* 0 *und* $2E\left(\frac{r-m+1}{2}\right)$ *sind komplex.*

Ist schließlich $\gamma - \alpha < 0$ *und* $\gamma + n < 0$, *so liegen* $r - n$ *Nullstellen zwischen* 1 *und* ∞, ϱ_{n-m} *zwischen* $-\infty$ *und* 0, ϱ_{n+m-r} *zwischen* 0 *und* 1 *und* $2E\left(\frac{n-m+1}{2}\right) + 2E\left(\frac{n+m-r+1}{2}\right)$ *sind komplex, wenn* $\delta < \varepsilon$ *ist; ist* $\delta > \varepsilon$, *so heißen die Zahlen* $r-n+1$, ϱ_{n-m}, $\varrho_{n+m-r-1}$ *und* $2E\left(\frac{n-m+1}{2}\right) + 2E\left(\frac{n+m-r}{2}\right)$. *Ist* $\delta = \varepsilon$, *so liegen* $r - n$ *Nullstellen zwischen* 1 *und* $+\infty$, $n+m-r$ *liegen in* 1, ϱ_{n-m} *zwischen* $-\infty$ *und* 0 *und* $2E\left(\frac{n-m+1}{2}\right)$ *sind komplex.*

Der zweite besondere Fall, daß $\gamma - \alpha$ eine negative ganze Zahl ist, läßt sich durch (7) auf den eben behandelten zurückführen.

4. Der Übergang von diesen speziellen Fällen zur allgemeinen Funktion geschieht durch die Überlegung, daß jede einzelne Nullstelle x_0 sowohl eine eindeutige und stetige Funktion der Größen μ und ν als auch der Parameter α und β in dem anfangs festgesetzten Bereiche ist. Nur die Grenze dieses Bereiches verursacht eine gewisse Schwierigkeit. Zunächst läßt sich zeigen, daß wenn man das positive Ufer des Querschnitts dem Bereiche zuzählt, in

Digitized by Google

dieser Linie im allgemeinen Falle keine Nullstellen liegen. Für solche Punkte hat nämlich F die Form:

$$A(\cos\alpha\pi + i\sin\alpha\pi) + B(\cos\beta\pi + i\sin\beta\pi),$$

wo A und B reelle Werte haben. Soll dieser Ausdruck Null sein, so ist entweder $\alpha - \beta$ eine ganze Zahl — ein Grenzfall, der vorläufig ausgeschlossen werden soll — oder es ist $A = B = 0$. Die beiden nach (13) in A und B auftretenden hypergeometrischen Reihen können nicht gleichzeitig verschwinden, weil sie Lösungen derselben Differentialgleichung sind. Es bleibt demnach für eine Nullstelle von F zwischen 1 und ∞ nach (13) nur die Möglichkeit, daß α, β oder $\gamma - \alpha$, $\gamma - \beta$ eine negative ganze Zahl ist, d. h. daß F eine ganze Funktion von x oder $\frac{x}{x-1}$ ist.

Ob aber, wenn F durch Veränderung eines Parameters vom speziellen zum allgemeinen Fall übergeht, eine zwischen 1 und $+\infty$ gelegene Nullstelle in den Bereich übergeht oder verschwindet, ist ohne weiteres nicht zu entscheiden, aber in den meisten Fällen zu umgehen.

Variiert man den Parameter β, so wird eine Veränderung in der Zahl der Nullstellen nur eintreten, wenn die Nullstellen die singulären Punkte $+1$ und ∞ oder, falls $\nu < 0$ ist, den Umfang des Konvergenzkreises passieren. Dieser letzte Fall ($\nu < 0$) kann aber wegen (7) ausgeschlossen werden. Ferner wird jetzt wieder stets vorausgesetzt, daß $\alpha > \beta$ ist.

Zunächst ist der erste Hauptfall $\gamma > 1$ zu betrachten.

Wenn in diesem Falle β, also auch α positiv ist, so ist auch $\gamma - \alpha$ und $\gamma - \beta$ wegen der Bedingung $\nu > 0$ positiv. Daher besitzt F keine reellen Nullstellen und zwar zwischen 0 und 1 nach den Angaben im Kleinschen Schema, zwischen $-\infty$ und 0 nach (12) in Verbindung mit dem Schema und zwischen 1 und ∞ wegen der obigen Bemerkung über diese Strecke; nur im Unendlichen liegt eine $E(\beta+1)$-fache Nullstelle. Komplexe Nullstellen existieren aber ebenfalls nicht; denn vermindert man α und β um δ, d. h. vermehrt man ν um 2δ, so bliebe hierbei die Anzahl der komplexen Nullstellen ungeändert, falls nicht etwa eine solche ins Unendliche rückt. Dies aber ist ausgeschlossen, da bei abnehmendem α und β der Grad der unendlichen Nullstelle abnimmt, nicht aber irgendwo um mindestens 1 wachsen kann. Ist schließlich $\beta = 0$ d. h. $F = 1$ geworden, so existieren sicher keine komplexen Nullstellen d. h.

Wenn α und β positiv sind, so besitzt F keine endlichen reellen oder komplexen Nullstellen ($\nu \geq 0$).

Ist $\beta < 0$, so gehe man von dem Falle, daß β eine negative ganze Zahl $-n$ ist, aus; man hat dann nur den Fall I^R zu betrachten. Ist $n - m - r$ eine gerade Zahl, so existieren keine reellen Nullstellen zwischen 1 und ∞; läßt man $-n$ um einen echten Bruch wachsen, so bleibt demnach die Anzahl aller Nullstellen ungeändert. Für diesen Fall ergibt sich aus I^R: m Nullstellen liegen zwischen 0 und 1, r zwischen $-\infty$ und 0 und $n - m - r$ sind komplex, wenn $\beta = -n + \varkappa$ und $n - m - r$ gerade ist.

Läßt man aber $-n$ um einen echten Bruch abnehmen, so erhält man die nämliche Anzahl wie oben; es ist dies aber dasselbe, als ob man in der Funktion, bei der $\beta = -n - 1$, die obige Differenz demnach eine ungerade

Digitized by Google

Zahl wäre, β hätte um einen echten Bruch wachsen lassen. In diesem Falle erhält man also, wenn man $\beta = -n' + \varkappa$ setzt und $n' - m - r$ ungerade ist: Es liegen m Nullstellen zwischen 0 und 1, r zwischen $-\infty$ und 0 und $n' - m - r - 1$ sind komplex. Da $E(1-\beta) = E(1+n-\varkappa) = n$ ist, so lassen sich die bisherigen Ergebnisse folgendermaßen zusammenfassen:

III. *Ist* $\gamma \geqq 1$ *und* $\nu \geqq 0$, *so liegen* $E(\alpha-\gamma+1)$ *Nullstellen zwischen* 0 *und* 1, $E(1-\alpha)$ *zwischen* $-\infty$ *und* 0 *und* $E(1-\beta) - E(\alpha-\gamma+1) - E(1-\alpha) - \varepsilon$ *Nullstellen sind komplex, wo* ε *Null oder Eins ist, je nachdem die vorhergehende Differenz gerade oder ungerade ist.*

Aus (7) folgt hieraus unmittelbar:

IV. *Ist* $\gamma \geqq 1$ *und* $\nu \leqq 0$, *so liegen* $E(1-\beta)$ *Nullstellen zwischen* 0 *und* 1, $E(\beta-\gamma+1)$ *zwischen* $-\infty$ *und* 0 *und* $E(\alpha-\gamma+1) - E(1-\beta) - E(\beta-\gamma+1) - \varepsilon$ *Nullstellen sind komplex.*

Auch bei dem zweiten Hauptfall $\gamma < 1$ wird zuerst nur $\nu > 0$ betrachtet. Ist $\gamma < 0$, so muß β negativ sein; es kann indessen auch α negativ angenommen werden, weil die andere Möglichkeit durch (12) hierauf zurückgeführt wird.

Man braucht nun nur in Satz II^{D} b) ähnlich wie vorhin n zu variieren, um die betreffenden allgemeinen Sätze zu gewinnen.

Liegt dagegen γ zwischen 0 und 1, so können α und β positive echte Brüche sein; ist β negativ, so braucht man α nur kleiner als $+1$ anzunehmen; der Satz II^{D} a), der dann in Betracht kommt, geht in diesem Fall in II^{D} b) über, wenn man darin nur $m = 0$ setzt, so daß allgemein nur II^{D} b) weiter verfolgt zu werden braucht.

Hierbei sind nun 3 Fälle zu unterscheiden.

A. $\gamma - \alpha > 0$ und $\gamma - \beta > 0$.

Ähnlich wie beim ersten Hauptfall geht man in $F(-m+\delta, -n, -r+\varepsilon, x)$ von der Annahme $n - m$ gerade aus, läßt $-n$ um $\varkappa$ wachsen und abnehmen, um hierdurch die Annahme $n - m$ ungerade zu erledigen.

Man erhält so den Satz:

V. *Ist* $n > m > r$ *und* $0 < \left\{ \begin{matrix} \delta \\ \varkappa \\ \varepsilon \end{matrix} \right\} < 1$, *so hat* $F(-m+\delta, -n+\varkappa, -r+\varepsilon, x)$ $m - r$ *Nullstellen zwischen* $-\infty$ *und* 0, ϱ_r *zwischen* 0 *und* 1 *und* $2E\left(\frac{n-m+1}{2}\right) + 2E\left(\frac{r+1}{2}\right)$ *sind komplex.*

B. $\gamma - \alpha < 0$ und $\gamma - \beta > 0$.

VI. $n > r > m$ *und* $0 < \left\{ \begin{matrix} \delta \\ \varkappa \\ \varepsilon \end{matrix} \right\} < 1$, *so hat* $F(-m+\delta, -n+\varkappa, -r+\varepsilon, x)$ ϱ_{r-m} *Nullstellen zwischen* $-\infty$ *und* 0, ϱ_m *zwischen* 0 *und* 1 *und* $2E\left(\frac{r-m+1}{2}\right) + 2E\left(\frac{m+1}{2}\right) + 2E\left(\frac{n-r+1}{2}\right)$ *sind komplex, wenn* $\delta < \varepsilon$ *ist; es liegen* ϱ_{r-m} *Nullstellen zwischen* $-\infty$ *und* 0, ϱ_{m-1} *zwischen* 0 *und* 1 *und* $2E\left(\frac{r-m+1}{2}\right) + 2E\left(\frac{m}{2}\right) - 2E\left(\frac{n-r+2}{2}\right)$ *sind komplex, wenn* $\delta > \varepsilon$ *ist.*

Digitized by Google

C. $\gamma-\alpha<0$ und $\gamma-\beta<0$.

Da in diesem Falle $(r>n>m)$ in dem speziellen Falle stets Nullstellen zwischen $+1$ und ∞ liegen, so versagt hier die Methode zur genauen Bestimmung der komplexen Nullstellen. Es läßt sich nur der folgende Satz über die reellen Nullstellen aussprechen:

VII. *Ist* $r>n>m$ *und* $0<\left\{\begin{matrix}\delta\\ \varkappa\\ \varepsilon\end{matrix}\right\}<1$, *so hat* $F(-m+\delta,-n+\varkappa,r+\varepsilon,x)$ ϱ_{n-m} *Nullstellen zwischen* $-\infty$ *und* 0 *und* ϱ_{n+m-r} *oder* $\varrho_{n+m-r-1}$ *Nullstellen zwischen* 0 *und* 1, *je nachdem* $\delta \lesseqgtr \varepsilon$ *ist.*

Wie schon erwähnt lassen sich die Zahlen für den Fall, daß α positiv ist oder daß ν negativ ist, aus den letzten drei Sätzen leicht finden.

Digitized by Google

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

Herausgegeben vom Vorstande der Gesellschaft.

59. Sitzung am 26. Februar 1908.

Vorsitzender: Herr Jahnke.

Anwesend: 30 Herren.

Der Antrag des Vorstandes, in Zukunft den Mitgliedern der B. M. G. von ihren Veröffentlichungen in den Sitzungsberichten 25 Sonderabzüge unentgeltlich zu liefern, findet einstimmig Annahme.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Wallenberg: Beiträge zur Theorie der linearen Differenzengleichungen (s. u.)

Herr Jacobsthal: Über den Aufbau der transfiniten Arithmetik.

60. Sitzung am 25. März 1908.

Vorsitzender: Herr Schafheitlin.

Anwesend: 35 Herren.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Lampe: Bemerkungen zu einigen Übungsaufgaben.

Herr Lindner: Über Differentiation mit komplexem Index und ihre Beziehungen zur hypergeometrischen Funktion.

Beiträge zur Analysis situs.

Von Ernst Steinitz.

I.

Während bei Euklides von den allgemeinen Begriffen Linie und Fläche ausgegangen wird und sodann erst Gerade und Ebene als spezielle Linien und Flächen charakterisiert werden, ist es in den modernen Systemen üblich, die Gerade und die Ebene direkt, und zwar als Grundbegriffe, einzuführen, jene allgemeinen Begriffe aber in der axiomatischen Grundlegung überhaupt nicht zu verwenden. Und man ist vielfach geneigt, eine solche Verwendung schlechthin als unzulässig zu erklären. Indessen haben gerade die vielen Untersuchungen, welche in neuester Zeit über die Grundlagen der Geometrie angestellt worden sind, immer deutlicher hervortreten lassen, daß es nicht angängig erscheint, apodiktisch zu erklären: dieser Begriff ist ein Grund-

Digitized by Google

begriff, jener ist es nicht, oder: dieser Satz ist Axiom, jener muß beweisen werden, sondern daß man verschiedene Systeme von Grundbegriffen und Axiomen aufstellen kann, derart, daß ein Begriff oder Satz in dem einen System zu den Grundbegriffen bzw. Axiomen zählt, in dem andern nicht. So wird man auch nicht von vornherein ein System von der Hand weisen können, das mit Linien und Flächen als Grundbegriffen operiert. Man wird vielmehr zu prüfen haben, ob die über diese Begriffe in Form von Axiomen gemachten Aussagen widerspruchsfrei sind. Ist das der Fall, und ist man überdies geneigt, die Übereinstimmung mit der Anschauung zuzugestehen, so ist an der Zulässigkeit des Systems kein Zweifel mehr. Sein Wert kann nur nach seiner Leistungsfähigkeit eingeschätzt werden.

Nun gibt es in der Tat eine geometrische Disziplin, für welche die Verwendung der Allgemeinbegriffe Linie und Fläche von Anbeginn ein Bedürfnis ist: die Analysis situs. Für sie erweist sich der gewöhnliche Aufbau der Geometrie als unzweckmäßig, weil schon die primitivsten Tatsachen, die demjenigen, der, nicht gewohnt, sich an Definitionen zu halten, nur mit der Anschauung operiert, ganz selbstverständlich erscheinen, sich aus den üblichen Axiomen nur sehr mühsam ableiten lassen. Man denke z. B. an den Jordanschen Satz. Tatsächlich haben sich auch so hervorragende Mathematiker wie Riemann keineswegs gescheut, bei der Bearbeitung der Analysis situs auf die Anschauung zu rekurrieren. In neuerer Zeit ist vielfach der Versuch gemacht worden, dies durch analytische Behandlung zu vermeiden: dabei werden die größten Schwierigkeiten dadurch umgangen, daß man bei den definierenden Funktionen außer der Stetigkeit wenigstens noch Existenz und Stetigkeit der ersten Ableitungen voraussetzt. Aber wer sich mit Problemen der Analysis situs beschäftigt hat, wird sich kaum des Gefühls erwehren können, daß bei derartiger Behandlung Begriffe herbeigezogen werden, die dem Wesen der Sache fremd sind. Es ist mir auch kein Fall einer konsequenten analytischen Durchführung bekannt. Meines Erachtens ist das Verfahren Riemanns nur insofern ergänzungsbedürftig, als Riemann stillschweigend mit einer Gruppe von Axiomen operierte, die weder von ihm noch vor ihm irgendwo ausdrücklich postuliert waren.

Es ist deshalb gewiß als ein Fortschritt zu begrüßen, daß der Artikel über Analysis situs in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften[1]) ein Axiomsystem bringt, welches für den Aufbau dieser Disziplin, wenigstens im dreidimensionalen Raum ausreicht. Dadurch werden natürlich die wichtigen und schwierigen Probleme, welche die Analysis situs im Rahmen der gewöhnlichen Geometrie darbietet, weder gelöst noch aus der Welt geschafft; aber es ist die Möglichkeit gegeben, eine Analysis situs als selbständige Disziplin in voller Strenge weiterzuführen, ohne die Erledigung jener Fragen abwarten zu müssen.

Als Grundbegriffe oder Elemente haben wir in der Analysis situs zunächst den Punkt, die Strecke (worunter man sich eine zwei Punkte verbindende, sich selbst nicht schneidende Linie vorzustellen hat), das (einfach zusammenhängende) Flächenstück, das (einfache, kugelartige) Raumstück.[2]) Wir wollen

1) Enzyklopädie, III AB 3. Analysis situs von M. Dehn und P. Heegaard.
2) Die Ausführungen dieses Abschnitts haben lediglich den Zweck einer Einleitung. Von einer strengen Scheidung rein kombinatorischer und anschaulicher Betrachtungen ist deshalb abgesehen.

Digitized by Google

diese Elemente gemeinsam als *Zellen* bezeichnen und als *Zellen 0ter, 1ter, 2ter, 3ter Dimension* unterscheiden. Ihnen schließen sich die *Zellen nter Dimension* an. Eine Zelle ist vorzustellen als eine Punktmenge, und wir haben an ihr *innere Punkte* und solche der *Begrenzung* zu unterscheiden. Eine Zelle *n*ter Dimension hat zur Begrenzung eine *sphärische Mannigfaltigkeit* von $n-1$ Dimensionen, welche sich in verschiedener Weise aus $(n-1)$-dimensionalen Zellen aufbauen läßt. Es genügen zwei solche Zellen, die alsdann ihre gesamte Begrenzung gemein haben. — Zelle und sphärische Mannigtaltigkeit sind die einfachsten Repräsentanten *berandeter* und (in sich) *geschlossener Mannigfaltigkeiten*.

Zum allgemeinen Begriff der *n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten* gelangt man, indem man sich dieselben in näher zu definierender Weise aus *n*-dimensionalen Zellen als *Polyeder* aufgebaut denkt. Als Elemente des Polyeders gelten seine *n*-dimensionalen Zellen, die $(n-1)$-dimensionalen Zellen, aus denen sich die Begrenzungen der *n*-dimensionalen zusammensetzen, die $(n-2)$-dimensionalen Zellen, welche die Begrenzungen der $(n-1)$-dimensionalen bilden usf., endlich die Punkte, welche die Strecken oder Kanten begrenzen. Zwei Elemente a, b verschiedener Dimension sollen *inzident* heißen, wenn dasjenige von kleinerer Dimension zur Begrenzung des andern gehört; bei gleicher Dimension sei Inzidenz gleichbedeutend mit Identität. Das Symbol (a, b) werde gleich 1 oder 0 gesetzt, je nachdem a und b inzident sind oder nicht.

Nicht jeder Zellenbau gilt hier als Polyeder und damit als Mannigfaltigkeit. Die Vorstellung, es sei möglich den Aufbau einer *n*-dimensionalen Mannigfaltigkeit so zu vollziehen, daß irgendein gegebener innerer Punkt von ihr innerer Punkt einer Zelle wird, führt zu einem Gesetz, das wir als *erstes Dualitätsgesetz* bezeichnen wollen. Es lautet:

Zu jedem geschlossenen n-dimensionalen Polyeder $\mathfrak{P}$ *existiert ein* reziprokes $\mathfrak{P}'$ derart, daß ein-eindeutig den k-dimensionalen Zellen von $\mathfrak{P}$ die $(n-k)$-dimensionalen von $\mathfrak{P}'$ und inzidenten Zellen wieder inzidente entsprechen.[1])

Bei einer geschlossenen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{(n)}$[2]) gehört jede $(n-1)$-dimensionale Zelle der Begrenzung zweier, bei einer berandeten der Begrenzung zweier oder einer *n*-dimensionalen Zelle an. Die $(n-1)$-dimensionalen Zellen der zweiten Art nebst den mit ihnen inzidenten Zellen geringerer Dimension heißen *Randzellen*; sie bilden die *Begrenzung* oder *Berandung* der $\mathfrak{M}^{(n)}$. Diese Berandung besteht aus einer oder mehreren geschlossenen $\mathfrak{M}^{(n-1)}$.

Eins der wichtigsten Probleme der Analysis situs ist die Aufstellung der verschiedenen Typen von Mannigfaltigkeiten *n*ter Dimension. Gewöhnlich definiert man: Zwei Mannigfaltigkeiten heißen *homöomorph* (äquivalent) oder *von gleichem Typus*, wenn sie sich ein-eindeutig und stetig aufeinander abbilden lassen. Geht man jedoch von der rein kombinatorischen Auffassung der polyedrischen Mannigfaltigkeiten aus, als Systemen, welche durch die zwischen ihren Elementen bestehenden Inzidenzen bestimmt sind, so ist natürlich von der Einführung des Stetigkeitsbegriffs Abstand zu nehmen. Die Definition des Homöomorphismus muß also anders gefaßt werden. Dies geschieht

1) Ein zweites, wohl zuerst von Poincaré bewiesenes Dualitätsgesetz sagt aus, daß reziproke Polyeder stets homöomorphe Mannigfaltigkeiten repräsentieren.

2) Ein oberer in Klammern gesetzter Index bezeichnet hier und im folgenden stets die Dimension.

Digitized by Google

bei Dehn-Heegaard mittels des Begriffs der „*internen Transformation*“ oder, wie wir auch sagen können „*Zellteilung*“. Eine Strecke $s^{(1)} = a^{(0)}b^{(0)}$ wird durch Einführung eines inneren Punktes $c^{(0)}$ in zwei Strecken $a^{(0)}c^{(0)}$ und $c^{(0)}b^{(0)}$ „geteilt“. Um zur Teilung einer n-dimensionalen Zelle $a^{(n)} (n > 1)$ zu gelangen, hat man zunächst eine $(n-2)$-dimensionale sphärische Mannigfaltigkeit $\mathfrak{R}_{n-2}$ (im Falle $n = 2$ ein Punktepaar) anzunehmen, deren Elemente mit $a^{(n)}$ inzidieren. Durch $\mathfrak{R}_{n-2}$ zerfällt die Begrenzung von $a^{(n)}$ in zwei Teile $\mathfrak{Z}'_{n-1}$ und $\mathfrak{Z}''_{n-1}$. Durch Einführung einer neuen $(n-1)$-dimensionalen Zelle $c^{(n-1)}$ wird jetzt $a^{(n)}$ in zwei Zellen $a_1^{(n)}$ und $a_2^{(n)}$ „geteilt“, von denen die eine durch $\mathfrak{Z}'_{n-1}$ und $c^{(n-1)}$, die andere durch $\mathfrak{Z}''_{n-1}$ und $c^{(n-1)}$ begrenzt wird. Haben wir nun zwei Polyeder $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$, so stellen beide homöomorphe Mannigfaltigkeiten dar: Erstens, wenn sie isomorph sind, d. h. wenn eine ein-eindeutige Beziehung zwischen ihren Elementen gleicher Dimension möglich ist, bei welcher inzidenten Elementen wieder inzidente entsprechen; zweitens, wenn sie durch interne Transformationen in isomorphe Polyeder übergeführt werden können. Dies ist die Definition des Homöomorphismus bei Dehn-Heegaard; daß sie mit unserer Anschauung übereinstimmt, müssen wir als Axiom hinnehmen.[1])

Für die wichtigsten Fragen der Analysis situs ist die polyedrische Darstellung nur Mittel zum Zweck. Es werden uns hauptsächlich solche Eigenschaften interessieren, welche dem Typus als solchem zukommen, also von der jeweiligen polyedrischen Darstellung unabhängig sind, mithin bei internen Transformationen ungeändert bleiben und deshalb auch *Invarianten* genannt werden. Unser Ziel wird sein, für die Mannigfaltigkeiten von n Dimensionen ein *volles Invariantensystem* aufzustellen, d. h. ein System von der Beschaffenheit, daß die Übereinstimmung zweier Mannigfaltigkeiten in den Invarianten des Systems notwendig und hinreichend für den Homöomorphismus ist. Die drei Invarianten, welche bereits bei zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten auftreten, sind: die *Charakteristik*, die *Zahl der Ränder*, das *Verhalten der Indikatrix*.

Die Charakteristik C, die bekannte Zahl $e + f - k$ der gewöhnlichen Polyedertheorie, kann für (polyedrische) Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension definiert werden durch die Gleichung

$$C = \sum_a (-1)^{[a]}, \tag{1}$$

wo sich die Summe über alle Elemente a der betrachteten Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ erstreckt und das Symbol $[a]$ die Dimension von a bezeichnet. Nach dem gewöhnlichen Eulerschen Satz ist C für sphärische Mannigfaltigkeiten zweiter

1) Es kommen hier die Zerlegungsaxiome (a. a. O. S. 168/169) in Betracht. Die unter a) angeführten Axiome, durch welche die für den Homöomorphismus angegebenen Bedingungen als hinreichend charakterisiert werden, dürfte wohl jeder ohne weiteres als der Anschauung gemäß anerkennen. Die Aufstellung des Axioms b) hingegen, aus welchem die Notwendigkeit der Bedingungen folgen würde, scheint mir doch — namentlich, wenn man zu höheren Dimensionen aufsteigt, aber auch schon im dreidimensionalen Gebiet — gewagt. Seine Widerspruchslosigkeit genügt natürlich nicht. Ich habe mich noch nicht davon überzeugen können, ob man nicht doch genötigt sein könnte, für $n \geq 3$ eine allgemeinere Zellteilung dem Begriff des Homöomorphismus zugrunde zu legen. Ich komme bei anderer Gelegenheit auf diesen Punkt zurück, welcher eine ausführlichere Erörterung erfordert.

Digitized by Google

Dimension gleich 2, und die bekannte Verallgemeinerung für sphärische Mannigfaltigkeiten von n Dimensionen besagt, daß C gleich 2 oder 0, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Hat man daher eine beliebige $\mathfrak{M}^{(n)}$, und ist a irgend ein Element derselben, so ist die über die Elemente b der Begrenzung von a erstreckte Summe $\sum_b (-1)^{[b]}$ gleich $1 - (-1)^{[a]}$. Erstrecken wir die Summe aber auch noch über das Element a selbst, so tritt noch $(-1)^{[a]}$ hinzu, und wir erhalten $\sum_b (-1)^{[b]} = 1$. Mit Hilfe des Symbols (a, b) (s. S. 31) können wir dieser Gleichung die Form

$$\sum_b (a, b) \cdot (-1)^{[b]} = 1 \qquad ([b] \leq [a]) \tag{2}$$

geben, wo sich die Summe über alle Elemente b von $\mathfrak{M}^{(n)}$ erstreckt, welche der Bedingung $[b] \leqq [a]$ genügen. Wird (2) mit $(-1)^{[a]}$ multipliziert, so ergibt sich

$$\sum_{a,\,b} (a, b) \cdot (-1)^{[a]+[b]} = \sum_a (-1)^{[a]}, \qquad ([b] \leq [a])$$

also wegen (1)

$$C = \sum_{a,\,b} (a, b) \cdot (-1)^{[a]+[b]}. \qquad ([b] < [a]) \tag{3}$$

Hier erstreckt sich die Summe über alle Elementenpaare a, b, wobei a auch $= b$ sein kann, aber zwischen a, b und b, a nicht unterschieden wird. Gleichung (3) gilt für jede Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{(n)}$. Ist $\mathfrak{M}^{(n)}$ geschlossen, so erhält man nach dem ersten Dualitätsgesetz unmittelbar eine zu (2) analoge Gleichung

$$\sum_a (a, b) \cdot (-1)^{n-[a]} = 1. \qquad ([a] \geq [b])$$

Summieren wir diese für jedes Element b von $\mathfrak{M}^{(n)}$ gültige Gleichung nach Multiplikation mit $(-1)^{[b]}$ über b, so erhalten wir nach einfacher Umformung

$$(-1)^n \cdot \sum_{a,\,b} (a, b) \cdot (-1)^{[a]+[b]} = \sum_b (-1)^{[b]} = C. \qquad ([a] \geq [b])$$

Die Vergleichung mit (3) ergibt

$$C = (-1)^n \cdot C,$$

also für ungerades n $C = 0$. D. h. *jede geschlossene Mannigfaltigkeit ungerader Dimension hat die Charakteristik* 0, ein Satz, der wohl zuerst von Poincaré für $n = 3$, von Dehn-Heegaard allgemein bewiesen wurde. — Bezeichnet man mit α_{pq} die Anzahl der Inzidenzen von je einem Element p-ter und einem q-ter Dimension, wobei $\alpha_{kk} = \alpha_k$ die Anzahl der Elemente k-ter Dimension wird, so kann man den Gleichungen (1), (3) die Form geben

$$C = \sum_p (-1)^p \alpha_p = \sum_{p\,q} (-1)^{p+q} \alpha_{pq}. \qquad (q < p) \tag{4}$$

Die sphärischen Mannigfaltigkeiten ungerader Dimension sind also durch ihre Charakteristik in keiner Weise vor andern geschlossenen Mannigfaltigkeiten ausgezeichnet. Bei den Mannigfaltigkeiten gerader Dimension verhält es sich

Digitized by Google

anders, doch gibt es auch hier, wenn die Dimension ≥ 4 ist, nichtsphärische Mannigfaltigkeiten mit der Charakteristik 2. Im Falle $n = 2$ hingegen kommt die Charakteristik 2 ausschließlich den sphärischen Mannigfaltigkeiten zu; alle andern, geschlossene wie berandete, haben eine Charakteristik < 2. Hierauf beruht die dominierende Stellung, welche der Eulersche Satz in der Theorie der gewöhnlichen Polyeder einnimmt.

Bei dem Begriff Indikatrix hat man zunächst die Zelle zu betrachten. An jeder Zelle kann man zwei Indikatrizen unterscheiden. Bei der Strecke ist Indikatrix gleichwertig mit Richtungssinn, bei der Flächenzelle mit Umlaufssinn. Wir können auch sagen: der Flächenzelle erteilen wir eine bestimmte Indikatrix, indem wir jeder ihrer Begrenzungsstrecken eine bestimmte Indikatrix erteilen, und zwar so, daß ein Punkt, in welchem zwei Strecken aneinander grenzen, bei der einen als Endpunkt, bei der andern als Anfangspunkt erscheint. Ebenso erteilen wir einer dreidimensionalen Zelle eine bestimmte Indikatrix, indem wir jeder der begrenzenden Flächenzellen eine bestimmte Indikatrix erteilen, wobei das (Möbiussche Kanten-)Gesetz zu befolgen ist: Jede Kante $s^{(1)} = a^{(0)}b^{(0)}$ erhält in der Indikatrix der einen von ihr begrenzten Flächenzelle die Richtung (Indikatrix) $a^{(0)}b^{(0)}$, in der Indikatrix der andern die Richtung $b^{(0)}a^{(0)}$. In gleicher Weise läßt sich die Indikatrix für Zellen höherer Dimension definieren, da ja das Möbiussche Gesetz sich ohne weiteres verallgemeinern läßt. Es wird hiernach auch klar sein, wie man die Fortsetzung einer für eine Zelle $a^{(n)}$ einer $\mathfrak{M}^{(n)}$ gegebenen Indikatrix auf einem von $a^{(n)}$ ausgehenden und von Zelle zu Nachbarzelle fortschreitenden Wege zu verstehen hat. Machen wir einen geschlossenen Weg, so kann es sein, daß die Indikatrix am Ende mit der am Anfang übereinstimmt, oder daß beide entgegengesetzt sind. Führen alle geschlossenen Wege zur Ausgangsindikatrix zurück, so können wir für die ganze $\mathfrak{M}^{(n)}$ zwei Indikatrizen auseinanderhalten. Andernfalls haben wir eine $\mathfrak{M}^{(n)}$ mit umkehrbarer Indikatrix; die beiden Indikatrizen gehen ineinander über wie die verschiedenen Zweige einer analytischen Funktion.[1]) Hinsichtlich des Verhaltens der Indikatrix hat man also zwei verschiedene Arten von Mannigfaltigkeiten zu unterscheiden.

Die Lehre vom *Homöomorphismus zweidimensionaler Mannigfaltigkeiten* gipfelt in dem Nachweis des Satzes, daß für diese die Charakteristik, die Zahl der Ränder und das Verhalten der Indikatrix das volle Invariantensystem darstellen. Bei Mannigfaltigkeiten von mehr Dimensionen ist dies nicht mehr der Fall. Schon Riemann und Betti haben es unternommen, weitere Invarianten aufzusuchen. Poincaré, der in dieser Richtung weiter arbeitete, fügte zu den *„Bettischen Zahlen"* (die bei ihm nicht ganz dieselbe Bedeutung haben, wie bei Betti) noch andere Invarianten unter dem Namen *Torsionskoeffizienten* hinzu, ohne daß dadurch die Lehre vom Homöomorphismus auch nur für dreidimensionale Mannigfaltigkeiten erledigt würde.

Auf diese Untersuchungen, welche auf die rein arithmetische Theorie der Elementarteiler führen und sich mittels derselben verhältnismäßig einfach erledigen lassen, soll hier nicht eingegangen werden.

---

1) Jedoch treten keine Verzweigungselemente auf. Wollen wir in diesem Punkte den Vergleich aufrecht erhalten, so dürfen wir nicht Funktionen auf der Kugel betrachten, sondern gewisse Funktionen auf Riemannschen Flächen höheren Geschlechts.

Digitized by Google

II.

Dagegen soll ein Punkt ausführlich erörtert werden, der an die vorangegangenen Betrachtungen über die Indikatrix anknüpft.

Bei den Flächen in unserem Raum erkennen wir leicht, daß die einseitigen eine umkehrbare, die zweiseitigen eine nichtumkehrbare Indikatrix haben. Stellen wir uns vor, daß wir auf der Fläche gehen und dabei jeder Zelle, die wir passieren, diejenige Indikatrix beilegen, welche einer Drehung linksum entspricht; dann ist leicht zu sehen: einmal, daß dem Kantengesetz genügt wird, sodann, daß bei Zurücklegung eines geschlossenen Weges die Seite zugleich mit der Indikatrix erhalten bleibt oder gewechselt wird.

Der springende Punkt in dieser Betrachtung ist die Möglichkeit, zwischen einer Drehung linksum und einer Drehung rechtsum zu unterscheiden. In dieser Möglichkeit drückt sich die Tatsache aus, daß die Indikatrix unseres Raumes nicht umkehrbar ist. Wir machen also bei unserer Deduktion von einer Eigenschaft unseres Raumes Gebrauch, die nicht allen Mannigfaltigkeiten, auch nicht allen dreidimensionalen, zukommt.

Die Nichtbeachtung dieses Umstandes ist die Quelle eines Fehlers geworden, der sich fast durch die ganze Literatur zieht. Immer wieder trifft man die Behauptung, die „Seite" drücke nicht eine Beziehung einer $\mathfrak{M}^{(n-1)}$ zu einer sie enthaltenden $\mathfrak{M}^{(n)}$ aus, sondern sei eine innere Eigenschaft der $\mathfrak{M}^{(n-1)}$. Offenbar faßt man den Sachverhalt so auf, als stelle der Begriff *Indikatrix* die exakte Formulierung für den Begriff *Seite* dar, für welchen die gewöhnlich mittels der Normalen gegebene Definition allerdings unzulänglich ist. Das Irrtümliche dieser Auffassung wurde meines Wissens nur von Dyck erkannt. In einer im Jahre 1888 erschienenen Arbeit heißt es (Math. Ann. Bd. 32, S. 474) in bezug auf Einseitigkeit und Zweiseitigkeit: „Diese letztere Eigenschaft ist indessen — wie ich bei anderer Gelegenheit ausführen will — nur eine Lageneigenschaft der Flächen in unserm dreidimensionalen Raum, und sie kann verloren gehen, sofern wir von dieser Lage absehen."

Dyck ist indessen nicht mehr hierauf zurückgekommen, und seine Bemerkung ist offenbar nicht richtig verstanden worden, da sich niemand daran gekehrt hat, obwohl seine Arbeit wohlbekannt ist. Ich selbst bin vor einigen Jahren bei Untersuchungen über ein spezielles einseitiges Polyeder[1]) den Irrtum gewahr worden, und zwar an folgendem Beispiel. Bezeichnet man mit x_k $(k=0,\dots n)$ die homogenen Punktkoordinaten im projektiven Raum $\mathfrak{R}^{(n)}$, so stellt die Gleichung $\sum x_k = 0$ eine lineare $\mathfrak{M}^{(n-1)}$ — sie heiße $\mathfrak{A}$ — dar, welche in $\mathfrak{R}^{(n)}$ einseitig ist. Wendet man auf $\mathfrak{A}$ die Transformation $y_k = |x_k|$ $(k=0,\dots n)$ an, wo die Striche den absoluten Wert bezeichnen, so geht $\mathfrak{A}$ in eine homöomorphe Mannigfaltigkeit $\mathfrak{B}$ über. (Die Beziehung zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ist in den einzelnen Teilen, in welche $\mathfrak{A}$ durch die linearen Mannigfaltigkeiten $x_k = 0$ zerschnitten wird, kollinear und, wenn wir die $\mathfrak{M}^{(n-1)}$ $\sum x_k^2 = 0$ als Fundamentalmannigfaltigkeit einer projektiven Maßbestimmung wählen, sogar kongruent.) Für $n = 3$ wird $\mathfrak{B}$ das einseitige Heptaeder (und zwar, wenn man das Koordinatentetraeder regulär und $\mathfrak{A}$ als unendlich ferne Ebene annimmt, das spezielle Heptaeder, welches in der zitierten Arbeit den Ausgangs-

1) Crelles Journal, Bd. 130, S. 281 ff.

Digitized by Google

punkt bildet). Dagegen ist $\mathfrak{B}$ für jedes gerade n zweiseitig. Die Tatsache, *daß* alsdann *von den beiden homöomorphen Mannigfaltigkeiten* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ *die eine ein-, die andere zweiseitig ist,* mag für den ersten Augenblick befremden, erscheint jedoch ganz trivial, wenn man beachtet, daß sie ja schon bei Linien auf Flächen in unserem Raum vorkommt. Haben wir nämlich in unserem Raum eine einseitige Fläche $\mathfrak{F}$ und auf dieser eine geschlossene Linie l, längs deren sich die Seite von $\mathfrak{F}$ umkehrt, so ist auch l innerhalb $\mathfrak{F}$ einseitig; d. h. man gelangt, wenn man in der Fläche $\mathfrak{F}$ an einem Ufer von l entlang geht, nach einem Umlauf auf das andere Ufer. Aber die Linie l ist mit andern geschlossenen Linien von $\mathfrak{F}$ homöomorph, die auch zweiseitig (in $\mathfrak{F}$) sein können. Ferner kann man durch l zweiseitige z. B. kugelartige Flächen legen, dann ist l auf diesen zweiseitig. So ist auch die Gerade der projektiven Geometrie einseitig in der Ebene, zweiseitig auf dem Hyperboloid. Mit einem Wort, *nicht die Linie an sich ist ein- oder zweiseitig, sie ist es nur in ihrer Beziehung zur Fläche. Dasselbe* nun *begegnet uns bei Mannigfaltigkeiten jeder beliebigen Dimension.*

Natürlich muß man zunächst eine Definition des Begriffs Seite haben. Eine solche erhält man aber sehr leicht, wenn man von dem polyedrischen Aufbau der Mannigfaltigkeiten ausgeht. Nehmen wir, um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, eine Fläche $\mathfrak{M}^{(2)}$ innerhalb einer $\mathfrak{M}^{(3)}$. An eine Flächenzelle $c^{(2)}$ von $\mathfrak{M}^{(2)}$ grenzen dann zwei räumliche Zellen $a^{(3)}$ und $b^{(3)}$, und wir können zunächst inbezug auf die Zelle $c^{(2)}$ von einer $a^{(3)}$-*Seite* und einer $b^{(3)}$-*Seite* sprechen. Ist jetzt $c_1^{(2)}$ eine $c^{(2)}$ benachbarte Flächenzelle von $\mathfrak{M}^{(2)}$, in welche man von $c^{(2)}$ nach Überschreitung der Kante $s^{(1)}$ gelangt, so haben wir an $c_1^{(2)}$ angrenzend wieder zwei räumliche Zellen $a_1^{(3)}$, $b_1^{(3)}$. Die räumlichen Zellen, welche die Kante $s^{(1)}$ enthalten, bilden einen Zyklus $\mathfrak{K}$, welcher durch die Flächenzellen $c^{(2)}$, $c_1^{(2)}$ in zwei Gruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zerrissen wird derart, daß man, wenn ein Heraustreten aus dem Zyklus $\mathfrak{K}$ und ein Überschreiten der Zellen $c^{(2)}$ und $c_1^{(2)}$ nicht gestattet ist, aus $\mathfrak{A}$ nicht nach $\mathfrak{B}$ gelangen kann. Von den räumlichen Zellen $a^{(3)}$, $b^{(3)}$ gehört die eine zu $\mathfrak{A}$, die andere zu $\mathfrak{B}$; dasselbe gilt von $a_1^{(3)}$ und $b_1^{(3)}$. Die beiden Gruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ repräsentieren *„die beiden Seiten der* $\mathfrak{M}^{(2)}$ *an der Stelle* (Kante) $s^{(1)}$". Es mögen etwa $a^{(3)}$ und $a_1^{(3)}$ zu $\mathfrak{A}$, $b^{(3)}$ und $b_1^{(3)}$ zu $\mathfrak{B}$ gehören. Dann sagen wir: „Von der $a^{(3)}$- (bzw. $b^{(3)}$)-*Seite von* $c^{(2)}$ *gelangt man nach Überschreitung der Kante* $s^{(1)}$ *auf die* $a_1^{(3)}$- (bzw. $b_1^{(3)}$)-*Seite von* $c_1^{(2)}$." Durch diese Festsetzungen, welche sich leicht ganz allgemein fassen lassen, wird der Begriff „Seite" („Fortsetzung der Seite") in einer Weise definiert, die offenbar vollkommen den Vorstellungen entspricht, welche man gewöhnlich mit diesem Begriff verbindet.

Nun gelangt man aber auch sehr leicht zu dem nachstehenden Theorem, welches die Beziehungen von Seite und Indikatrix für eine $\mathfrak{M}^{(n)}$ und eine in ihr gelegene $\mathfrak{M}^{(n-1)}$ angibt. In bezug auf eine geschlossene Linie l einer $\mathfrak{M}^{(n-1)}$, können wir fragen: erstens nach dem Verhalten der Seite von $\mathfrak{M}^{(n-1)}$, zweitens nach dem Verhalten der Indikadrix der $\mathfrak{M}^{(n-1)}$, drittens (da die Linie l ja auch innerhalb der $\mathfrak{M}^{(n)}$ verläuft) nach dem Verhalten der Indikatrix der $\mathfrak{M}^{(n)}$. Es ergibt sich:

Wenn beim Durchlaufen der Linie l sowohl die Indikatrix von $\mathfrak{M}^{(n-1)}$ als auch die von $\mathfrak{M}^{(n)}$ erhalten bleibt, so führt l zur Ausgangsseite zurück. Dasselbe tritt ein, wenn beide Indikatrizen sich umkehren. Wenn dagegen eine von

Digitized by Google

beiden Indikatrizen erhalten bleibt, die andere sich umkehrt, so gelangt man nach Durchlaufen von l auf die entgegengesetzte Seite der $\mathfrak{M}^{(n-1)}$.[1])

An diese Überlegungen schließen sich eine Reihe weiterer Fragen an, von denen einige hier besprochen werden sollen. So liegt es nahe, nachdem in der *„Seite" eine Beziehung zwischen einer* $\mathfrak{M}^{(n-1)}$ *und einer* $\mathfrak{M}^{(n)}$ erkannt ist, analoge Beziehungen zwischen Mannigfaltigkeiten zu suchen, bei denen die Dimensionsdifferenz > 1 ist. Solche sind in der Tat vorhanden. Haben wir z. B. in einer $\mathfrak{M}^{(3)}$ eine Linie, so können wir diese an jeder Stelle in dem einen oder andern Sinne umkreisen; und wenn wir uns für einen bestimmten Sinn entschieden haben, so können wir ihn längs der Linie kontinuierlich fortsetzen. Ist die Linie geschlossen, so entsteht die Frage, ob nach vollzogenem Umlauf der Sinn der Umkreisung mit dem ursprünglichen übereinstimmt oder nicht. Wie mit einer Linie innerhalb einer $\mathfrak{M}^{(3)}$, so verhält es sich allgemein mit einer $\mathfrak{M}^{(n-2)}$ innerhalb einer $\mathfrak{M}^{(n)}$: an jeder Stelle können wir die $\mathfrak{M}^{(n-2)}$ in zweierlei Sinne umkreisen Es entspricht dies dem Umstand, daß die n-dimensionalen Zellen, welche mit einer $(n-2)$-dimensionalen der $\mathfrak{M}^{(n-2)}$ inzidieren, einen Zyklus bilden. Wir haben hier offenbar eine ganz ähnliche Erscheinung, wie bei der Indikatrix einer Flächenzelle, nur daß diese durch einen Zyklus von Elementen geringerer Dimension bestimmt wird, während bei der Betrachtung der $\mathfrak{M}^{(n-2)}$ innerhalb einer $\mathfrak{M}^{(n)}$ der Zyklus von Elementen höherer Dimension gebildet wird. Dementsprechend stellen wir dem bisherigen Begriff der Indikatrix, für den wir zur Unterscheidung bisweilen die Bezeichnung *„untere Indikatrix"* gebrauchen, den Begriff *„obere Indikatrix"* gegenüber. Wir wollen ferner die Indikatrix, welche wir bei der n-dimensionalen Zelle kennen lernten, eine *n-dimensionale (untere) Indikatrix* nennen und diese Bezeichnungsweise entsprechend bei der oberen Indikatrix verwenden. Dann können wir an jeder Stelle einer $\mathfrak{M}^{(n-k)}$, die innerhalb einer $\mathfrak{M}^{(n)}$ liegt, (in bezug auf die $\mathfrak{M}^{(n)}$) zwei entgegengesetzte *obere Indikatrizen k^{ter} Dimension unterscheiden.* Der Begriff Seite fällt nunmehr unter den Begriff obere Indikatrix: es ist *Seite = obere Indikatrix erster Dimension.* Als Verallgemeinerung unseres obigen Satzes für eine innerhalb einer $\mathfrak{M}^{(n)}$ liegende $\mathfrak{M}^{(n-k)}$ ergibt sich nun leicht: *Nach Durchlaufung einer geschlossenen in der* $\mathfrak{M}^{(n-k)}$ *gelegenen Linie l bleibt die obere Indikatrix der* $\mathfrak{M}^{(n-k)}$ *(in bezug auf die* $\mathfrak{M}^{(n)}$*) erhalten, oder sie kehrt sich um, je nachdem bei diesem Umlauf die (unteren) Indikatrizen von* $\mathfrak{M}^{(n-k)}$ *und* $\mathfrak{M}^{(n)}$ *gleiches oder verschiedenes Verhalten zeigen.*

III.

In Ergänzung unserer bisherigen Betrachtungen seien hier diejenigen Eigenschaften polyedrischer Mannigfaltigkeiten aufgestellt, welche für eine abstrakte Begründung der zuletzt angegebenen Sätze ausreichen:

1. Eine polyedrische Mannigfaltigkeit ist ein endliches System von Elementen.

2. Jedem Element a wird eine *Dimension* $[a]$ zugeschrieben; dieselbe ist gleich einer der Zahlen $0, 1, \ldots n$.

1) Auf diesen Satz bezieht sich die Bemerkung auf S. 283, Zeile 13 meiner oben zitierten Arbeit.

Digitized by Google

3. Zwei Elemente a, b heißen entweder inzident (in Zeichen $(a, b) = 1$ oder $(b, a) = 1$) oder *nicht inzident* ($(a, b) = 0$ oder $(b, a) = 0$).

4. Ist $[a] = [b]$, so ist dann und nur dann $(a, b) = 1$, wenn $a = b$ ist; ist $(a, b) = 1$, $(b, c) = 1$, $[a] \geqq [b] \geqq [c]$, so ist $(a, c) = 1$.

5. Jedes Element erster Dimension (Strecke) ist mit zwei Elementen 0ter Dimension (Ecken), jedes Element $(n-1)^{\text{ter}}$ Dimension mit ein oder zwei Elementen n^{ter} Dimension inzident.

Hieran schließt sich die S. 31 gegebene Definition der *Randelemente*.

6. Ist $(a, b) = 1$, $[a] = [b] + 2$, so gibt es genau zwei Elemente x, welche den Bedingungen $[x] = [b] + 1$, $(a, x) = 1$, $(b, x) = 1$ genügen.

Unter einem *Weg* verstehen wir eine geordnete Folge von Elementen $a_1, a_2, \ldots a_p$ derart, daß $(a_1, a_2) = 1, (a_2, a_3) = 1, \ldots (a_{p-1}, a_p) = 1$ ist. Bezeichnet $\mathfrak{S}$ ein Teilsystem von $\mathfrak{M}^{(n)}$ oder auch das ganze System, so heißt $\mathfrak{S}$ *zusammenhängend*, wenn zu je zwei Elementen a, b allemal ein Weg mit a als Anfangs-, b als Endelement gefunden werden kann. Dann schließen sich an die bisherigen Bedingungen die folgenden:

7. $\mathfrak{M}^{(n)}$ ist ein zusammenhängendes System.

8. Ist $[a] \geqq 2$ (bzw. $[b] < n-2$), so existieren Elemente (d. h. es existiert wenigstens ein Element) x, welche den Bedingungen $[x] < a$, $(a, x) = 1$ (bzw. $[x] > b$, $(b, x) = 1$) genügen, und diese Elemente bilden ein zusammenhängendes System.

Im Falle $n = 2$ stellen die unter 1. bis 8. gemachten Angaben ein vollständiges System von Grundbegriffen und Axiomen dar. Ist $n > 2$, so schließt sich der Bedingung 8. zunächst die folgende an:

9. Ist $(a, b) = 1$, $[a] \geqq [b] + 3$, so existieren Elemente x, welche den Bedingungen $(a, x) = 1$, $(b, x) = 1$, $[a] > [x] > [b]$ genügen; dieselben bilden ein zusammenhängendes System.[1])

Wir führen nun einige weitere Bezeichnungen ein. Ein Weg $a_1, a_2 \ldots a_p$, bei welchem das letzte Element a_p mit dem ersten a_1 übereinstimmt, soll auch als *geschlossener Weg* gelten können. Dann ist $p-1$ die Zahl seiner Elemente, und wir unterscheiden den Weg von den Wegen nicht, welche durch zyklische Vertauschung aus ihm hervorgehn. — Sind zwei Elemente a_{k-1} und a_{k+1} eines geschlossenen Weges w mit einander inzident, so ergibt die Fortlassung des Elementes a_k einen neuen geschlossenen Weg w'; w und w' heißen *Nachbarwege*. Den (einmaligen oder wiederholten) Übergang aus einem Wege zu einem benachbarten, bezeichnen wir als *stetige Variation des Weges;* Wege, die durch stetige Variation aus einander hervorgehen, werden auch als *homotop* bezeichnet. Ein einzelnes Element soll auch als geschlossener Weg angesehen werden dürfen. Alle geschlossenen Wege, welche sich auf ein einziges Element zusammenziehen lassen (hierher gehören z. B. alle, welche aus zwei oder drei

1) Nunmehr ist es leicht, auch die für $\mathfrak{M}^{(3)}$ vorauszusetzenden Eigenschaften vollständig anzugeben. Formal am einfachsten gelangt man hierzu, wenn man den bisherigen Bedingungen noch die folgenden hinzufügt: Im Falle $[a] = 3$ soll $\sum_b (a, b) \cdot (-1)^{[b]} = 1$, im Falle $[a] = 0$ soll $\sum_b (a, b) \cdot (-1)^{[b]} = 0$ oder $= -1$ sein, je nachdem a Randelement ist oder nicht.

Digitized by Google

Elementen bestehen), sind (wie aus 7. folgt) unter einander homotop. Wir sagen: sie sind *homotop* 0.

Ein System von Elementen der $\mathfrak{M}^{(n)}$ soll *Inzidenzgruppe* heißen, wenn es entweder nur aus einem einzigen Element oder aus mehreren Elementen besteht, die alle mit einander inzident sind. Eine Inzidenzgruppe kann höchstens $n+1$ Elemente enthalten; sie heißt *total*, wenn sie so viele enthält, sonst *partiell*. Zwei totale Inzidenzgruppen sollen *benachbart* heißen, wenn sie n Elemente gemein haben, sich also nur in einem unterscheiden. Ein System σ totaler Inzidenzgruppen nennen wir *zusammenhängend*, wenn man von irgend einer zugehörigen Inzidenzgruppe ausgehend und immer zu Nachbargruppen (innerhalb σ) fortschreitend zu jeder andern Gruppe von σ gelangen kann. Die totalen Inzidenzgruppen, welche eine gegebene partielle enthalten, bilden, wie aus den Bedingungen 1. bis 9. gefolgert werden kann, allemal ein zusammenhängendes System.

Wir kommen nun zur *Indikatrix*. Nach den früheren Erklärungen hätten wir einem Element $a^{(n)}$ eine bestimmte Indikatrix dadurch zu erteilen, daß wir ein mit $a^{(n)}$ inzidentes Element $a^{(n-1)}$ wählen und diesem eine bestimmte Indikatrix geben. Dies geschieht aber wieder, indem ein mit $a^{(n-1)}$ inzidentes Element $a^{(n-2)}$ gewählt wird usf. Schließlich steigen wir so bis zu einer „Strecke" $a^{(1)}$ herab, deren Indikatrix nun durch die Angabe einer ihrer Ecken $a^{(0)}$, (wir wollen ein für allemal festsetzen) derjenigen bestimmt wird, die als Anfangspunkt gelten soll. So würde also die Indikatrix von $a^{(n)}$ durch eine totale, $a^{(n)}$ enthaltende Inzidenzgruppe bestimmt werden. Die Möglichkeit aber, nach dem früher angegebenen Prinzip zwei Indikatrizen von $a^{(n)}$ auseinander zu halten, läßt sich (wenn $n \geqq 3$) nicht aus den Daten 1. bis 9. ableiten, sondern ist als weitere bei der Definition der Mannigfaltigkeiten vorauszusetzende Eigenschaft zu formulieren. Indem wir gleich die duale Eigenschaft hinzufügen, sprechen wir die neue Bedingung so aus:

10. Die totalen Inzidenzgruppen, welche ein gegebenes Element $a^{(n)}$ bzw. $a^{(0)}$ enthalten, zerfallen in zwei Klassen derart, daß je zwei benachbarte allemal verschiedenen Klassen angehören.

Ist nun a ein Element von $\mathfrak{M}^{(n)}$, dessen Dimension > 0 und $< n$ ist, so gehören zu a zwei Systeme a_u und a_o partieller Inzidenzgruppen, die so definiert sind: a_u (bzw. a_o) besteht aus denjenigen Inzidenzgruppen von je $[a]+1$ (bzw. $n-[a]+1$) Elementen, welche das Element a und außerdem nur Elemente enthalten, deren Dimension $< [a]$ (bzw. $> [a]$) ist. Aus 10. folgt leicht, daß auch jedes der Systeme a_u und a_o in zwei Klassen a'_u und a''_u (bzw. a'_o und a''_o) zerfällt, derart, daß benachbarte Gruppen, d. h. solche, die sich nur um ein Element unterscheiden, verschiedenen Klassen angehören.[1]) Wir nennen a'_u und a''_u *die beiden unteren*, a'_o und a''_o *die beiden oberen Indikatrizen des Elementes* a. Jede totale, a enthaltende Inzidenzgruppe „gehört" zu einer der Indikatrizen a'_u, a''_u, insofern als nach Weglassung derjenigen ihrer Elemente, deren Dimension $> [a]$ ist, eine zu a'_u oder a''_u gehörige Inzidenzgruppe zurückbleibt. Analoges gilt für a'_o und a''_o. — Als weitere Folge

1) Im Falle, daß $[a] = n-1$ und a ein Randelement ist, besteht a_o allerdings nur aus einer einzigen Gruppe, doch empfiehlt es sich, auch in diesem Falle zwei Klassen a'_o und a''_o zu zählen, von denen allerdings eine leer ausgeht. Ähnliche Festsetzungen sind im Folgenden zu beachten.

Digitized by Google

der bisherigen Annahmen ergibt sich dann ganz allgemein: Diejenigen totalen Inzidenzgruppen, welche eine gegebene partielle enthalten, zerfallen in zwei Klassen derart, daß benachbarte Gruppen verschiedenen Klassen angehören.

Besteht die partielle Inzidenzgruppe aus einem einzigen Element a, so bezeichnen wir die beiden Klassen auch als *„die beiden Indikatrizen der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{(n)}$ an der Stelle a"*. — Wie man sogleich sieht, stimmen im Falle $[a] = n$ bzw. $[a] = 0$ die beiden Indikatrizen von $\mathfrak{M}^{(n)}$ an der Stelle a mit den beiden unteren bzw. oberen Indikatrizen des Elementes a überein; im Falle $n > [a] > 0$ repräsentieren diejenigen totalen Inzidenzgruppen, welche (zugleich) zu a_u' und a_o' oder zu a_u'' und a_o'' gehören, die eine, diejenigen, welche zu a_u' und a_o'' oder zu a_u'' und a_o' gehören, die andere Indikatrix von $\mathfrak{M}^{(n)}$ an der Stelle a.

Es seien nun a und b irgend zwei inzidente Elemente, a', a'' bzw. b', b'' die beiden Indikatrizen von $\mathfrak{M}^{(n)}$ an der Stelle a bzw. b, endlich seien c' und c'' die beiden Klassen, in welche das System der totalen, a und b zugleich enthaltenden Inzidenzgruppen von $\mathfrak{M}^{(n)}$ zerfällt. Dann gehören die Gruppen der Klasse c' sämtlich zu einer und derselben Indikatrix von a und ebenso sämtlich zu einer und derselben Indikatrix von b. Nehmen wir an, sie gehörten zu den Indikatrizen a' und b', dann besteht c' (bzw. c'') aus denjenigen totalen Inzidenzgruppen, welche sowohl zu a' als auch zu b' (bzw. sowohl zu a'' als auch zu b'') gehören. Wir sagen: der Weg von a nach b führt die Indikatrix a' in b', die Indikatrix a'' in b'' über. Damit ist die *Fortsetzung der Indikatrix* definiert. — Die eingeführten Bezeichnungen rechtfertigen sich durch den leicht zu beweisenden Satz: Wenn auf dem geschlossenen Wege w die Indikatrix sich umkehrt (bzw. nicht umkehrt), so gilt dasselbe für alle Wege, die aus w durch stetige Variation hervorgehen.

Lassen sich alle totalen Inzidenzgruppen der $\mathfrak{M}^{(n)}$ so in zwei Klassen einteilen, daß benachbarte allemal verschiedenen Klassen angehören, so haben wir eine $\mathfrak{M}^{(n)}$ mit *nicht umkehrbarer Indikatrix*. Andernfalls gibt es Wege, auf denen sich die Indikatrix umkehrt. In diesem Falle können wir die Indikatrizen a', a'', welche a an den verschiedenen Stellen a besitzt als Elemente einer neuen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_1^{(n)}$ auffassen, indem wir festsetzen, daß allgemein $[a'] = [a''] = [a]$ und (a', b') dann und nur dann $= 1$ sein soll, wenn $(a, b) = 1$ ist und überdies der von a nach b führende Weg die Indikatrix a' in die Indikatrix b' überführt. Die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_1^{(n)}$ hat stets eine nicht umkehrbare Indikatrix und ihre Charakteristik ist doppelt so groß wie die von $\mathfrak{M}^{(n)}$. — Wichtig wird dieser Verdoppelungsprozeß dadurch, daß er, auf zwei homöomorphe Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}^{(n)}$, $\mathfrak{P}^{(n)}$ angewendet, stets wieder zu zwei homöomorphen Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}_1^{(n)}$, $\mathfrak{P}_1^{(n)}$ führt, sodaß also jedem Typus mit umkehrbarer Indikatrix ein solcher mit nicht umkehrbarer entspricht.[1]) Dieses Entsprechen ist bei den geschlossenen Flächen ($\mathfrak{M}^2$) ein

1) Der Beweis für diese letzte Behauptung kann natürlich, wenn $n > 2$, nicht auf Grund der Eigenschaften 1. bis 10. erbracht werden, da schon die Definition des Homöomorphismus noch auf weiteren Eigenschaften beruht. Im übrigen begegnet man beim Beweise natürlich keinen weiteren Schwierigkeiten als denen, die der Definition des Homöomorphismus im Wege stehen. Vgl. S. 32 Anm. Daß, falls $\mathfrak{M}^{(n)}$ und $\mathfrak{P}^{(n)}$ durch die Dehn-Heegaardschen internen Transformationen auseinander ableitbar sind, dies auch für $\mathfrak{M}_1^{(n)}$ und $\mathfrak{P}_1^{(n)}$ gilt, ist leicht zu sehen.

Digitized by Google

ein-eindeutiges, da hier die verschiedenen Typen durch die Charakteristik vollständig auseinander gehalten werden, und diese bei den Typen mit umkehrbarer Indikatrix alle Werte $\leqq 1$, bei den andern alle graden Werte $\leqq 2$, also die doppelten jener annimmt.

Es sei $\mathfrak{M}^{(\nu)}$ $(\nu = n - k,\ 0 < k < n)$ eine in der $\mathfrak{M}^{(n)}$ gelegene Mannigfaltigkeit; d. h. es sei $\mathfrak{M}^{(\nu)}$ ein Teilsystem von $\mathfrak{M}^{(n)}$, bestehend aus Elementen 0ter bis ν^{ter} Dimension, welche den Bedingungen 1. bis 10. genügen, wofern man darin n durch ν, $\mathfrak{M}^{(n)}$ durch $\mathfrak{M}^{(\nu)}$ ersetzt.[1]) Es sei ferner w ein geschlossener, aus Elementen von $\mathfrak{M}^{(\nu)}$ bestehender Weg, und es seien a und b zwei auf einander folgende Elemente von w. An der Stelle a besitzt $\mathfrak{M}^{(n)}$ zwei Indikatrizen a', a'', ebenso $\mathfrak{M}^{(\nu)}$ zwei Indikatrizen a'_1, a''_1. Es bezeichne $\mathfrak{A}$ das System derjenigen totalen Inzidenzgruppen, welche eine in bezug auf $\mathfrak{M}^{(\nu)}$ totale Inzidenzgruppe mit dem Element a enthalten. Dann zerfällt $\mathfrak{A}$ in vier Klassen: $a'a'_1$, $a'a''_1$, $a''a'_1$, $a''a''_1$, welche so definiert sind: eine Inzidenzgruppe aus $\mathfrak{A}$ zählt zur Klasse $a'a'_1$, wenn sie selbst zur Indikatrix a' und die in ihr enthaltene, in bezug auf $\mathfrak{M}^{(\nu)}$ totale Inzidenzgruppe zu a'_1 gehört, usf. Diese vier Klassen fassen wir zu zwei und zwei zu Doppelklassen, nämlich $a'a'_1 + a''a''_1$ und $a'a''_1 + a''a'_1$ zusammen. Zwei benachbarte Inzidenzgruppen aus $\mathfrak{A}$ gehören zu derselben oder zu verschiedenen Doppelklassen, je nachdem die Dimension der Elemente, in denen sie sich unterscheiden $\leqq \nu$ oder $> \nu$ ist. Ist daher $\mathfrak{a}$ irgend ein ν-dimensionales mit a inzidentes Element von $\mathfrak{M}^{(\nu)}$, so entsprechen seine beiden oberen Indikatrizen $\mathfrak{a}'_0$ und $\mathfrak{a}''_0$ den beiden Doppelklassen in der Weise, daß alle $\mathfrak{a}$ enthaltenden Inzidenzgruppen aus $\mathfrak{A}$, welche zu $\mathfrak{a}'_0$ gehören, in der einen, alle, welche zu $\mathfrak{a}''_0$ gehören, in der anderen Doppelklasse enthalten sind. Hiernach sprechen wir von den beiden oberen Indikatrizen von $\mathfrak{M}^{(\nu)}$ in bezug auf $\mathfrak{M}^{(n)}$ an der Stelle a und bezeichnen dieselben durch die Doppelklassen $a'a'_1 + a''a''_1$ und $a'a''_1 + a''a'_1$, indem wir unter der Bezeichnung „obere Indikatrix $a'a'_1 + a''a''_1$" diejenigen oberen Indikatrizen der mit a inzidenten ν-dimensionalen Elemente von $\mathfrak{M}^{(\nu)}$ zusammenfassen, welche der Doppelklasse $a'a'_1 + a''a''_1$ entsprechen. Wenn beim Fortschreiten vom Element a zum folgenden Element b des Weges w die Indikatrizen a', a'', a'_1, a''_1 bzw. in b', b'', b'_1, b''_1 übergehen, so sagen wir: die obere Indikatrix (Doppelklasse) $a'a'_1 + a''a''_1$ geht in die obere Indikatrix (Doppelklasse) $b'b'_1 + b''b''_1$ über. Wesentlich ist dabei, daß ein ν-dimensionales Element $\mathfrak{c}$, welches mit a und b zugleich inzident ist, in $a'a'_1 + a''a''_1$ allemal dieselbe obere Indikatrix wie in $b'b'_1 + b''b''_1$ hat.

Unser oben (S. 37) über das Verhalten der oberen Indikatrix von $\mathfrak{M}^{(\nu)}$ beim Durchlaufen eines geschlossenen Weges ausgesprochener Satz erscheint hier als unmittelbare Folge der letzten Definitionen und hat bei dieser Fassung

---

1) Der obigen Erklärung zufolge würde $\mathfrak{M}^{(\nu)}$ in $\mathfrak{M}^{(n)}$ singularitätenfrei sein. Diese Voraussetzung ist für das folgende unnötig und nur der größeren Anschaulichkeit wegen gemacht. Man kann allgemein $\mathfrak{M}^{(\nu)}$ als die Abbildung einer $\mathfrak{B}^{(\nu)}$ (deren Elemente von denen der $\mathfrak{M}^{(n)}$ verschieden sind) auf die $\mathfrak{M}^{(n)}$ auffassen, wobei folgende Regeln festzuhalten sind (vgl. Enzyklopädie III A B 3 Nr. 6): Jedem Element von $\mathfrak{B}^{(\nu)}$ entspricht ein Element derselben Dimension von $\mathfrak{M}^{(n)}$; inzidenten Elementen von $\mathfrak{B}^{(\nu)}$ entsprechen inzidente von $\mathfrak{M}^{(n)}$; zwei verschiedenen Elementen von $\mathfrak{B}^{(\nu)}$, welche mit demselben ν-dimensionalen Element inzident sind, entsprechen verschiedene Elemente von $\mathfrak{M}^{(n)}$.

Digitized by Google

die Eigenschaften 1. bis 10. der $\mathfrak{M}^{(n)}$ zur alleinigen Voraussetzung, gilt daher nicht nur für Mannigfaltigkeiten (da diese durch die Eigenschaften 1. bis 10. nicht vollständig charakterisirt sind) sondern auch für allgemeinere Komplexe.

Wollen wir aber — indem wir uns jetzt auf den Fall $\nu = n - 1$ beschränken — nachweisen, daß sich der Begriff *„obere Indikatrix der* $\mathfrak{M}^{(n-1)}$“ nach der jetzigen Fassung mit dem Begriff *„Seite“* deckt, falls wir die Seite wie früher (S. 36) definieren, so müssen wir noch von einer weiteren Eigenschaft der $\mathfrak{M}^{(n)}$ Gebrauch machen, die es zum Ausdruck bringt, daß überhaupt an jeder Stelle der $\mathfrak{M}^{(n-1)}$ zwei Seiten unterschieden werden können. Behalten wir unsere letzten Bezeichnungen bei, so wird jedem mit a inzidenten $(n-1)$-dimensionalen Element $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{M}^{(n-1)}$ durch die Doppelklasse $a'a_1' + a''a_1''$ eine bestimmte obere Indikatrix und damit ein bestimmtes der beiden mit $\mathfrak{a}$ inzidenten n-dimensionalen Elemente zugeordnet. So entspricht der Doppelklasse $a'a_1' + a''a_1''$ ein System $\mathfrak{T}'$, bestehend aus einem oder mehreren Elementen von n-Dimensionen.[1]) Ein analoges System $\mathfrak{T}''$ entspricht der Doppelklasse $a'a_1'' + a''a_1'$. Bezeichnet $\mathfrak{S}$ das System derjenigen mit a inzidenten Elemente von $\mathfrak{M}^{(n)}$, welche nicht zu $\mathfrak{M}^{(n-1)}$ gehören[2]), so sind $\mathfrak{T}'$ und $\mathfrak{T}''$ Teilsysteme von $\mathfrak{S}$. Auf Grund der Eigenschaften 1. bis 10. läßt sich nun leicht beweisen, daß die Elemente von $\mathfrak{T}'$ (ebenso die von $\mathfrak{T}''$) innerhalb $\mathfrak{S}$ mit einander zusammenhängen. Da ferner jedes Element von $\mathfrak{S}$ mit gewissen Elementen von $\mathfrak{T}'$ oder $\mathfrak{T}''$ inzident ist, so folgt, daß das System $\mathfrak{S}$, sofern es nicht zusammenhängend ist, nur in zwei Systeme $\mathfrak{S}'$ und $\mathfrak{S}''$ zerfällt, deren jedes zusammenhängend ist und von denen das eine $\mathfrak{T}'$, das andere $\mathfrak{T}''$ enthält. Daß $\mathfrak{S}$ aber wirklich zerfällt, ist hier als neue, von 1. bis 10. unabhängige Eigenschaft der Mannigfaltigkeiten einzuführen. $\mathfrak{S}'$ und $\mathfrak{S}''$ repräsentieren *die beiden Seiten von* $\mathfrak{M}^{(n-1)}$ *an der Stelle* a, sie entsprechen den beiden oberen Indikatrizen. Sind ferner $\mathfrak{U}'$ und $\mathfrak{U}''$ die beiden Seiten von $\mathfrak{M}^{(n-1)}$ an der folgenden Stelle b des Weges, und sind die $\mathfrak{S}'$ und $\mathfrak{U}'$ entsprechenden oberen Indikatrizen solche, die beim Fortschreiten von a nach b ineinander übergehn, so hat $\mathfrak{S}'$ mit $\mathfrak{U}'$, $\mathfrak{S}''$ mit $\mathfrak{U}''$, nicht aber $\mathfrak{S}'$ mit $\mathfrak{U}''$ oder $\mathfrak{S}''$ mit $\mathfrak{U}'$ gewisse Elemente gemein, so daß also auch der Fortsetzung der oberen Indikatrix die Fortsetzung der Seite in dem früher definierten Sinne entspricht.

IV.

Unter den vielen Operationen, mittels deren man aus gegebenen Mannigfaltigkeiten neue ableiten kann, ist eine besonders bemerkenswert, die wir als *Multiplikation* bezeichnen wollen. Fassen wir die Mannigfaltigkeiten als kontinuierliche Gebilde auf, so besteht die Multiplikation zweier Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ darin, daß jede Kombination aus einem Element (Punkt)

1) Läßt man zu, daß $(n-1)$-dimensionale Zellen von $\mathfrak{M}^{(n-1)}$ der Berandung von $\mathfrak{M}^{(n)}$ angehören, so kann $\mathfrak{T}'$ auch leer ausgehen.

2) Dabei ist vorausgesetzt, daß a nicht Randelement von $\mathfrak{M}^{(n-1)}$ ist; andernfalls hat man in $\mathfrak{S}$ nur diejenigen Elemente aufzunehmen, welche, ohne zu $\mathfrak{M}^{(n-1)}$ zu gehören, außer mit a noch mit einem Element von $\mathfrak{M}^{(n-1)}$ inzident sind, das selbst mit a inzident und nicht Randelement von $\mathfrak{M}^{(n-1)}$ ist.

Digitized by Google

von $\mathfrak{A}$ und einem von $\mathfrak{B}$ als Element einer neuen kontinuierlichen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}$ angesehn wird, deren Dimension gleich der Summe der Dimensionen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ist. Für die Multiplikation gelten das kommutative und das assoziative Gesetz. Natürlich sind die meisten Mannigfaltigkeiten nicht in solche niedrigerer Dimensionen zerlegbar. Die einfachsten zerlegbaren Mannigfaltigkeiten sind die vom Typus der Zellen. Bezeichnet $\mathfrak{Z}_n$ den Typus der n-dimensionalen Zelle, so hat man

$$\mathfrak{Z}_p \cdot \mathfrak{Z}_q = \mathfrak{Z}_{p+q}, \quad \mathfrak{Z}_n = \mathfrak{Z}_1^n.$$

Es entspricht dies ganz der gewöhnlichen Auffassung des Rechtecks als Produktes zweier, des Quaders als Produktes dreier Strecken usf., nur daß von einer Unterscheidung homöomorpher Mannigfaltigkeiten abgesehen wird. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{K}_n$ die sphärische Mannigfaltigkeit von n Dimensionen, so stellen

$$\mathfrak{Z}_1^2, \quad \mathfrak{Z}_1\mathfrak{K}_1, \quad \mathfrak{K}_1^2$$

die einzigen zerlegbaren Flächen dar, Typen, die durch das Rechteck, den Mantel eines (begrenzten) Zylinders, die Ringfläche repräsentiert werden. Vom Typus der letzteren ist auch die Regelfläche $\mathfrak{F}$ zweiten Grades. Die auf $\mathfrak{F}$ gelegenen Regelscharen $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$ stellen Mannigfaltigkeiten vom Typus $\mathfrak{K}_1$ dar, und jeder Punkt von $\mathfrak{F}$ stellt als Schnittpunkt zweier Geraden eine Kombination von einem Element aus $\mathfrak{R}$ und einem Element aus $\mathfrak{R}'$ dar. Fassen wir aber eine (allgemeine) Fläche $\mathfrak{F}$ vom zweiten Grade als komplexe Punktmannigfaltigkeit auf, so ist $\mathfrak{F}$ vierdimensional, die Regelscharen $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$ sind zweidimensional und zwar vom Typus $\mathfrak{K}_2$, so daß $\mathfrak{F}$ den Typus $\mathfrak{K}_2^2$ hat. Einen einfachen Repräsentanten desselben Typus stellt uns im projektiven Raum die Mannigfaltigkeit der reellen, orientierten d. h. mit Richtungssinn versehenen Geraden dar. Bedienen wir uns nämlich Plückerscher Koordinaten

$$l_{23}, \; l_{31}, \; l_{12}, \; l_{14}, \; l_{24}, \; l_{34} \qquad (l_{23}l_{14} + l_{31}l_{24} + l_{12}l_{34} = 0),$$

so stellen zwei Systeme l_{pq}, l'_{pq} dann dasselbe Element dar, wenn sie sich nur um einen positiven Proportionalitätsfaktor unterscheiden, bei Unterscheidung um einen negativen haben wir dieselbe Gerade, aber mit verschiedenem Richtungssinn. Zwischen der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ der orientierten Geraden und der komplexen Punktmannigfaltigkeit der Fläche zweiten Grades $\mathfrak{F}$, welcher wir die Gleichung

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$$

geben können, erhalten wir eine ein-eindeutige, stetige Beziehung, wenn wir dem Punkt $\lambda x_1, \; \lambda x_2, \; \lambda x_3, \; \lambda x_4$ von $\mathfrak{F}$ das Element

$$l_{pq} = \lambda\lambda'(x_p x'_q - x_q x'_p)\cdot i$$

von $\mathfrak{M}$ zuordnen, unter λ', x'_p, x'_q die zu λ, x_p, x_q konjugiert-komplexen Zahlen, unter i die imaginäre Einheit verstehend. Zwei konjugiert-komplexen Punkten von $\mathfrak{F}$ entspricht dieselbe Gerade, aber mit verschiedenem Richtungssinn.

Ein Beispiel für eine zerlegbare Mannigfaltigkeit von fünf Dimensionen liefern uns die (reellen) Flächenelemente im projektiven Raum, wenn man

Digitized by Google

unter Flächenelement die Kombination aus einer Ebene mit einem auf ihr liegenden Punkt versteht. Setzen wir nämlich

$$(1)\qquad \begin{cases} u_1 = & \lambda_3 x_2 - \lambda_2 x_3 + \lambda_1 x_4 \\ u_2 = -\lambda_3 x_1 & + \lambda_1 x_3 + \lambda_2 x_4 \\ u_3 = \lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2 & + \lambda_3 x_4 \\ u_4 = -\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 - \lambda_3 x_3 & , \end{cases}$$

so wird

$$(2)\qquad u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)$$

$$(3)\qquad u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0.$$

Gleichung (2) zeigt, daß bei Beschränkung auf reelle Größen, wenn, wie hier stets vorausgesetzt werden soll, weder die $\lambda_k (k = 1, 2, 3)$ noch die $x_k (k = 1, 2, 3, 4)$ sämtlich verschwinden, auch die u_k nicht sämtlich verschwinden können. Daraus folgt weiter, daß bei festgehaltenen x_k linear unabhängigen Systemen λ_k auch linear unabhängige Systeme u_k entsprechen, ferner, daß durch die Gleichungen (1) wenn wir die λ_k variieren, alle Lösungen u_k der Gleichung (3) dargestellt werden. Wenn man daher x_k bezw. u_k als Koordinaten eines Punktes x bezw. einer Ebene u im projektiven Raum, die λ_k als Koordinaten eines Punktes λ in einer projektiven Ebene deutet, so stellt (3) die Bedingung dafür dar, daß x und u ein Flächenelement $(x|u)$ bestimmen. Aus dem Vorhergehenden folgt, daß die Gleichungen (1) eine ein-eindeutige Beziehung vermitteln zwischen den Kombinationen aus einem x und einem λ einerseits, den Flächenelementen $(x|u)$ andererseits. Werden also durch $\mathfrak{R}_2$ und $\mathfrak{R}_3$ die Typen bezeichnet, welche die Punktmannigfaltigkeiten der projektiven Ebene und des projektiven Raumes repräsentieren, so ist das System der Flächenelemente im projektiven Raum vom Typus $\mathfrak{R}_2 \cdot \mathfrak{R}_3$.

Ausgehend von der Gleichung $\mathfrak{Z}_p \cdot \mathfrak{Z}_q = \mathfrak{Z}_{p+q}$ gelangen wir zu folgender Festsetzung der *Multiplikation polyedrischer Mannigfaltigkeiten* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ von m bezw. n Dimensionen:

Das Produkt $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{A} = \mathfrak{C}$ bezeichnet eine polyedrische Mannigfaltigkeit von $m + n$ Dimensionen. Die Elemente von $\mathfrak{C}$ werden durch die Kombinationen (Produkte) $ab = ba$ aus je einem Element a von $\mathfrak{A}$ und einem Element b von $\mathfrak{B}$ bezeichnet. Es ist $[ab] = [a] + [b]$. Ist $[ab] \geqq [a_1 b_1]$, so ist $(ab, a_1 b_1) = (a_1 b_1, ab) = 1$, wenn $(a, a_1) = 1$, $(b, b_1) = 1$, $[a] \geqq [a_1]$, $[b] \geqq [b_1]$ ist; sonst ist $(ab, a_1 b_1) = (a_1 b_1, ab) = 0$.

Man überzeugt sich leicht, daß das System $\mathfrak{C}$ die im Abschnitt III aufgeführten Eigenschaften 1. bis 10. besitzen muß, sofern man nur eben diese bei $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ voraussetzt. Bei den Eigenschaften 1. bis 9. ergibt sich dies fast unmittelbar; zum Nachweis von 10. empfiehlt es sich, die totalen Inzidenzgruppen von $\mathfrak{C}$ in zwei „Kategorien" $\varkappa'$, $\varkappa''$ einzuteilen. Es sei nämlich c eine solche Gruppe, sie bestehe aus den Elementen $c^{(0)}, c^{(1)}, \ldots c^{(m+n)}$, und es sei $c^{(k)} = a_k \cdot b_k$ $(k = 0, \cdots m + n)$, wo a_k zu $\mathfrak{A}$, b_k zu $\mathfrak{B}$ gehört. Dann ist zu unterscheiden, ob die Summe $\sum_{k=0}^{m+n} [a_k]$ gerade oder ungerade ist, und hiernach

Digitized by Google

die Einteilung in die beiden Kategorien zu treffen. Wir hätten ebenso gut die Summe $\sum_{k=0}^{m+n}[b_k]$ bei der Einteilung zugrunde legen können; da aber

$$\sum_{k=0}^{m+n}[a_k]+\sum_{k=0}^{m+n}[b_k]=\sum_{k=0}^{m+n}[a_k]+[b_k]=\sum_{k=0}^{m+n}[c^{(k)}]=\sum_{k=0}^{m+n}k=\frac{(m+n)(m+n-1)}{2},$$

also konstant ist, so erhalten wir beidemal dieselbe Einteilung. Unter den Elementen a_k sind $m+1$ verschieden, sie bilden eine totale Inzidenzgruppe $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{A}$, ebenso die Elemente b_k eine solche $\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{B}$. Nennen wir $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ die *Komponenten* von $\mathfrak{c}$, so hat zwar jede totale Inzidenzgruppe von $\mathfrak{C}$ zwei bestimmte Komponenten, aber dieselben beiden Komponenten kommen verschiedenen totalen Inzidenzgruppen von $\mathfrak{C}$ zu. Es sei jetzt $c = ab$ irgend ein Element von $\mathfrak{C}$, γ das System derjenigen totalen Inzidenzgruppen von $\mathfrak{C}$, welche das Element c enthalten, endlich mögen a', a'' bezw. b', b'' die Indikatrizen bezeichnen, welche $\mathfrak{A}$ bezw. $\mathfrak{B}$ an der Stelle a bezw. b hat. Bei jeder Gruppe aus γ ist zu unterscheiden, ob ihre erste Komponente zu a' oder a'', ob ihre zweite zu b' oder b'', ob sie selbst zur Kategorie $\varkappa'$ oder $\varkappa''$ gehört. Das System γ zerfällt demgemäß in acht Systeme, welche durch die Symbole $a'b'\varkappa'$, $a'b'\varkappa''$, $a'b''\varkappa'$, $a'b''\varkappa''$, $a''b'\varkappa'$, $a''b'\varkappa''$, $a''b''\varkappa'$, $a''b''\varkappa''$ gekennzeichnet sind. Sind $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}_2$ zwei benachbarte Inzidenzgruppen aus γ, so findet man leicht, daß nur die beiden Fälle möglich sind: entweder stimmen $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}_2$ in beiden Komponenten überein — dann gehören sie verschiedenen Kategorien an; oder $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}_2$ stimmen in einer Komponente überein, während die andern benachbart sind — dann gehören sie zu derselben Kategorie. Faßt man daher die acht Teilsysteme von γ zu vier und vier in zwei Klassen $a'b'\varkappa' + a'b''\varkappa'' + a''b'\varkappa'' + a''b''\varkappa'$ und $a'b'\varkappa'' + a'b''\varkappa' + a''b'\varkappa' + a''b''\varkappa''$ zusammen, so gehören die benachbarten Gruppen $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}_2$ stets zu verschiedenen Klassen; d. h. $\mathfrak{C}$ besitzt die Eigenschaft 10. Daraus ergeben sich auch leicht die weiter unten über die Indikatrix aufgestellten Sätze.

Von Interesse ist es, die Beziehungen zwischen den Invarianten eines Produkts und denen seiner Faktoren zu verfolgen.[1]) Wir beschränken uns auf die schon früher betrachteten Invarianten:

1. Die Charakteristik. Es ist $\sum_{c}(-1)^{[c]}=\sum_{a,\,b}(-1)^{[ab]}=\sum_{a,\,b}(-1)^{[a]+[b]}$ $=\sum_{a}(-1)^{[a]}\cdot\sum_{b}(-1)^{[b]}$, d. h. *die Charakteristik eines Produkts ist gleich dem Produkt der Charakteristiken.*

2. Die Zahl der Ränder. Man findet leicht: Sind beide Faktoren geschlossen, so ist das Produkt geschlossen. Ist ein Faktor geschlossen und besitzt der andere r Ränder, so hat das Produkt r Ränder. Sind beide Faktoren berandet, so hat das Produkt stets einen Rand.

3. Die Indikatrix. Hat keiner der Faktoren eine umkehrbare Indikatrix, so ist auch die Indikatrix des Produkts nicht umkehrbar; anderenfalls ist sie umkehrbar.

1) Die tiefere Bedeutung der Multiplikation beruht natürlich darauf, daß der Typus des Produkts ungeändert bleibt, wenn man die Faktoren durch andere von demselben Typus ersetzt, woraus folgt, daß von einer Multiplikation der Typen gesprochen werden kann. Was den Beweis anlangt, so gilt das in S. 40, Anm. Gesagte auch hier.

Digitized by Google

Aus dem Satz über die Charakteristik folgt u. a., wenn man beachtet, daß die Charakteristik einer geschlossenen Fläche jeden (ganzzahligen) Wert $\leqq 2$ haben kann: die Charakteristik einer geschlossenen $\mathfrak{M}^{(n)}$ kann, wenn n gerade und $\geqq 4$ ist, jeden Wert haben. — Das Verhalten der Indikatrix des Produkts $\mathfrak{C}$ auf einem geschlossenen Wege $w = c_1, c_2, \cdots c_p = c_1$ ist, wie leicht zu sehen, durch das Verhalten der Indikatrizen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ auf den Komponenten w_a und w_b von w bestimmt. Dabei sind als Komponenten von w die Wege $w_a = a_1, a_2, \cdots a_p = a_1$, $w_b = b_1, b_2, \cdots b_p = b_1$ bezeichnet, wo $c_k = a_k \cdot b_k$ ist. Die Indikatrix von $\mathfrak{C}$ bleibt auf dem Wege w erhalten, wenn die Indikatrizen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ auf den Wegen w_a und w_b beide erhalten bleiben oder sich beide umkehren. Andernfalls kehrt sich die Indikatrix von w um.

Ist $b^{(0)}$ irgend ein Punkt von $\mathfrak{B}$, so stellt das Produkt $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} \cdot b^{(0)}$ eine in $\mathfrak{C}$ gelegene, zu $\mathfrak{A}$ isomorphe Mannigfaltigkeit dar. Die Elemente und Wege von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ entsprechen einander eindeutig. Es sei $w_a = a_1, a_2, \cdots a_p = a_1$ ein geschlossener Weg auf $\mathfrak{A}$, also $w = a_1 b^{(0)}, a_2 b^{(0)}, \cdots a_p b^{(0)} = a_1 b^{(0)}$ der entsprechende auf $\mathfrak{A}'$. Betrachten wir w als Weg innerhalb $\mathfrak{C}$, so stellt w_a die eine Komponente dar, die andere w_b besteht nur aus dem wiederholten Element $b^{(0)}$. Da sich somit die Indikatrix von $\mathfrak{B}$ längs w_b nicht umkehrt, so verhält sich die Indikatrix von $\mathfrak{C}$ längs w wie die Indikatrix von $\mathfrak{A}$ längs w_a. Diese aber verhält sich wie die Indikatrix von $\mathfrak{A}'$ längs w. Daraus folgt nach dem Satz am Ende von Abschnitt II, daß die obere Indikatrix von $\mathfrak{A}'$ in bezug auf $\mathfrak{C}$ sich längs des Weges w nicht umkehrt; und da w ein beliebiger Weg auf $\mathfrak{A}'$ ist, so ist diese Indikatrix (deren Dimension gleich der Dimension n von $\mathfrak{B}$ ist) überhaupt nicht umkehrbar. Damit ist bewiesen: *Jede Mannigfaltigkeit kann mit einer nicht umkehrbaren oberen Indikatrix von vorgeschriebener Dimension behaftet erscheinen.* Insbesondere gilt also: *Jede Mannigfaltigkeit kann zweiseitig erscheinen.*

Eine in einer $\mathfrak{M}^{(n)}$ gelegene (singularitätenfreie) $\mathfrak{M}^{(n-1)}$, durch welche $\mathfrak{M}^{(n)}$ in zwei Teile zerlegt wird, ist natürlich stets zweiseitig. Ebenso haben wir unserer ganzen Begriffsbildung gemäß die Randmannigfaltigkeiten von $\mathfrak{M}^{(n)}$, an denen wir ja eine äußere und innere Seite unterscheiden können, als zweiseitig anzusehen. Es entsteht nun im Anschluß an die letzten Ergebnisse die Frage, ob zu einem gegebenen System von q geschlossenen Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}_1^{(n-1)}, \mathfrak{M}_2^{(n-1)}, \ldots \mathfrak{M}_q^{(n-1)}$ stets ein $\mathfrak{M}^{(n)}$ mit q zu diesen Mannigfaltigkeiten homöomorphen Rändern gefunden werden kann. Die Frage ist zu verneinen. Es ergibt sich nämlich als eine notwendige Bedingung, daß die Summe der Charakteristiken von $\mathfrak{M}_1^{(n-1)}, \mathfrak{M}_2^{(n-1)}, \ldots \mathfrak{M}_q^{(n-1)}$ gerade sein muß. Nehmen wir, um dies zu zeigen, an, es existiere eine $\mathfrak{M}^{(n)}$, wie wir sie suchen, bezeichnen wir mit C' ihre Charakteristik, mit C_k $(k = 1, \cdots q)$ die Charakteristiken der $\mathfrak{M}_k^{(n-1)}$, und setzen wir $C = C_1 + C_2 + \cdots + C_q$. Ist $\mathfrak{M}_1^{(n)}$ eine zu $\mathfrak{M}^{(n)}$ isomorphe Mannigfaltigkeit, so haben wir eine ein-eindeutige Beziehung zwischen den Elementen von $\mathfrak{M}^{(n)}$ und denen von $\mathfrak{M}_1^{(n)}$. Indem wir die entsprechenden Randelemente identifizieren, fügen wir $\mathfrak{M}^{(n)}$ und $\mathfrak{M}_1^{(n)}$ zu einer geschlossenen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_2^{(n)}$ zusammen, deren Charakteristik C'', wie sofort zu sehen, durch die Gleichung $C'' = 2C' - C$ gegeben wird. Ist n gerade, so sind die Charakteristiken C_k der geschlossenen Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}_k^{(n-1)}$ nach dem S. 33 bewiesenen Satz sämtlich 0; ist n ungerade, so ist nach demselben Satze $C'' = 0$, und man hat $C = 2C'$. In jedem Falle muß also C gerade sein.

Digitized by Google

Im Falle $n = 3$ ist die eben abgeleitete Bedingung auch hinreichend. Um dies zu erkennen, betrachten wir zunächst zwei beliebige Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}_1^{(n)}$ und $\mathfrak{M}_2^{(n)}$. Heften wir diese beiden, nachdem wir einer jeden eine ganz im Innern gelegene Zelle von n Dimensionen entnommen haben, mit den dadurch entstehenden sphärischen Rändern aneinander, so entsteht eine $\mathfrak{M}^{(n)}$, deren gesamte Berandung aus den Rändern von $\mathfrak{M}_1^{(n)}$ und denen von $\mathfrak{M}_2^{(n)}$ besteht. Auf Grund dieser Bemerkung läßt sich der hier zu beweisende Satz auf zwei Spezialfälle reduzieren. Es wird zu zeigen sein:

a) Es gibt eine $\mathfrak{M}^{(3)}$ mit einem Rand, der einen vorgeschriebenen geschlossenen Typus von gerader Charakteristik hat.

b) Es gibt eine $\mathfrak{M}^{(3)}$ mit zwei Rändern, welche vorgeschriebene geschlossene Typen von ungerader Charakteristik haben.

Im Falle a) ist zu unterscheiden, ob der vorgeschriebene Typus eine nicht umkehrbare oder eine umkehrbare Indikatrix hat. Ist die Indikatrix nicht umkehrbar, so hat die Charakteristik die Form $2 - 2p$ ($p \geqq 0$), und, wie bekannt, genügt die „Kugel mit p Henkeln" den vorgeschriebenen Bedingungen. Ist die Indikatrix umkehrbar, so hat die Charakteristik die Form $-2p (p \geqq 0)$. Hier gehen wir von irgend einer $\mathfrak{M}^{(3)}$ mit umkehrbarer Indikatrix aus und nehmen in ihr eine geschlossene Linie l an, längs deren sich die Indikatrix von $\mathfrak{M}^{(3)}$ umkehrt. Betrachten wir nun ein Gebiet $\mathfrak{T}$, welches wohl mit hinreichender Deutlichkeit als „röhrenförmige Umgebung der Linie l" bezeichnet wird, so erkennt man leicht, daß $\mathfrak{T}$ eine Randfläche hat, daß ihre Indikatrix umkehrbar, ihre Charakteristik $= 0$ ist. Nach Anbringung von p Henkeln sinkt die Charakteristik der Randfläche auf $-2p$ und man hat eine $\mathfrak{M}^{(3)}$ der gewünschten Art. — Im Falle b) haben die vorgeschriebenen Charakteristiken die Form $1 - 2p$, $1 - 2q (p \geqq 0, q \geqq 0)$. Wir multiplizieren den geschlossenen Flächentypus von der Charakteristik 1 mit einer Strecke. Es entsteht eine $\mathfrak{M}^{(3)}$ mit zwei Rändern; beide haben die Charakteristik 1. Wir bringen an dem einen Rand p, an dem anderen q Henkel an, wodurch die gewünschte $\mathfrak{M}^{(3)}$ entsteht.

Während jede Mannigfaltigkeit zweiseitig erscheinen kann, kann nicht jede einseitig erscheinen. — Es sei eine Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{(n)}$ und eine natürliche Zahl p gegeben. Wir suchen eine Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_1^{(n)}$ so zu konstruieren, daß zwischen $\mathfrak{M}^{(n)}$ und $\mathfrak{M}_1^{(n)}$ eine Beziehung der folgenden Art möglich ist: Jedem Element von $\mathfrak{M}_1^{(n)}$ soll ein Element gleicher Dimension von $\mathfrak{M}^{(n)}$ entsprechen, inzidenten Elementen von $\mathfrak{M}_1^{(n)}$ sollen inzidente von $\mathfrak{M}^{(n)}$, zwei verschiedenen Elementen von $\mathfrak{M}_1^{(n)}$ sollen, falls sie mit einem und demselben n-dimensionalen Element inzident sind, verschiedene Elemente von $\mathfrak{M}^{(n)}$ entsprechen. Jedem Element von $\mathfrak{M}^{(r)}$ sollen ausnahmslos p verschiedene Elemente von $\mathfrak{M}_1^{(n)}$ entsprechen. Wenn sich eine $\mathfrak{M}_1^{(n)}$ mit solcher Beziehung konstruieren läßt, wollen wir sagen: Die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{(n)}$ läßt eine *singularitätenfreie (zusammenhängende) p-fache Überdeckung zu*.

Nunmehr können wir folgenden Satz aufstellen: *Damit eine $\mathfrak{M}^{(n)}$ einseitig erscheinen könne* (allgemeiner: *damit eine $\mathfrak{M}^{(n)}$ als Mannigfaltigkeit mit umkehrbarer oberer Indikatrix von vorgeschriebener Dimension auftreten könne*), ist notwendig und hinreichend, daß sie eine singularitätenfreie zweifache Bedeckung zuläßt.

Beweis: 1. Die Bedingung ist notwendig. — Nehmen wir an, es sei $\mathfrak{M}^{(n)}$ in $\mathfrak{M}^{(n+1)}$ gelegen, und die obere Indikatrix von $\mathfrak{M}^{(n)}$ sei umkehrbar. Dann

Digitized by Google

können wir die oberen Indikatrizen a', a'', welche $\mathfrak{M}^{(n)}$ an den verschiedenen Stellen besitzt, als Elemente einer neuen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_1^{(n)}$ auffassen, wie wir dies S. 40 für die unteren Indikatrizen getan haben. Die ein-zweideutige Beziehung, welche wir so zwischen $\mathfrak{M}^{(n)}$ und $\mathfrak{M}_1^{(n)}$ erhalten, zeigt, daß $\mathfrak{M}^{(n)}$ eine zweifache singularitätenfreie Überdeckung zuläßt.

2. Die Bedingung ist hinreichend. — Jetzt ist vorauszusetzen, daß zwischen $\mathfrak{A} = \mathfrak{M}^{(n)}$ und einer $\mathfrak{M}_1^{(n)}$ eine ein-zweideutige Beziehung der oben beschriebenen Art besteht. Es sei $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^{(1)}$ eine Mannigfaltigkeit, bestehend aus einer Strecke mit ihren beiden Endpunkten $b_1^{(0)}$, $b_2^{(0)}$, und es werde $\mathfrak{M}_1^{(n)} \cdot \mathfrak{B} = \mathfrak{C}$, $\mathfrak{M}_1^{(n)} \cdot b_1^{(0)} = \overline{\mathfrak{M}_1^{(n)}}$ gesetzt. $\overline{\mathfrak{M}_1^{(n)}}$ bildet einen Teil der Berandung von $\mathfrak{C}$ und ist zu $\mathfrak{M}_1^{(n)}$ isomorph, so daß also zwischen $\mathfrak{M}^{(n)}$ und $\overline{\mathfrak{M}_1^{(n)}}$ eine ein-zweideutige Beziehung statthat. Identifiziert man nun je zwei Elemente von $\overline{\mathfrak{M}_1^{(n)}}$, welche demselben Element von $\mathfrak{M}^{(n)}$ entsprechen, so werden aus $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{M}_1^{(n)}$ neue Mannigfaltigkeiten — sie mögen $\mathfrak{M}^{(n+1)}$ und $\mathfrak{M}^{(n)}$ heißen —, und es ist sofort zu sehen, daß $\overline{\mathfrak{M}^{(n)}}$ isomorph zu $\mathfrak{M}^{(n)}$ und innerhalb $\mathfrak{M}^{(n+1)}$ einseitig ist. — Es sei jetzt $\mathfrak{D}^{(k-1)}$ irgend eine Mannigfaltigkeit von $k-1$ Dimensionen, $d^{(0)}$ ein Element von $\mathfrak{D}^{(k-1)}$, und es werde $\mathfrak{M}^{(n+1)}\mathfrak{D}^{(k-1)} = \mathfrak{M}^{(n+k)}$, $\mathfrak{M}^{(n+1)} \cdot d^{(0)} = \mathfrak{M}^{(n+1)}$, $\mathfrak{M}^{(n)} \cdot d^{(0)} = \overline{\mathfrak{M}^{(n)}}$ gesetzt. Dann ist $\mathfrak{M}^{(n+1)}$ isomorph zu $\mathfrak{M}^{(n+1)}$, und die obere Indikatrix von $\overline{\mathfrak{M}^{(n+1)}}$ inbezug auf $\mathfrak{M}^{(n+k)}$ ist nicht umkehrbar. $\overline{\mathfrak{M}^{(n)}}$ ist zu $\overline{\mathfrak{M}^{(n)}}$ und $\mathfrak{M}^{(n)}$ isomorph, und da $\mathfrak{M}^{(n)}$ in $\mathfrak{M}^{(n+1)}$ einseitig ist, so ist auch $\overline{\mathfrak{M}^{(n)}}$ in $\mathfrak{M}^{(n+1)}$ einseitig. Man kann also einen geschlossenen Weg w in $\mathfrak{M}^{(n)}$ angeben, längs dessen sich die Seite von $\overline{\mathfrak{M}^{(n)}}$ in bezug auf $\overline{\mathfrak{M}^{(n+1)}}$ umkehrt. Auf diesem Wege zeigen dann die Indikatrizen von $\overline{\mathfrak{M}^{(n)}}$ und $\overline{\mathfrak{M}^{(n+1)}}$ verschiedenes Verhalten. Die letztere Indikatrix verhält sich aber wie die von $\mathfrak{M}^{(n+k)}$, da ja die obere Indikatrix von $\mathfrak{M}^{(n+1)}$ inbezug auf $\mathfrak{M}^{(n+k)}$ nicht umkehrbar ist. Daher verhalten sich die Indikatrizen von $\overline{\mathfrak{M}^{(n)}}$ und $\mathfrak{M}^{(n+k)}$ auf dem Wege w verschieden, und mithin ist die obere Indikatrix der zu $\mathfrak{A} = \mathfrak{M}^{(n)}$ isomorphen Mannigfaltigkeit $\overline{\mathfrak{M}^{(n)}}$ in bezug auf $\mathfrak{M}^{(n+k)}$ umkehrbar.

Hierzu noch einige Bemerkungen. — Eine $\mathfrak{M}^{(n)}$ mit umkehrbarer Indikatrix läßt, wie der S. 40 erklärte Verdoppelungsprozeß zeigt, eine zweifache Bedeckung zu, kann daher einseitig erscheinen. — Es sei innerhalb einer Mannigfaltigkeit $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^{(n)}$ eine zweite $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^{(n-1)}$ gegeben; die Elemente von $\mathfrak{B}$ seien durch b. die nicht zu $\mathfrak{B}$ gehörigen von $\mathfrak{A}$ durch a bezeichnet. Wir wollen annehmen, daß ein Element b dann und nur dann Randelement von $\mathfrak{B}$ ist, wenn es Randelement von $\mathfrak{A}$ ist. Dann können wir den Satz aussprechen:

Wenn die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{B}$ nicht zerstückt wird (d. h. wenn die Elemente a ein zusammenhängendes System bilden), *so kann $\mathfrak{A}$ einseitig erscheinen.*

Zum Beweise denken wir uns $\mathfrak{A}$ längs der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{B}$ „aufgeschnitten", wodurch unserer Voraussetzung gemäß der Zusammenhang von $\mathfrak{A}$ nicht aufgehoben wird, also eine neue Mannigfaltigkeit $\mathfrak{A}'$ entsteht. Bei diesem Prozeß treten an die Stelle jedes Elementes b zwei Elemente b', b'', welche den beiden Seiten von $\mathfrak{B}$ an der Stelle b entsprechen, und *konjugiert* heißen sollen. Die Elemente b', b'' gehören der Berandung von $\mathfrak{A}'$ an und stellen in ihrer Gesamt-

Digitized by Google

heit ein System $\mathfrak{S}'$ dar, welches aus einer einzigen $\mathfrak{M}^{(n-1)}$ besteht, oder in zwei $\mathfrak{M}^{(n-1)}$ zerfällt, je nachdem $\mathfrak{B}$ innerhalb $\mathfrak{A}$ ein- oder zweiseitig war. Es sei nun $\mathfrak{A}''$ eine zu $\mathfrak{A}'$ isomorphe Mannigfaltigkeit. Dann entspricht dem System $\mathfrak{S}'$ von $\mathfrak{A}'$ ein System $\mathfrak{S}''$ von $\mathfrak{A}''$, dessen Elemente nunmehr ebenfalls paarweise „konjugiert" sind. Wir fügen jetzt $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{A}''$ zu einer Mannigfaltigkeit $\mathfrak{A}_1$ zusammen, indem wir jedes Element e' von $\mathfrak{S}'$ mit demjenigen Element von $\mathfrak{S}''$ identifizieren, welches zu dem e' auf $\mathfrak{S}''$ entsprechenden Element e'' konjugiert ist. Dann hat man eine ein-zweideutige Beziehung zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$, von welcher man leicht sieht, daß sie den oben angegebenen Bedingungen entspricht. D. h. $\mathfrak{A}$ ist zweifach überdeckbar, kann also einseitig erscheinen.

Hieraus folgt u. a.: *Alle Flächentypen, mit Ausnahme des Kugel- und des Zellentypus können einseitig erscheinen.* Denn bis auf diese Ausnahmen lassen sich auf jeder Fläche Querschnitte oder geschlossene Schnitte ausführen, welche die Fläche nicht zerstücken. — Daß andererseits Kugel- und Flächenzellentypus nur zweiseitig auftreten können, folgt daraus, daß sich auf ihnen jede geschlossene Linie auf einen Punkt zusammenziehen läßt. Es ist aber klar, daß eine geschlossene Linie, längs deren sich die obere Indikatrix einer Mannigfaltigkeit umkehrt, diese Eigenschaft bei stetiger Variation beibehält, also nicht auf ein Element zusammengezogen werden kann. Aus diesem Grunde können alle Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{F}_n$ vom Typus der Zellen von n Dimensionen, sowie alle sphärischen Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{K}_n$, deren Dimension $n > 1$ ist, nur zweiseitig erscheinen. Doch gibt es, wenn $n > 2$ ist, noch andere $\mathfrak{M}^{(n)}$ von dieser Beschaffenheit.

Einfache Beispiele hierfür können wir wieder mittels Multiplikation leicht bilden. Zunächst bemerken wir, daß, wenn man in einem Produkt $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$ einen geschlossenen Weg w mit den Komponenten w_a und w_b hat, welcher durch stetige Variation in einen Weg w' mit den Komponenten w_a' und w_b' übergeht, auch w_a in w_a' und w_b in w_b' stetig übergeführt werden kann. Es läßt sich aber auch unschwer nachweisen, daß umgekehrt zwei Wege w, w' von $\mathfrak{C}$ stetig ineinander übergeführt werden können, sobald dies bei ihren Komponenten der Fall ist.[1]) Insbesondere folgt: Läßt sich sowohl auf $\mathfrak{A}$ wie auf $\mathfrak{B}$ jeder geschlossene Weg auf ein Element zusammenziehen, so gilt dasselbe für $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$. Durch Multiplikation von Zellen mit Sphären und von Sphären untereinander kann man also wieder Mannigfaltigkeiten bilden, welche nicht einseitig erscheinen können. (Solche Mannigfaltigkeiten werden daher auch durch jeden geschlossenen Schnitt oder Querschnitt zerstückt.) Daß man so in der Tat neue Mannigfaltigkeiten erhält, ist leicht zu sehen. So kann z. B. die Potenz $\mathfrak{K}_2^n$ $(n > 1)$ keine sphärische Mannigfaltigkeit sein; denn nach dem Satz über die Charakteristik eines Produkts beträgt ihre Charakteristik 2^n.

1) Beim Beweise braucht man sich nur auf die Eigenschaften 1. bis 4. (Abschnitt III) zu stützen.

Digitized by Google

Beiträge zur Theorie der linearen Differenzengleichungen.

Von Georg Wallenberg.

I.

Durch Benutzung einer Methode, welche Hamburger (J. für Math **123**, 343—346) für lineare Differentialgleichungen angewandt hat, können die Beziehungen zwischen den Lösungen einer homogenen linearen Differenzengleichung und denen ihrer „Adjungierten" (vergl. Pincherle, Mem. d. R. Acc. di Bologna (4) X, 526; Bortolotti, Rom. Acc. L. Rend. (5) $\mathbf{5}_1$, 349 ff.) in einfachster Weise abgeleitet werden.

Es sei

$$P(y_x) \equiv y_{x+n} + p_x^{(1)} y_{x+n-1} + \cdots + p_x^{(n)} y_x = 0 \tag{1}$$

die vorgelegte Differenzengleichung und $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \cdots y_x^{(n)}$ ein Fundamentalsystem partikulärer Lösungen derselben, so gelten, wenn y_x die allgemeine Lösung von (1) ist, die Gleichungen:

$$\left\{\begin{array}{llll} y_x & = c_1 y_x^{(1)} & + c_2 y_x^{(2)} & + \cdots + c_n y_x^{(n)}, \\ y_{x+1} & = c_1 y_{x+1}^{(1)} & + c_2 y_{x+1}^{(2)} & + \cdots + c_n y_{x+1}^{(n)}, \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{x+n-1} & = c_1 y_{x+n-1}^{(1)} & + c_2 y_{x+n-1}^{(2)} & + \cdots + c_n y_{x+n-1}^{(n)}, \end{array}\right. \tag{2}$$

worin die c_k „Konstanten", d. h. periodische Funktionen von der Periode 1 sind. Löst man diese Gleichungen nach den „Konstanten" c_k auf, so erhält man:

$$\left\{\begin{array}{l} c_1 = z_x^{(1_1)} y_x + z_x^{(2_1)} y_{x+1} + \cdots + z_x^{(n_1)} y_{x+n-1} \equiv Q_1(y_x), \\ c_2 = z_x^{(1_2)} y_x + z_x^{(2_2)} y_{x+1} + \cdots + z_x^{(n_2)} y_{x+n-1} \equiv Q_2(y_x), \\ \cdots \\ c_n = z_x^{(1_n)} y_x + z_x^{(2_n)} y_{x+1} + \cdots + z_x^{(n_n)} y_{x+n-1} \equiv Q_n(y_x), \end{array}\right. \tag{3}$$

worin

$$z_x^{(i_k)} = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial y_{x+i-1}^{(k)}}$$

ist, wenn

$$\Delta = \left| y_{x+i-1}^{(k)} \right| \qquad (k, i = 1, 2, \ldots, n)$$

gesetzt wird; Δ ist wegen der linearen Unabhängigkeit der Lösungen $y_x^{(1)}$, $y_x^{(2)}, \cdots y_x^{(n)}$ von Null verschieden (Satz von Casorati, Rom. Acc. L. M. **5** (1880)).

Jede der Gleichungen (3) stellt eine „erste Lösung" von (1) dar, d. h. die Ausdrücke $Q_k(y_x)$ nehmen für jede Lösung von (1) einen „konstanten" Wert an. Daher muß die Differenz

$$\Delta Q_k(y_x) = Q_k(y_{x+1}) - Q_k(y_x), \qquad (k = 1, 2, \ldots n),$$

Digitized by Google

die für jede Lösung von (1) verschwindet, mit $P(y_x)$ bis auf einen Faktor übereinstimmen, und da der Koeffizient von y_{x+n} in $\triangle Q_k(y_x)$ gleich $z_{x+1}^{(n_k)}$ ist, so ergibt sich $\triangle Q_k(y_x) = z_{x+1}^{(n_k)} P(y_x)$, d. h.

$$(4) \qquad \triangle(z_x^{(1_k)} y_x + z_x^{(2_k)} y_{x+1} + \cdots + z_x^{(n_k)} y_{x+n-1}) = z_{x+1}^{(n_k)}(y_{x+n} + p_x^{(1)} y_{x+n-1} + \cdots + p_x^{(n)} y_x). \qquad (k = 1, 2, \ldots n)$$

Hieraus erkennt man, daß $z_{x+1}^{(n_1)}, z_{x+1}^{(n_2)}, \ldots z_{x+1}^{(n_n)}$, wo $z_x^{(n_k)} = \frac{1}{\triangle} \frac{\partial \triangle}{\partial y_{x+n-1}^{(k)}}$ ist, Multiplikatoren von (1) sind. Diese sind von einander linear unabhängig; denn wäre

$$a_1 z_x^{(n_1)} + a_2 z_x^{(n_2)} + \cdots + a_n z_x^{(n_n)} = 0,$$

so würde man durch Addition der mit den „Konstanten" $a_1, a_2, \ldots a_n$ der Reihe nach multiplizierten Gleichungen (3) und darauf folgende „Differenzierung" eine Gleichung von der Form

$$(5) \qquad 0 = q_x^{(1)} y_x + q_x^{(2)} y_{x+1} + \cdots + q_x^{(n-1)} y_{x+n-1},$$

gültig für alle Lösungen von (1), erhalten, worin die $q_x^{(i)}$ nicht sämtlich verschwinden, da die Gleichungen (3) von einander unabhängig sind. Setzt man nun $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots y_x^{(n)}$ für y_x, so erhält man aus (5) n Gleichungen, deren Zusammenbestehen das Verschwinden von $\triangle$ zur Folge hätte, gegen die Voraussetzung, daß $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots y_x^{(n)}$ ein Fundamentalsystem bilden.

Durch Vergleichung der Koeffizienten von $y_x, y_{x+1}, \ldots y_{x+n-1}$ auf beiden Seiten von (4) erhält man:

$$(6) \qquad \begin{cases} -z_x^{(1_k)} = p_x^{(n)} z_{x+1}^{(n_k)}, \\ z_{x+1}^{(1_k)} - z_x^{(2_k)} = p_x^{(n-1)} z_{x+1}^{(n_k)}, \\ z_{x+1}^{(2_k)} - z_x^{(3_k)} = p_x^{(n-2)} z_{x+1}^{(n_k)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_{x+1}^{(n-2_k)} - z_x^{(n-1_k)} = p_x^{(2)} z_{x+1}^{(n_k)}, \\ z_{x+1}^{(n-1_k)} - z_x^{(n_k)} = p_x^{(1)} z_{x+1}^{(n_k)}. \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \ldots n).$$

Daraus ergibt sich für $z_x^{(n_k)}$ $(k = 1, 2, \ldots n)$ die zu $P(y_x)$ „adjungierte" Differenzengleichung:

$$(7) \quad P'(z_x) \equiv z_x + p_x^{(1)} z_{x+1} + p_x^{(2)} z_{x+2} + \cdots + p_{x+n-1}^{(n-1)} z_{x+n-1} + p_{x+n-1}^{(n)} z_{x+n} = 0.$$

Die anderen $z_x^{(i_k)}$ sind, wie ebenfalls aus (6) hervorgeht, mit $z_x^{(n_k)}$ durch die Gleichungen

$$(8) \qquad z_x^{(n-s_k)} = z_{x-s}^{(n_k)} + p_{x-s}^{(1)} z_{x-s+1}^{(n_k)} + \cdots + p_{x-1}^{(1)} z_x^{(n_k)} \qquad (s = 1, 2, \ldots n-1)$$

verbunden; die Differenzengleichungen für $z_x^{(n-s_k)}$ gehören also mit der adjun-

Digitized by Google

gierten Differenzengleichung für $z_x^{(n_k)}$ zur selben Art (vergl. Guldberg, Verh. d. 3. internat. Math. Kongr. Heidelberg 1904, S. 161). — Setzt man in (4) für $z_x^{(1_k)}, z_x^{(2_k)}, \ldots z_x^{(n-1_k)}$ ihre Ausdrücke durch $z_x^{(n_k)}$ nach (8) ein, so entsteht auf der linken Seite von (4) unter dem Zeichen $\triangle$ der bilineare Differenzenausdruck $P(y_x, z_x^{(n_k)})$, wo

$$\begin{aligned} P(y_x, z_x) = {} & z_x y_{x+n-1} + (z_{x-1} + p_{x-1}^{(1)} z_x) y_{x+n-2} \\ & + (z_{x-2} + p_{x-2}^{(1)} z_{x-1} + p_{x-1}^{(2)} z_x) y_{x+n-3} + \cdots \\ & + (z_{x-n+2} + p_{x-n+2}^{(1)} z_{x-n+3} + \cdots + p_{x-1}^{(n-2)} z_x) y_{x+1} \\ & + (z_{x-n+1} + p_{x-n+1}^{(1)} z_{x-n+2} + \cdots + p_{x-1}^{(n-1)} z_x) y_x \end{aligned}$$

ist. Man kann nun für lineare Differenzengleichungen das Analogon der Lagrangeschen Beziehung für Differentialgleichungen nach einer ähnlichen Methode ableiten, wie sie Frobenius (J. für Math. **76**, 260) für den Beweis dieser Relation angewandt hat: Der Ausdruck

$$\triangle P(y_x, z_x) - z_{x+1} P(y_x)$$

verschwindet nach (4) für $z_x = z_x^{(n_k)}$ $(k = 1, 2, \ldots n)$, also für n nach Obigem linear unabhängige Lösungen der Gleichung $P'(z_x) = 0$; dieser Ausdruck muß daher mit $P'(z_{x-n+1})$ bis auf einen Faktor übereinstimmen, und da der Koeffizient von z_{x-n+1} in jenem Ausdruck gleich $-y_x$ ist, so besteht die *identische* Gleichung

$$\triangle P(y_x, z_x) - z_{x+1} P(y_x) = -y_x P'(z_{x-n+1})$$

oder

$$z_{x+1} P(y_x) - y_x P'(z_{x-n+1}) = \triangle P(y_x, z_x).$$

Dies ist das Analogon der Lagrangeschen Beziehung. Setzt man noch $z_{x+1} = u_x$ und $P'(z_{x-n+1}) = P(z_{x+1}) = \bar{P}(u_x)$, so nimmt die Adjungierte die Pincherlesche Form an:

$$\bar{P}(u_x) = u_{x-n} + p_{x-n+1}^{(1)} u_{x-n+1} + \cdots + p_{x-1}^{(n-1)} u_{x-1} + p_x^{(n)} u_x = 0.$$

Setzt man ferner $P(y_x, z_x) = P(y_x, u_{x-1}) = Q(y_x, u_x)$, sodaß

$$Q(y_x, u_x) = \sum_{k=0}^{n-1} y_{x+k} \sum_{r=0}^{n-k-1} (p^{(r)} u)_{x-n+k+r} \qquad (p_x^{(0)} = 1)$$

wird, so lautet die der Lagrangeschen analoge Beziehung:

$$u_x P(y_x) - y_x \bar{P}(u_x) = \triangle Q(y_x, u_x).$$

Aus ihr folgt sofort, daß umgekehrt die Lösungen der Gleichung $P(y_x) = 0$ Multiplikatoren von $\bar{P}(u_x) = 0$ sind.

Die Gleichung (4) ermöglicht endlich auch die unmittelbare Auflösung der vollständigen linearen Differenzengleichung

$$P(y_x) = p_x \tag{9}$$

Digitized by Google

mittels eines Fundamentalsystems $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots y_x^{(n)}$ der reduzierten Gleichung $P(y_x) = 0$. Aus (4) und (9) folgen nämlich für die Lösungen y_x von (9) die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&z_x^{(1_1)} y_x + z_x^{(2_1)} y_{x+1} + \cdots + z_x^{(n_1)} y_{x+n-1} = \sum z_{x+1}^{(n_1)} p_x,\\
&z_x^{(1_2)} y_x + z_x^{(2_2)} y_{x+1} + \cdots + z_x^{(n_2)} y_{x+n-1} = \sum z_{x+1}^{(n_2)} p_x,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&z_x^{(1_n)} y_x + z_x^{(2_n)} y_{x+1} + \cdots + z_x^{(n_n)} y_{x+n-1} = \sum z_{x+1}^{(n_n)} p_x.
\end{aligned}$$

Multipliziert man diese Gleichungen der Reihe nach mit $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots y_x^{(n)}$ und addiert, so erhält man mit Rücksicht darauf, daß nach der Definition der $z_x^{(i_k)}$:

$$(10) \qquad \begin{cases} y_x^{(1)} z_x^{(1_1)} + y_x^{(2)} z_x^{(1_2)} + \cdots + y_x^{(n)} z_x^{(1_n)} = 1, \\ y_x^{(1)} z_x^{(i_1)} + y_x^{(2)} z_x^{(i_2)} + \cdots + y_x^{(n)} z_x^{(i_n)} = 0 \end{cases} \qquad (i = 2, \ldots n)$$

ist, als allgemeine Lösung von (9):

$$y_x = y_x^{(1)} \sum p_x z_{x+1}^{(n_1)} + y_x^{(2)} \sum p_x z_{x+1}^{(n_2)} + \cdots + y_x^{(n)} \sum p_x z_{x+1}^{(n_n)};$$

die hierin auftretenden Summen enthalten noch je eine willkürliche additive „Konstante" (periodische Funktion von der Periode 1). Diese Methode führt schneller zum Ziel als die Lagrangesche Variation der Konstanten.

II.

1. Iteration homogener linearer Differenzengleichungen.[1])
Wird ein homogener linearer Differenzenausdruck $n$ter Ordnung

$$P(y_x) = p_x^{(0)} y_{x+n} + p_x^{(1)} y_{x+n-1} + \cdots + p_x^{(n)} y_x$$

iteriert, d. h. mit sich selbst komponiert, so entsteht ein homogener linearer Differenzenausdruck von der Ordnung $2n$:

$$P_1(y_x) = PP(y_x) = P^2(y_x) = p_x^{(0)} P(y_{x+n}) + p_x^{(1)} P(y_{x+n-1}) + \cdots + p_x^{(n)} P(y_x);$$

derselbe wird befriedigt durch die Lösungen von $P(y_x) = 0$ und durch die Lösungen der nicht homogenen linearen Differenzengleichung $P(y_x) = \eta_x$, wo η_x eine Lösung von $P(y_x) = 0$ ist. Aus der letzteren Gleichung geht hervor, daß das Iterationsresultat wesentlich z. B. von $p_x^{(n)}$ abhängt; und da man durch Multiplikation der Gleichung $P(y_x) = 0$ mit einer willkürlichen Funktion von x diesem Koeffizienten jeden beliebigen Wert geben kann, so liefert demnach die (ein- oder mehrmalige) Iteration einer homogenen linearen Differenzengleichung eine unendliche Menge von Differenzengleichungen, welche mit der ursprünglichen sämtliche Lösungen gemeinsam haben.

---

1) Über die entsprechenden Untersuchungen für Differentialgleichungen vergl. A. Gutzmer, Sitzungsber. der kgl. böhm. Ges. d. Wissensch. 1892, 54—59.

Digitized by Google

Wir wählen nun als Ausgangsgleichung eine Differenzengleichung erster Ordnung:

$$P(y_x) \equiv s_x y_{x+1} - t_x y_x = 0$$

und iterieren sie n-mal; die dadurch entstehende Differenzengleichung $n$ter Ordnung $P^n(y_x) = 0$ besitzt zunächst eine Lösung von $\frac{y_{x+1}}{y_x} = \frac{t_x}{s_x}$, also $y_x = \prod \frac{t_{x-1}}{s_{x-1}} = \eta_x^{(1)}$; ferner eine Lösung von $s_x y_{x+1} - t_x y_x = \eta_x^{(1)}$, also:

$$y_x = \eta_x^{(1)} \sum \frac{\eta_x^{(1)}}{s_x \eta_{x+1}^{(1)}} = \eta_x^{(1)} \sum \frac{1}{t_x} = \eta_x^{(2)};$$

ferner eine Lösung von $s_x y_{x+1} - t_x y_x = \eta_x^{(2)}$, also:

$$y_x = y_x^{(1)} \sum \frac{\eta_x^{(2)}}{s_x \eta_{x+1}^{(1)}} = \eta_x^{(1)} \sum \frac{\eta_x^{(1)} \sum \frac{1}{t_x}}{s_x \eta_{x+1}^{(1)}} = \eta_x^{(1)} \sum \frac{1}{t_x} \sum \frac{1}{t_x}$$

$$= \eta_x^{(1)} \left[\sum \frac{1}{t_x} \right]^{2}{}^{1)} = \eta_x^{(3)}$$

u. s. f. Die Differenzengleichung $P^n(y_x) = 0$ besitzt also die Lösungen:

$$\eta_x^{(1)} = \prod \frac{t_{x-1}}{s_{x-1}}, \ \eta_x^{(2)} = \eta_x^{(1)} \sum \frac{1}{t_x}, \ \eta_x^{(3)} = \eta_x^{(1)} \left[\sum \frac{1}{t_x} \right]^2, \ldots,$$

$$\eta_x^{(n)} = \eta_x^{(1)} \left[\sum \frac{1}{t_x} \right]^{n-1},$$

von denen man leicht zeigen kann, daß sie von einander linear unabhängig sind.

Wählt man $t_x = 1$, so werden diese Lösungen:

$$\eta_x^{(1)} = \prod \frac{1}{s_{x-1}}, \ \eta_x^{(2)} = \eta_x^{(1)} \sum 1 = \eta_x^{(1)} x, \ \eta_x^{(3)} = \eta_x^{(1)} \sum x = \eta_x^{(1)} \frac{x(x-1)}{2},$$

$$\eta_x^{(4)} = \eta_x^{(1)} \sum \frac{x(x-1)}{2} = \eta_x^{(1)} \frac{x(x-1)(x-2)}{3!}, \ldots, \eta_x^{(n)} = \eta_x^{(1)} \frac{x(x-1)\cdots(x-n+2)}{(n-1)!};$$

aus ihnen ergeben sich durch geeignete lineare Verbindungen folgende Lösungen:

$$y_x^{(1)} = \eta_x^{(1)}, \ y_x^{(2)} = \eta_x^{(1)} \cdot x, \ y_x^{(3)} = \eta_x^{(1)} \cdot x^2 \ (= 2\eta_x^{(3)} + \eta_x^{(2)}), \ldots, y_x^{(n)} = \eta_x^{(1)} \cdot x^{n-1}.$$

Die Differenzengleichung $P^n(y_x) = 0$ geht daher in diesem Falle durch die Transformation

$$y_x = \eta_x^{(1)} u_x = \prod \frac{1}{s_{x-1}} \cdot u_x$$

in diejenige Differenzengleichung über, welche die Lösungen $1, x, x^2, \ldots x^{n-1}$ besitzt, d. h. in eine Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten, die man symbolisch folgendermaßen schreiben kann:

$$\Delta^n u_x = (u_x - 1)^n = 0;$$

---

1) Das Quadrat ist symbolisch aufzufassen.

Digitized by Google

darin ist u_{x+k} an Stelle von u_x^k $(k = 0, 1, 2, \ldots n)$ zu setzen. Zwischen den Lösungen $y_x^{(k)}$ von $P^n(y_x) = 0$ bestehen $n-2$ homogene quadratische Relationen:

$$y_x^{(k)^2} - y_x^{(k-1)} y_x^{(k+1)} = 0 \qquad (k = 2, 3, \ldots n-1).$$

Wir wollen nun untersuchen, wann eine Differenzengleichung zweiter Ordnung

$$y_{x+2} + q_x y_{x+1} + r_x y_x = 0 \qquad (p_x = 1)$$

durch Iteration aus einer Differenzengleichung erster Ordnung

$$s_x y_{x+1} - t_x y_x = 0$$

hervorgeht; es ist:

$$(s_x y_{x+1} - t_x y_x)(s_x y_{x+1} - t_x y_x) = s_x s_{x+1} y_{x+2} - s_x(t_x + t_{x+1}) y_{x+1} + t_x^2 y_x;$$

es muß daher sein:

$$-\frac{t_x + t_{x+1}}{s_{x+1}} = q_x, \quad \frac{t_x^2}{s_x s_{x+1}} = r_x.$$

Setzt man $\frac{t_x}{s_x} = u_x$, also $\frac{t_{x+1}}{s_{x+1}} = u_{x+1}$, so wird $\frac{t_x}{s_{x+1}} + u_{x+1} = -q_x$, $\frac{t_x}{s_{x+1}} u_x = r_x$, also durch Elimination von $\frac{t_x}{s_{x+1}}$:

$$u_x u_{x+1} + q_x u_x + r_x = 0;$$

setzt man ferner $u_x = \frac{v_{x+1}}{v_x}$, so geht diese Gleichung über in

$$v_{x+2} + q_x v_{x+1} + r_x v_x = 0,$$

welche mit der vorgelegten Gleichung identisch ist. Aus $t_x = s_x u_x$, $\frac{t_x}{s_{x+1}} u_x = r_x$ ergibt sich

$$\frac{s_{x+1}}{s_x} = \frac{u_x^2}{r_x}, \quad s_x = c \prod \frac{u_{x-1}^2}{r_{x-1}}, \quad t_x = c u_x \prod \frac{u_{x-1}^2}{r_{x-1}};$$

darin ist $u_x = \frac{\eta_{x+1}}{\eta_x}$, wo η_x eine Lösung der vorgelegten Gleichung zweiter Ordnung bedeutet. Wir sehen also, daß die Koeffizienten q_x und r_x gar keiner Beschränkung unterworfen sind, und können den Satz aussprechen: *Jede beliebige homogene lineare Differenzengleichung zweiter Ordnung kann als Iteration einer homogenen linearen Differenzengleichung erster Ordnung dargestellt werden.*

Durch Koeffizientenabzählung erkennt man, daß diese Eigenschaft auf Gleichungen zweiter Ordnung beschränkt ist; für Gleichungen höherer als zweiter Ordnung, welche Iterationen von Gleichungen niedrigerer Ordnung sind, müssen zwischen den Koeffizienten stets Bedingungsgleichungen bestehen.

Digitized by Google

Da die homogene lineare Differenzengleichung zweiter Ordnung sich stets als Iteration einer Differenzengleichung erster Ordnung auffassen läßt, so haben ihre Lösungen nach Obigem die Form

$$y_x^{(1)} = \eta_x,\ y_x^{(2)} = \eta_x \sum \frac{1}{t_x} = c\eta_x \sum \frac{\eta_x}{\eta_{x+1}} \prod r_{x-1} \left(\frac{\eta_{x-1}}{\eta_x}\right)^2 = c\eta_x \sum \frac{\Pi r_{x-1}}{\eta_x \eta_{x+1}}.$$

Dies ergibt sich auch auf folgende Weise: Bekanntlich ist

$$\triangle_x = y_x^{(1)} y_{x+1}^{(2)} - y_x^{(2)} y_{x+1}^{(1)} = c \Pi r_{x-1},$$

also

$$\frac{y_{x+1}^{(2)}}{y_{x+1}^{(1)}} - \frac{y_x^{(2)}}{y_x^{(1)}} = \frac{\triangle_x}{y_x^{(1)} y_{x+1}^{(1)}},$$

und daher

$$\frac{y_x^{(2)}}{y_x^{(1)}} = \sum \frac{\triangle_x}{y_x^{(1)} y_{x+1}^{(1)}};\ y_x^{(2)} = c y_x^{(1)} \sum \frac{\Pi r_{x-1}}{y_x^{(1)} y_{x+1}^{(1)}}.$$

2. Normalform. Setzt man in der Differenzengleichung zweiter Ordnung

$$u_{x+2} - P_x u_{x+1} + Q_x u_x = 0 \tag{A}$$

$u_x = \varrho_x y_x$, so erhält man

$$y_{x+2} - P_x \frac{\varrho_{x+1}}{\varrho_{x+2}} y_{x+1} + Q_x \frac{\varrho_x}{\varrho_{x+2}} y_x = 0.$$

Wählt man nun

$$\frac{\varrho_{x+2}}{\varrho_{x+1}} = P_x, \text{ also } \frac{\varrho_{x+1}}{\varrho_x} = P_{x-1} \text{ (d. h. } \varrho_x = \Pi P_{x-2}), \ \frac{\varrho_{x+2}}{\varrho_x} = P_{x-1} P_x,$$

so nimmt die Gleichung (A) die Gestalt an:

$$y_{x+2} - y_{x+1} + \frac{Q_x}{P_{x-1} P_x} y_x = 0;$$

setzt man noch $\frac{Q_x}{P_{x-1} P_x} = q_x$, so erhält man die Normalform:

$$y_{x+2} - y_{x+1} + q_x y_x = 0. \tag{B}$$

Der Ausdruck $q_x = \frac{Q_x}{P_{x-1} P_x}$ ist eine Invariante für alle Differenzengleichungen, die aus (B) durch eine Transformation $u_x = \varrho_x y_x$ hervorgehen.

3. Die Differenzengleichung dritter Ordnung, welcher der Quotient je zweier Fundamentallösungen einer homogenen linearen Differenzengleichung zweiter Ordnung genügt.

Wir gehen von der Normalform aus:

$$y_{x+2} - y_{x+1} + q_x y_x = 0 \tag{1}$$

und setzen den Quotienten zweier Fundamentallösungen $\frac{y_x^{(2)}}{y_x^{(1)}} = \eta_x$. Wird

Digitized by Google

$y_x^{(2)} = \eta_x y_x^{(1)}$ in (1) eingesetzt, so erhält man, da auch $y_x^{(1)}$ der Gleichung (1) genügt:

$$\frac{y_{x+1}^{(1)}}{y_x^{(1)}} = q_x \frac{\eta_{x+2} - \eta_x}{\eta_{x+2} - \eta_{x+1}},$$

also:

$$\frac{y_{x+2}^{(1)}}{y_{x+1}^{(1)}} = q_{x+1} \frac{\eta_{x+3} - \eta_{x+1}}{\eta_{x+3} - \eta_{x+2}},$$

und daher mit Berücksichtigung von (1):

$$\frac{y_{x+1}^{(1)}}{y_x^{(1)}} = \frac{q_x(\eta_{x+3} - \eta_{x+2})}{\eta_{x+3} - \eta_{x+2} - q_{x+1}(\eta_{x+3} - \eta_{x+1})}.$$

Durch Gleichsetzung der beiden Ausdrücke für $\frac{y_{x+1}^{(1)}}{y_x^{(1)}}$ ergibt sich dann für η_x die gesuchte Differenzengleichung dritter Ordnung:

$$\frac{\eta_{x+3} - \eta_{x+2}}{\eta_{x+3} - \eta_{x+1}} : \frac{\eta_{x+2} - \eta_x}{\eta_{x+1} - \eta_x} = q_{x+1};$$

sie ist das Analogon der Schwarzschen Differentialgleichung dritter Ordnung. Geht man von der allgemeinen Gleichung zweiter Ordnung

$$y_{x+2} - P_x y_{x+1} + R_x y_x = 0$$

aus, so tritt nach Nr. 2 an Stelle von q_{x+1} der invariante Ausdruck $\frac{Q_{x+1}}{P_x P_{x+1}}$. Die Form der Gleichung (2) läßt unmittelbar erkennen, daß, wenn $\eta_x^{(1)}$ eine Partikularlösung derselben ist, die allgemeine Lösung lautet:

$$\eta_x = \frac{\alpha + \beta \eta_x^{(1)}}{\gamma + \delta \eta_x^{(1)}}, \tag{3}$$

worin α, β, γ, δ willkürliche „Konstanten" sind; denn auf der linken Seite von (2) steht das anharmonische Doppelverhältnis $(\eta_x, \eta_{x+1}, \eta_{x+2}, \eta_{x+3})$, welches durch die Substitution (3) ungeändert bleibt.

4. Die homogene lineare Differenzengleichung dritter Ordnung, der die Produkte je zweier Lösungen einer homogenen linearen Differenzengleichung zweiter Ordnung genügen.

Wir gehen wieder aus von der Normalform

$$Q(y_x) \equiv y_{x+2} - y_{x+1} + q_x y_x = 0.$$

Multipliziert man beide Seiten dieser Gleichung der Reihe nach mit y_x, y_{x+1}, y_{x+2} und setzt $y_x^2 = u_x$, so erhält man nach Elimination von $y_x y_{x+2}$ aus den drei so entstehenden Gleichungen:

$$y_x y_{x+1} = \frac{1}{2q_x}(u_{x+1} - u_{x+2} + q_x^2 u_x),$$

$$y_{x+1} y_{x+2} = \tfrac{1}{2}(u_{x+1} + u_{x+2} - q_x^2 u_x),$$

Digitized by Google

und daraus die gesuchte Differenzengleichung dritter Ordnung:

$$(1)\quad P(u_x) \equiv u_{x+3} + (q_{x+1} - 1)u_{x+2} - q_{x+1}(q_{x+1} - 1)u_{x+1} - q_x^2 q_{x+1} u_x = 0.$$

Sie besitzt jedenfalls die Lösungen $y_x^{(1)^2}$, $y_x^{(2)^2}$ und $(y_x^{(1)} + y_x^{(2)})^2$, wenn $y_x^{(1)}$ und $y_x^{(2)}$ Fundamentallösungen von $Q(y_x) = 0$ sind, also als allgemeine Lösung:

$$u_x = c_1 y_x^{(1)^2} + c_2 y_x^{(1)} y_x^{(2)} + c_3 y_x^{(2)^2}.$$

Es besteht noch die bemerkenswerte identische Relation:

$$P(y_x^2) \equiv Q_1(y_{x+1}) Q(y_{x+1}) + q_{x+1} Q_2(y_x) Q(y_x),$$

worin

$$Q_1(y_x) \equiv y_{x+2} + y_{x+1} - q_x y_x, \quad Q_2(y_x) \equiv y_{x+2} - y_{x+1} - q_x y_x$$

ist; durch sie wird in Evidenz gesetzt, daß $P(u_x) = 0$ durch $u_x = y_x^2$, wo y_x eine Lösung von $Q(y_x) = 0$ ist, befriedigt wird. — Zwischen den drei Fundamentallösungen $u_x^{(1)} = y_x^{(1)^2}$, $u_x^{(2)} = y_x^{(1)} y_x^{(2)}$, $u_x^{(3)} = y_x^{(2)^2}$ besteht die homogene quadratische Relation:

$$u_x^{(2)^2} - u_x^{(1)} u_x^{(3)} = 0.$$

Besteht umgekehrt zwischen drei Fundamentallösungen $v_x^{(1)}$, $v_x^{(2)}$, $v_x^{(3)}$ einer homogenen linearen Differenzengleichung dritter Ordnung $R(v_x) = 0$ mit rationalen Koeffizienten die Relation

$$v_x^{(2)^2} - v_x^{(1)} v_x^{(3)} = 0,$$

so läßt sich zeigen, daß ihr die Produkte zweier Lösungen einer homogenen linearen Differenzengleichung zweiter Ordnung genügen, deren Koeffizienten Quadratwurzeln rationaler Funktionen sind.

Zu der gegebenen Gleichung $R(v_x) = 0$ gehört nämlich[1]) eine Untergruppe G der allgemeinen homogenen linearen Gruppe in drei Veränderlichen, die sogenannte Rationalitätsgruppe mit folgender Doppeleigenschaft: 1. Jede rationale Funktion V der Lösungen $v_x^{(1)}$, $v_x^{(2)}$, $v_x^{(3)}$ und ihrer sukzessiven Werte deren „numerischer" Wert rational (d. h. hier eine rationale Funktion von x) ist, gestattet numerisch alle Transformationen von G (deren Determinante übrigens nicht verschwindet). 2. Jede Funktion V, die numerisch alle Transformationen von G gestattet, hat einen rationalen numerischen Wert. — Die rationale Funktion $v_x^{(2)^2} - v_x^{(1)} v_x^{(3)}$ hat nun den rationalen Wert 0, bleibt also bei allen Transformationen der Rationalitätsgruppe von $R(v_x) = 0$ numerisch ungeändert, d. h. es ist auch

$$\bar{v}_x^{(2)^2} - \bar{v}_x^{(1)} \bar{v}_x^{(3)} = 0,$$

wo

$$(2)\quad \bar{v}_x^{(k)} = \alpha_{k_1} v_x^{(1)} + \alpha_{k_2} v_x^{(2)} + \alpha_{k_3} v_x^{(3)} \qquad (k = 1, 2, 3)$$

ist; darin bedeutet (α_{ki}) irgend eine Transformation der Rationalitätsgruppe, und es ist

$$(3)\quad |\alpha_{ki}| \neq 0 \qquad (k, i = 1, 2, 3).$$

1) Guldberg, l. c. u. C. R. **137**, 639.

Digitized by Google

Man kann daher setzen:

$$(4)\qquad \frac{v_x^{(2)}}{v_x^{(1)}} = \frac{v_x^{(3)}}{v_x^{(2)}} = \eta_x; \qquad \frac{\bar{v}_x^{(2)}}{\bar{v}_x^{(1)}} = \frac{\bar{v}_x^{(3)}}{\bar{v}_x^{(2)}} = \bar{\eta}_x.$$

Aus (2) und (4) folgt:

$$(5)\qquad \frac{\alpha_{21} + \alpha_{22}\eta_x + \alpha_{23}\eta_x^2}{\alpha_{11} + \alpha_{12}\eta_x + \alpha_{13}\eta_x^2} = \frac{\alpha_{31} + \alpha_{32}\eta_x + \alpha_{33}\eta_x^2}{\alpha_{21} + \alpha_{22}\eta_x + \alpha_{23}\eta_x^2}.$$

Sind die α_{ki} wirkliche Konstanten, so muß diese Gleichung eine Identität sein, da sich sonst η_x daraus als Konstante ergäbe gegen die Voraussetzung, daß $v_x^{(1)}$, $v_x^{(2)}$, $v_x^{(3)}$ ein Fundamentalsystem bilden.[1]) Es kann auch wegen (3) nicht $\alpha_{\lambda i} = c\alpha_{\mu i}$ $(\lambda \neq \mu,\ i = 1, 2, 3)$ sein. Daher muß sich in (5) links und rechts ein linearer Faktor in η_x forthebeu, d. h. es muß sein:

$$\bar{\eta}_x = \frac{\alpha + \beta\eta_x}{\gamma + \delta\eta_x} \quad (\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta \text{ Konstanten}).$$

Folglich ist

$$(\eta_x,\ \bar{\eta}_{x+1},\ \bar{\eta}_{x+2},\ \bar{\eta}_{x+3}) = (\eta_x,\ \eta_{x+1},\ \eta_{x+2},\ \eta_{x+3}),$$

wenn $(\eta_x,\ \eta_{x+1},\ \eta_{x+2},\ \eta_{x+3})$ das anharmonische Doppelverhältnis der 4 Größen $\eta_x,\ \eta_{x+1},\ \eta_{x+2},\ \eta_{x+3}$ bedeutet:

$$(\eta_x,\ \eta_{x+1},\ \eta_{x+2},\ \eta_{x+3}) = \frac{\eta_{x+3} - \eta_{x+2}}{\eta_{x+3} - \eta_{x+1}} : \frac{\eta_x - \eta_{x+2}}{\eta_x - \eta_{x+1}}.$$

Dieses Doppelverhältnis ist aber eine rationale Funktion der Lösungen $v_x^{(1)}$, $v_x^{(2)}$, $v_x^{(3)}$ und ihrer sukzessiven Werte, muß also, da diese bei allen Transformationen der Rationalitätsgruppe von $R(v_x) = 0$ ungeändert bleibt, eine rationale Funktion von x sein:

$$(\eta_x,\ \eta_{x+1},\ \eta_{x+2},\ \eta_{x+3}) = q_{x+1};$$

daher ist η_x nach Nr. 3 der Quotient zweier Fundamentallösungen $y_x^{(1)}$, $y_x^{(2)}$ der homogenen linearen Differenzengleichung zweiter Ordnung

$$(6)\qquad y_{x+2} - y_{x+1} + q_x y_x = 0.$$

Aus

$$\frac{v_x^{(2)}}{v_x^{(1)}} = \frac{v_x^{(3)}}{v_x^{(2)}} = \eta_x = \frac{y_x^{(2)}}{y_x^{(1)}}$$

folgt nun:

$$v_x^{(1)} = \varrho_x y_x^{(1)2},\ v_x^{(2)} = \varrho_x y_x^{(1)} y_x^{(2)},\ v_x^{(3)} = \varrho_x y_x^{(2)2};$$

die Differenzengleichung $R(v_x) = 0$ geht daher aus (1) ... $P(u_x) = 0$ durch die Transformation $v_x = \varrho_x u_x$ hervor; wegen der Rationalität der Koeffizienten von $R(v_x) = 0$ und von (6) bezw. (1) muß $\frac{\varrho_{x+1}}{\varrho_x}$ eine rationale Funktion

1) Über eine ähnliche Schlußweise für Differentialgleichungen vgl. Rosenkranz, Diss. Halle, 1890.

Digitized by Google

von x sein. Setzt man andererseits in Gleichung (6) $z_x = \sqrt{\varrho_x} y_x$, so erhält man diejenige homogene lineare Differenzengleichung zweiter Ordnung, von welcher die Produkte je zweier Lösungen der vorgelegten Gleichung $R(v_x) = 0$ genügen; ihre Koeffizienten sind in der Tat Quadratwurzeln rationaler Funktionen (Koeffizient von z_{x+2} gleich 1).

Sind dagegen die α_{kl} nicht wirkliche Konstanten, sondern periodische Funktionen von der Periode 1, so braucht die Gleichung (5) keine Identität zu sein; es ergibt sich dann η_x aus (5) als Wurzel einer Gleichung vierten Grades, also als periodische Funktion, deren Periode höchstens 4 ist.[1]) — Ist erstens η_x eine periodische Funktion von der Periode 4, so ist auch η_x^2 eine solche (deren Periode sich ev. auf 2 reduzieren kann); die Differenzengleichung

$$R(v_x) \equiv v_{x+3} + p_x^{(1)} v_{x+2} + p_x^{(2)} v_{x+1} + p_x^{(3)} v_x = 0$$

besitzt die drei Fundamentallösungen $v_x^{(1)}$, $v_x^{(1)}\eta_x$ und $v_x^{(1)}\eta_x^2$, hat also mit der Differenzengleichung $v_{x+4} - \frac{v_{x+4}^{(1)}}{v_x^{(1)}} v_x = 0$, deren allgemeine Lösung die Form $\omega_x v_x^{(1)}$ hat, wo ω_x eine beliebige periodische Funktion von der Periode 4 ist, ihre sämtlichen Lösungen gemeinsam, d. h. es ist, wenn $\frac{v_{x+4}^{(1)}}{v_x^{(1)}} = s_x$ gesetzt wird:

$$v_{x+4} - s_x v_x = (v_{x+1} - r_x v_x)(v_{x+3} + p_x^{(1)} v_{x+2} + p_x^{(2)} v_{x+1} + p_x^{(3)} v_x).$$

Durch Vergleichung der Koeffizienten folgt:

$$p_{x+1}^{(1)} - r_x = 0,\ p_{x+1}^{(2)} - r_x p_x^{(1)} = 0,\ p_{x+1}^{(3)} - r_x p_x^{(2)} = 0,$$

also:

$$p_x^{(2)} = p_x^{(1)} p_{x-1}^{(1)},\ p_x^{(3)} = p_x^{(1)} p_{x-1}^{(1)} p_{x-2}^{(1)}.$$

Die Gleichung $R(v_x) = 0$ geht daher durch die Transformation $v_x = \Pi p_{x-3}^{(1)} \cdot u_x$ über in:

$$u_{x+3} + u_{x+2} + u_{x+1} + u_x = 0$$

mit den Fundamentallösungen

$$u_x^{(1)} = i^x = e^{\frac{\pi i}{2} x},\ u_x^{(2)} = (-1)^x = e^{\frac{2\pi i}{2} x},\ u_x^{(3)} = (-i)^x = e^{\frac{3\pi i}{2} x},$$

zwischen denen die Relation $u_x^{(2)2} - u_x^{(1)} u_x^{(3)} = 0$ besteht; ihr genügen die Produkte je zweier Lösungen der homogenen linearen Differenzengleichung zweiter Ordnung

$$w_{x+2} - i\sqrt{2}\, w_{x+1} - w_x = 0^2),$$

---

1) Ist ω_x Wurzel einer Gleichung n-ten Grades, deren Koeffizienten periodische Funktionen von der Periode 1 sind, so sind auch $\omega_{x+1}, \omega_{x+2}, \cdots \omega_{x+n}$ Wurzeln dieser Gleichung; also muß $\omega_{x+k} = \omega_{x+l} (k \leqq n,\ l < n)$ sein; d. h. ω_x besitzt höchstens die Periode n.

2) Vgl. S. 62 Gl. (6); $c = -1$.

Digitized by Google

also der Gleichung $R(v_x) = 0$ die Produkte je zweier Lösungen der Gleichung

$$y_{x+2} - i\sqrt{2}\sqrt{p_{x-1}^{(1)}}\, y_{x+1} - \sqrt{p_{x-1}^{(1)} p_{x-2}^{(1)}}\, y_x = 0.$$

Ist zweitens η_x eine periodische Funktion von der Periode 3, so ist auch η_x^2 eine solche[1]); die drei Fundamentallösungen $v_x^{(1)}$, $v_x^{(1)}\eta_x$, $v_x^{(1)}\eta_x^2$ der Gleichung $R(v_x) = 0$ genügen sämtlich der Gleichung $v_{x+3} - \frac{v_{x+3}^{(1)}}{v_x^{(1)}} v_x = 0$, d. h. es muß $p_x^{(1)} = p_x^{(2)} = 0$, $p_x^{(3)} = -\frac{v_{x+3}^{(1)}}{v_x^{(1)}}$ sein. Die Gleichung $R(v_x) = 0$ lautet also in diesem Falle

$$v_{x+3} + p_x^{(3)} v_x = 0;$$

obwohl zwischen ihren Lösungen $v_x^{(1)}$, $v_x^{(2)} = v_x^{(1)} e^{\frac{2\pi i}{3}x}$, $v_x^{(3)} = v_x^{(1)} e^{\frac{4\pi i}{3}x}$ die Relation $v_x^{(2)2} - v_x^{(1)} v_x^{(3)} = 0$ besteht, genügen ihr i. a. *nicht* die Produkte je zweier Lösungen einer homogenen linearen Differenzengleichung zweiter Ordnung, deren Koeffizienten Quadratwurzeln rationaler Funktionen sind; die Gleichung ist aber in diesem Falle *keine eigentliche* Differenzengleichung dritter Ordnung, sondern erster Ordnung mit der Differenz 3.

Ist endlich drittens η_x eine periodische Funktion von der Periode 2, also auch η_x^2 (und zwar darf η_x^2 sich *nicht* auf eine „Konstante" reduzieren, da $v_x^{(1)}$ und $v_x^{(3)} = v_x^{(1)}\eta_x^2$ Fundamentallösungen sind), so besteht zwischen den drei Lösungen 1, η_x, η_x^2 der Differenzengleichung zweiter Ordnung $y_{x+2} - y_x = 0$ eine homogene lineare Relation mit „konstanten" Koeffizienten, also auch zwischen $v_x^{(1)}$, $v_x^{(2)} = v_x^{(1)}\eta_x$, $v_x^{(3)} = v_x^{(1)}\eta_x^2$, gegen die Voraussetzung, daß $v_x^{(1)}$, $v_x^{(2)}$ $v_x^{(3)}$ Fundamentallösungen von $R(v_x) = 0$ sind. Aus demselben Grunde darf sich auch nicht η_x selber auf eine „Konstante", d. h. auf eine periodische Funktion von der Periode 1 reduzieren; es muß dann also Gleichung (5) eine Identität sein, und es gelten die oben daraus gezogenen Schlüsse.

5. Die homogene lineare Differenzengleichung dritter Ordnung, welche nach einer Transformation $y_x = \varrho_x z_x$ sich selbst adjungiert ist.

Die vorgelegte Differenzengleichung mit rationalen Koeffizienten sei

$$(1) \qquad y_{x+3} + p_x y_{x+2} + q_x y_{x+1} + r_x y_x = 0;$$

dieselbe geht durch die Transformation $y_x = \varrho_x z_x$ über in:

$$(2) \qquad z_{x+3} + p_x \frac{\varrho_{x+2}}{\varrho_{x+3}} z_{x+2} + q_x \frac{\varrho_{x+1}}{\varrho_{x+3}} z_{x+1} + r_x \frac{\varrho_x}{\varrho_{x+3}} z_x = 0.$$

Die Adjungierte von (1) (vgl. S. 51, Gl. (7)) lautet:

$$(3) \qquad r_{x+2} z_{x+3} + q_{x+1} z_{x+2} + p_x z_{x+1} + z_x = 0.$$

Sollen die Gleichungen (2) und (3) identisch sein, so muß:

$$(4) \qquad p_x \frac{\varrho_{x+2}}{\varrho_{x+3}} = \frac{q_{x+1}}{r_{x+2}},\ q_x \frac{\varrho_{x+1}}{\varrho_{x+3}} = \frac{p_x}{r_{x+2}},\ r_x \frac{\varrho_x}{\varrho_{x+3}} = \frac{1}{r_{x+2}}$$

1) Es kommen nur ganzzahlige Perioden in Betracht.

Digitized by Google

sein. Aus den Gleichungen (4) ergibt sich sukzessive:

$$\frac{\varrho_{x+1}}{\varrho_{x+2}} = \frac{p_x^2}{q_x q_{x+1}}; \quad \frac{\varrho_{x+2}}{\varrho_{x+3}} = \frac{p_{x+1}^2}{q_{x+1}q_{x+2}} = \frac{q_{x+1}}{p_x r_{x+2}}, \quad r_{x+2} = \frac{q_{x+1}^2 q_{x+2}}{p_{x+1}^2 p_x};$$

$$r_x r_{x+2} = \frac{q_{x-1}^2 q_x}{p_{x-1}^2 p_{x-2}} \cdot \frac{q_{x+1}^2 q_{x+2}}{p_{x+1}^2 p_x};$$

andererseits:

$$r_x r_{x+2} = \frac{\varrho_{x+3}}{\varrho_x} = \frac{\varrho_{x+3}}{\varrho_{x+2}} \cdot \frac{\varrho_{x+2}}{\varrho_{x+1}} \cdot \frac{\varrho_{x+1}}{\varrho_x} = \frac{q_{x+1}q_{x+2}}{p_{x+1}^2} \cdot \frac{q_x q_{x+1}}{p_x^2} \cdot \frac{q_{x-1}q_x}{p_{x-1}^2}.$$

Durch Gleichsetzung dieser beiden Ausdrücke für $r_x x_{x+2}$ ergibt sich $\frac{q_{x-1}}{q_x} = \frac{p_{x-2}}{p_x}$, also $q_x = -cp_{x-1}p_x$, wo c eine willkürliche Konstante ist (und zwar eine wirkliche Konstante, da $n \,.\, V \,.\, p_x$ und q_x rationale Funktionen von x sind); ferner

$$r_x = \frac{q_{x-1}^2 q_x}{p_{x-1}^2 p_{x-2}} = -c^3 p_{x-2} p_{x-1} p_x;$$

endlich noch $\frac{\varrho_{x+1}}{\varrho_x} = c^2 p_{x-2} p_x$, also $\varrho_x = C \prod c^2 p_{x-3} p_{x-1}$. Die Gleichung (1) geht daher durch die Transformation $y_x = \prod p_{x-3} \cdot u_x$ über in die Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten:

$$u_{x+3} + u_{x+2} - cu_{x+1} - c^3 u_x = 0. \tag{5}$$

Die charakteristische Gleichung

$$\alpha^3 + \alpha^2 - c\alpha - c^3 = (\alpha - c)(\alpha^2 + (c+1)\alpha + c^2) = 0$$

besitzt die Wurzeln

$$\alpha_{1,2} = -\frac{c+1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{1 + 2c - 3c^2}, \quad \alpha_3 = c; \quad (\alpha_1 \cdot \alpha_2 = c^2).$$

Die Lösungen von (5) lauten daher: $u_x^{(1)} = \alpha_1^x$, $u_x^{(2)} = \alpha_2^x$, $u_x^{(3)} = c^x$; zwischen denselben besteht die Relation

$$u_x^{(3)2} - u_x^{(1)} u_x^{(2)} = 0.$$

Folglich genügen nach Nr. **4** der Gleichung (5) die Produkte je zweier Lösungen der Differenzengleichung zweiter Ordnung

$$v_{x+2} - \sqrt{c-1}\, v_{x+1} + cv_x = 0 \tag{6}$$

mit den Fundamentallösungen $v_x^{(1)} = \sqrt{\alpha_1}^x$, $v_x^{(2)} = \sqrt{\alpha_2}^x$, also der Gleichung (1) die Produkte je zweier Lösungen der Differenzengleichung zweiter Ordnung

$$w_{x+2} - \sqrt{c-1}\sqrt{p_{x-1}}\, w_{x+1} + c\sqrt{p_{x-1}p_{x-2}}\, w_x = 0. \tag{7}$$

Die charakteristische Gleichung hat gleiche Wurzeln, wenn $1 + 2c - 3c^2 \equiv (1-c)(1+3c) = 0$, also $c = 1$ oder $c = -\frac{1}{3}$ ist; ist $c = -\frac{1}{3}$, so ist $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = -\frac{1}{3}$; die Gleichung (5) hat in diesem Falle die Lösungen

Digitized by Google

$u_x^{(1)} = (-\frac{1}{3})^x$, $u_x^{(2)} = (-\frac{1}{3})^x x$, $u_x^{(3)} = (-\frac{1}{3})^x x^2$, zwischen denen die Relation $u_x^{(2)2} - u_x^{(1)} u_x^{(3)} = 0$ besteht. Ist dagegen $c = 1$, so ist $\alpha_1 = \alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = 1$; zwischen den Lösungen $u_x^{(1)} = e^{\pi i x}$, $u_x^{(2)} = e^{\pi i x} x$, $u_x^{(3)} = e^{2\pi i x}$ der Gleichung (5) besteht in diesem Falle *keine* Relation der obigen Form. Die Gleichung (5) hat hier die Gestalt

$$u_{x+3} + u_{x+2} - u_{x+1} - u_x \equiv (u_{x+1} + u_x)(u_{x+2} - u_x) \equiv (u_{x+1} + u_x)^2 (u_{x+1} - u_x) = 0.$$

Aus der Definition der „Adjungierten" folgt, daß *stets* zwischen den Fundamentallösungen einer sich selbst (nach einer homogenen linearen Transformation) adjungierten Differenzengleichung eine quadratische Relation bestehen muß (vgl. S. 53, Gl. (10) für $i = n$); auch in diesem Falle besteht eine solche: dieselbe nimmt aber hier die besondere Form an:

$$u_x^{(3)2} - e^{2\pi i x} u_x^{(1)2} = 0, \text{ d. h. } u_x^{(3)} = e^{\pi i x} u_x^{(1)},$$

worin $e^{\pi i x}$ als periodische Funktion von der Periode 2 keine „Konstante" ist. — Diese Untersuchung läßt sich auf Differenzengleichungen n^{ter} Ordnung ausdehnen.

Einige Aufgaben aus meinen Übungsstunden.

Von E. Lampe.

Als eine Pflicht meiner Lehrertätigkeit habe ich es immer betrachtet, für meine Übungsstunden entweder neue Aufgaben zu bilden, oder bei alten Aufgaben neue, wenig beachtete Seiten der Betrachtung zu unterbreiten. Da ich hoffe, daß auch andere Lehrer ähnliche Neigungen haben, gebe ich im folgenden die Behandlung einiger derartiger Fragen. Obwohl somit vielleicht einiges Neue inbezug auf die behandelten Gegenstände geboten wird, lege ich darauf keinen besonderen Wert. Ich möchte nur zeigen, auf welche Weise ich es versuche, gleich beim Beginn des Studiums auf der Hochschule die Lust am selbstständigen Arbeiten zu wecken.

I. *Zur Einleitung in die Lehre vom Krümmungskreise* oder überhaupt zur elementaren Behandlung dieser Lehre sind vor allem solche Kurven geeignet, deren Koordinaten sich rational durch einen variablen Parameter ausdrücken lassen. Unter den dem Anfänger bekannten Kurven ist in erster Linie die Parabel zu nennen, sodann die gleichseitige Hyperbel. Die Parameterdarstellungen der Koordinaten von Ellipse und Hyperbel

$$x = \frac{2t}{1+t^2}\, a, \quad y = \frac{1-t^2}{1+t^2}\, b$$

und

$$x = \frac{1+t^2}{1-t^2}\, a, \quad y = \frac{2t}{1-t^2}\, b$$

können zwar auch benutzt werden, dürften aber am Anfange der analytischen Geometrie zunächst fremdartig erscheinen.

Als Regel für Aufgaben über die Parabel $y^2 = 2px$ ist festgehalten, daß die Abszissen x der Parabelpunkte durch die Ordinaten y ausgedrückt werden:

$$x = y^2/2p.$$

Digitized by Google

1. Den Schnittpunkt $S(\xi, \eta)$ der Normalen der Parabel $y^2 = 2px$ in den Punkten $P_1(x_1, y_1)$ und $P_2(x_2, y_2)$ zu finden.

$$\xi_1 = p + \frac{1}{2p}(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2),\ \eta = -\frac{1}{2p^2}(y_1 + y_2)\, y_1 y_2 .$$

Für $y_1 = y_2$ gehen ξ, η in die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes M von P_1 über:

$$\xi = p + 3x_1,\ \eta = -y_1^3/p^2.$$

Anmerkung. a) Die Normale in P_1 schneide die Direktrix der Parabel in P_3 mit den Koordinaten x_3, y_3 so ist $x_3 = -\frac{1}{2}p$, $y_3 = \frac{3}{2}y_1 + \frac{y_1^3}{2p^2}$, also

$$P_1P_3 = \frac{(y_1^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{2p^2} = \frac{1}{2}MP_1 = \frac{1}{2}R,\ \text{wo } R = \frac{(y_1^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}$$

der Krümmungsradius in P_1 ist.

b) Die Normale in P_1 schneide die Parabel zum zweiten Male in $P_2(x_2, y_2)$, so ist

$$y_2 = -y_1 - \frac{2p^2}{y_1},\ x_2 = \frac{y_2^2}{2p},\ P_1P_2^2 = n^2 = 4y_1^2\left(1 + \frac{p^2}{y_1^2}\right)^3,$$

$$n = \frac{2}{y_1^2}(y_1^2 + p^2)^{\frac{3}{2}},\ \text{Min. } n = 3p\sqrt{3} \text{ für } x_1 = p, y_1 = p\sqrt{2}.$$

Der Ort des Schnittpunktes der Tangenten in P_1 und P_2 ist

$$y^2 = \frac{-p^3}{2(x+p)}.$$

2. Den Mittelpunkt $M(\xi, \eta)$ des Kreises zu bestimmen, der durch die drei Punkte $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$ der Parabel $y^2 = 2px$ geht.

$$\xi = p + \frac{1}{4p}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_2y_3 + y_3y_1 + y_1y_2),$$

$$\eta = -\frac{1}{8p^2}(y_2 + y_3)(y_3 + y_1)(y_1 + y_2).$$

Rücken die drei Punkte in einen Punkt P_1 zusammen, so werden ξ, η die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes von P_1:

$$\xi = p + \frac{3y_1^2}{2p} = p + 3x_1,\ \eta = -\frac{y_1^3}{p^2}.$$

3. Den Radius des Kreises zu finden, der durch die drei Punkte P_1, P_2, P_3 der Parabel geht.

Man bestimme die Seiten und den Inhalt Δ des Dreiecks $P_1P_2P_3$:

$$P_1P_2 = \frac{y_1 - y_2}{2p}\sqrt{4p^2 + (y_1 + y_2)^2} \text{ usw.},$$

$$\Delta = \frac{1}{4p}(y_2 - y_3)(y_3 - y_1)(y_1 - y_2).$$

Nach der bekannten Formel $R = abc/4\Delta$ ergibt sich dann das Quadrat des gesuchten Radius:

$$R^2 = \frac{1}{64p^4}\{4p^2 + (y_2 + y_3)^2\}\{4p^2 + (y_3 + y_1)^2\}\{4p^2 + (y_1 + y_2)^2\}.$$

Digitized by Google

Für $y_1 = y_2 = y_3$ fließt hieraus der bekannte Ausdruck für den Krümmungsradius

$$R = \frac{(p^2 + y_1^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}.$$

Der Wert der Betrachtungen dieser drei Aufgaben sowie der entsprechenden, nachfolgenden über die gleichseitige Hyperbel liegt darin, daß die Formeln für den Krümmungskreis durch das Zusammenrücken vorher getrennter Punkte aus den ersten Formeln der analytischen Geometrie zwanglos folgen.

4. Den Schnittpunkt $S(\xi, \eta)$ der Normalen der gleichseitigen Hyperbel $xy = m^2$ in den Punkten $P_1(x_1, y_1)$ und $P_2(x_2, y_2)$ zu finden.

$$\xi = \frac{m^4 + x_1 x_2 (x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2)}{x_1 x_2 (x_1 + x_2)} = \frac{y_1 y_2 + x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2}{x_1 + x_2},$$

$$\eta = \frac{m^4 + y_1 y_2 (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2)}{y_1 y_2 (y_1 + y_2)} = \frac{x_1 x_2 + y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2}{y_1 + y_2}.$$

Fallen P_1 und P_2 zusammen, so gehen ξ und η in die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes M über:

$$\xi = \frac{m^4}{2 x_1^3} + \frac{3}{2} x_1 = \frac{1}{2} \frac{y_1^2}{x_1} + \frac{3}{2} x_1,$$

$$\eta = \frac{m^4}{2 y_1^3} + \frac{3}{2} y_1 = \frac{1}{2} \frac{x_1^2}{y_1} + \frac{3}{2} y_1.$$

Der Krümmungsradius $R = P_1 M$ folgt aus

$$R^2 = (\xi - x_1)^2 + (\eta - y_1)^2 = \frac{1}{4} \frac{(x_1^2 + y_1^2)^3}{m^4}; \quad R = \frac{1}{2} \frac{r_1^3}{m^2}.$$

Anmerkung. Die Normale in P_1 schneide die Hyperbel zum zweiten Male in P_2, wo

$$x_2 = -\frac{y_1^2}{x_1}, \; y_2 = -\frac{x_1^2}{y_1}; \text{ daher } P_1 P_2 = \frac{r_1^3}{m^2} = 2R.$$

5. Den Mittelpunkt $M(\xi, \eta)$ des Umkreises des Dreiecks $P_1 P_2 P_3$ zu finden, dessen Ecken P_1, P_2, P_3 auf der gleichseitigen Hyperbel $xy = m^2$ liegen.

$$\xi = \frac{m^4}{2 x_1 x_2 x_3} + \frac{1}{2} (x_1 + x_2 + x_3),$$

$$\eta = \frac{m^4}{2 y_1 y_2 y_3} + \frac{1}{2} (y_1 + y_2 + y_3).$$

Für $y_1 = y_2 = y_3$ folgen die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes M wie in 5.:

$$\xi = \frac{m^4}{2 x_1^3} + \frac{3}{2} x_1, \; \eta = \frac{m^4}{2 y_1^3} + \frac{3}{2} y_1.$$

6. Den Umkreisradius R des Dreiecks $P_1 P_2 P_3$ zu finden, dessen Ecken P_1, P_2, P_3 auf der gleichseitigen Hyperbel $xy = m^2$ liegen.

$$P_1 P_2 = \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2} \sqrt{m^4 + x_1^2 x_2^2} \text{ usw.},$$

$$\Delta P_1 P_2 P_3 = \frac{m^2}{2 x_1 x_2 x_3} (x_2 - x_3)(x_3 - x_1)(x_1 - x_2),$$

$$R^2 = \frac{(m^4 + x_2^2 x_3^2)(m^4 + x_3^2 x_1^2)(m^4 + x_1^2 x_2^2)}{4 m^4 x_1^2 x_2^2 x_3^2}.$$

Digitized by Google

Für $x_1 = x_2 = x_3$ wird das Quadrat des Krümmungsradius R:

$$R^2 = \frac{(m^4 + x_1^4)^3}{4m^4 x_1^4} = \frac{(x_1^2 y_1^2 + x_1^4)^3}{4m^4 x_1^4} = \frac{(x_1^2 + y_1^2)^3}{4m^4},$$

$$R = \frac{r_1^3}{2m^2}.$$

7. Von einem Punkte P_0 zieht man die drei Normalen P_0P_1, P_0P_2, P_0P_3 an die Parabel $y^2 = 2px$. Den Umkreis des Dreiecks $P_1P_2P_3$ zu untersuchen.

Die Ordinaten der drei Fußpunkte P_1, P_2, P_3 der Normalen bestimmen sich aus der Gleichung:

$$y^3 + 2py(p - x_0) - 2p^2 y_0 = 0.$$

Mithin ist

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0,\ y_2y_3 + y_3y_1 + y_1y_2 = 2p(p - x_0),\ y_1y_2y_3 = 2p^2y_0.$$

Daraus folgt sofort (vgl. Nr. 2), da $y_2 + y_3 = -y_1$ usw.,

$$\eta = \frac{y_1y_2y_3}{8p^2} = \frac{1}{4}y_0,$$

$$\xi = p - \frac{1}{4p}(y_2y_3 + y_3y_1 + y_1y_2) = p - \frac{p}{2}(p - x_0) = \frac{p + x_0}{2}.$$

Der Mittelpunkt M des Umkreises von $P_1P_2P_3$ kann hiernach leicht konstruiert werden. Nun geht aber dieser Kreis auch durch den Scheitel der Parabel. Denn aus der Gleichung eines beliebigen Kreises

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

folgt für die Schnittpunkte dieses Kreises mit der Parabel die biquadratische Gleichung:

$$y^4 + 4py^2(p - a) - 4bp^2y + 4p^2(a^2 + b^2 - r^2) = 0.$$

Also ist $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0$. Für den Umkreis von $P_1P_2P_3$ ist $y_1 + y_2 + y_3 = 0$; mithin ist $y_4 = 0$, d. h. der Umkreis von $P_1P_2P_3$ geht auch durch den Scheitel, und sein Radius ist $r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \frac{1}{4}\sqrt{y_0^2 + 4(p + x_0)^2}$.

Soll man also von P_0 die Normalen an die Parabel ziehen, so konstruiere man aus den Koordinaten x_0 und y_0 von P_0 die Koordinaten $\xi = \frac{1}{2}(x_0 + p)$, $\eta = \frac{1}{4}y_0$ von M und beschreibe um M mit dem Abstande dieses Punktes vom Scheitel der Parabel als Radius den Kreis. Dieser Kreis schneidet die Parabel außerdem noch in drei Punkten P_1, P_2, P_3, den gesuchten Fußpunkten der Normalen von P_0 aus.

Der Umkreisradius R von $P_1P_2P_3$ kann zur Bestätigung auch aus dem Ausdrucke für R^2 in Nr. 3. berechnet werden. Da nämlich $y_1 + y_2 = -y_3$ usw. ist, erhält man zunächst

$$R^2 = \frac{1}{64p^3}(4p^2 + y_1^2)(4p^2 + y_2^2)(4p^2 + y_3^2).$$

Aus $y_1 + y_2 + y_3 = 0$ folgt

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = -2(y_2y_3 + y_3y_1 + y_1y_2) = -4p(p - x_0).$$

Ferner ist

$$(y_2y_3 + y_3y_1 + y_1y_2)^2 = \sum y_1^2y_2^2 + 2y_1y_2y_3\sum y_1,$$

Digitized by Google

d. h.
$$4p^2(p-x_0)^2 = y_2^2y_3^2 + y_3^2y_1^2 + y_1^2y_2^2.$$

Daraus folgt

$$R^2 = \frac{1}{64p^4}\left[64p^6 - 16p^4\cdot 4p(p-x_0) + 4p^2\cdot 4p^2(p-x_0)^2 + 4p^4y_0^2\right]$$
$$= \frac{1}{16}\left[4(p+x_0)^2 + y_0^2\right].$$

8. Von einem Punkte P_0 auf der gleichseitigen Hyperbel $xy = m^2$ zieht man die Normalen P_0P_1, P_0P_2, P_0P_3 an die Hyperbel (wobei die Normale in P_0 ausgeschlossen bleibt). Den Umkreis des Dreiecks $P_1P_2P_3$ zu untersuchen.

Die Abszissen der vier Fußpunkte der vier Normalen folgen aus

$$x^4 - x_0x^3 + \frac{m^4}{x_0}(x - x_0) = 0.$$

Nach Aussonderung des Faktors $x - x_0$, welcher der Normale in P_0 entspricht, bleibt für die drei anderen Normalen die kubische Gleichung

$$x^3 + m^4/x_0 = 0.$$

Mithin ist

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0\,,\quad x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2 = 0\,,\quad x_1x_2x_3 = -\,m^4/x_0.$$

Daraus folgen sofort die Koordinaten des Mittelpunktes M (vgl. Nr. 5) $\xi = -\frac{1}{2}x_0$, $\eta = -\frac{1}{2}y_0$ (Letzteres aus der Symmetrie der Gleichung $xy = m^2$ für x und y). Aus der Gleichung eines beliebigen Kreises $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ erhält man für die Schnittpunkte mit $xy = m^2$ die biquadratische Gleichung:

$$x^4 - 2ax^3 + (a^2 + b^2 - r^2)x^2 - 2bm^2x + m^4 = 0.$$

Folglich ist $x_1x_2x_3x_4 = m^4$; weil aber für den Umkreis von $P_1P_2P_3$ das Produkt $x_1x_2x_3 = -\,m^4/x_0$ ist, folgt $x_4 = -\,x_0$ für den vierten Schnittpunkt des Umkreises mit der Hyperbel. Da $\xi = -\frac{1}{2}x_0$, $\eta = -\frac{1}{2}y_0$ ist, erkennt man, daß der Umkreis von $P_1P_2P_3$ den Radius der Hyperbel OP_0' zum Durchmesser hat, der die Verlängerung des Radius vom Mittelpunkt O der Hyperbel nach P_0 ist. Von den drei Normalen sind also zwei immer imaginär; der Umkreis von $P_1P_2P_3$ dagegen bleibt reell.

Soll man demnach von einem Punkte P_0 einer gleichseitigen Hyperbel die von der Normale in P_0 verschiedene Normale konstruieren, so ziehe man vom Mittelpunkte O der Hyperbel den Radius OP_0; derselbe schneide in seiner Verlängerung über O hinaus die Hyperbel zum zweiten Male in P_0'. Der Kreis über OP_0' als Durchmesser treffe die Hyperbel zum zweiten Male in P_1; dann ist P_0P_1 die verlangte Normale.

Der Umkreisradius R von $P_1P_2P_3$ kann zur Bestätigung aus dem Ausdrucke für R^2 in Nr. 6 berechnet werden.

Da nämlich

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad \text{und} \quad x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2 = 0,$$

so folgt

$$\sum x_1^2x_2^2 = 0,\ \sum x_1^2 = 0,\ \sum x_1^4x_2^2x_3^2 = 0;$$

daher:

$$R^2 = \frac{m^4 + x_0^4}{4x_0^2} = \frac{x_0^2 + y_0^2}{4}\,;\quad R = \tfrac{1}{2}r_0.$$

Digitized by Google

9. Zu drei beliebig gewählten Punkten P_1, P_2, P_3 in der Ebene einer Parabel konstruiert man die drei Polaren bezüglich der Parabel. Den Inhalt Δ_p des von den Polaren gebildeten Dreiecks zu finden.

Die Polaren zu P_1 und P_2:

$$yy_1 = p(x + x_1),\ yy_1 = p(x + x_2)$$

schneiden sich in

$$y = p\,\frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2},\quad x = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 - x_2}.$$

Dann ist also

$$2\Delta_p = \begin{vmatrix} \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 - x_2} & p\,\frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} & 1 \\ \frac{x_2 y_3 - x_3 y_2}{x_2 - x_3} & p\,\frac{x_2 - x_3}{y_2 - y_3} & 1 \\ \frac{x_3 y_1 - x_1 y_3}{y_3 - y_1} & p\,\frac{x_3 - x_1}{y_3 - y_1} & 1 \end{vmatrix}.$$

Man setze $(y_2 - y_3)(y_3 - y_1)(y_1 - y_2) = D$, so ist

$$2\Delta_p = \frac{p}{D}\begin{vmatrix} x_1 y_2 - y_2 x_1 & x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \\ x_2 y_3 - x_3 y_2 & x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 & x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{p}{D}\begin{vmatrix} 2\Delta & 0 & 0 \\ x_2 y_3 - x_3 y_2 & x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 & x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix},$$

wo $2\Delta = |x_i y_i| = x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_3 y_1 - x_1 y_3 + x_1 y_2 - x_2 y_1$ der doppelte Inhalt des Dreiecks $P_1 P_2 P_3$ ist. Demnach ergibt sich:

$$2\Delta_p = \frac{p}{D} \cdot 2\Delta \cdot 2\Delta,\ \Delta_p = \frac{2p}{D}\Delta^2.$$

Wenn P_1, P_2, P_3 auf der Parabel liegen, ist

$$2\Delta = \frac{1}{2p}\begin{vmatrix} 1 & y_1 & y_1^2 \\ 1 & y_2 & y_2^2 \\ 1 & y_3 & y_3^2 \end{vmatrix} = \frac{D}{2p},\ D = 4p\Delta.$$

Mithin $\Delta_p = \frac{1}{2}\Delta$, ein bekannter Satz über den Flächeninhalt eines Dreiecks, dessen Seiten die Tangenten in P_1, P_2, P_3 sind.

10. Die drei Punkte P_1, P_2, P_3 liegen auf der gleichseitigen Hyperbel $xy = m^2$; man zieht in den Punkten P_1, P_2, P_3 die Tangenten der Hyperbel. Wie verhält sich der Inhalt Δ_t des Tangentendreiecks zu dem Inhalte Δ von $P_1 P_2 P_3$?

Man findet:

$$\Delta_t = \frac{2(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)(x_1 - x_2)}{(x_2 + x_3)(x_3 + x_1)(x_1 + x_2)} \cdot m^2,$$

während (vgl. Nr. 6)

$$\Delta = \frac{m^2}{2x_1 x_2 x_3}(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)(x_1 - x_2).$$

Digitized by Google

Also ist

$$\frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{4x_1x_2x_3}{(x_2+x_3)(x_3+x_1)(x_1+x_2)}.$$

Anmerkung. a) Der Höhenschnitt H des Dreiecks $P_1P_2P_3$ hat die Koordinaten $x = -m^4/x_1x_2x_3$, $y = -x_1x_2x_3/m^2$. Der vierte Schnittpunkt P_4 des Umkreises von $P_1P_2P_3$ mit der Hyperbel hat die Koordinaten $x_4 = m^4/x_1x_2x_3$, $y_4 = m^4/y_1y_2y_3$. Also ist HP_4 ein Durchmesser der Hyperbel. Wird $x_1 = x_2 = x_3$, so erhält man $x = -m^4/x_1^3$, $y = -x_1^3/m^2$, d. h. die Koordinaten des Schnittpunktes P der Normale in P_1 mit der Hyperbel; der Krümmungskreis in P_1 schneidet die Hyperbel in dem anderen Endpunkte des Durchmessers, dessen einer Endpunkt P ist.

b) Nimmt man P_1, P_2, P_3 beliebig in der Ebene der Hyperbel $xy = m^2$ und bestimmt den Flächeninhalt Δ des Dreiecks, welches von den Polaren der Punkte P_1, P_2, P_3 gebildet wird, so findet man durch eine ähnliche Rechnung wie bei der Parabel:

$$\Delta_p = \frac{8m^4\Delta^2}{(x_2y_3 - x_3y_2)(x_3y_1 - x_1y_3)(x_1y_2 - x_2y_1)},$$

wo Δ der Flächeninhalt des Dreiecks $P_1P_2P_3$ ist.

11. Es möge hier nur kurz angegeben werden, wie man entsprechend den Nummern 1 und 3, die Koordinaten des Schnittpunktes $S(\xi, \eta)$ zweier Normalen einer Ellipse in einer Form berechnen kann, aus der sofort die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes der Ellipse folgen.

Die Gleichungen der Ellipsennormalen in den Punkten P_1 und P_2 sind:

$$a^2xy_1 - b^2x_1y = (a^2 - b^2)x_1y_1,$$

$$a^2xy_2 - b^2x_2y = (a^2 - b^2)x_2y_2.$$

Daraus folgt

$$a^4x = \frac{(a^2 - b^2)x_1x_2(y_2 - y_1)}{x_1y_2 - x_2y_1}.$$

Erweitert man diesen Bruch mit $x_1y_2 + x_2y_1$, so wird der Nenner

$$x_1^2y_2^2 - x_2^2y_1^2 = \frac{a^2}{b^2}[(b^2 - y_1^2)y_2^2 - (b^2 - y_2^2)y_1^2] = a^2(y_2^2 - y_1^2),$$

also ist

$$x = \frac{(a^2 - b^2)x_1x_2(x_1y_2 + x_2y_1)}{a^4(y_1 + y_2)}.$$

Läßt man jetzt P_1 mit P_2 zusammenfallen, so geht x über in ξ:

$$\xi = \frac{(a^2 - b^2)x_1^3}{a^4}.$$

Ebenso folgt

$$\eta = \frac{(b^2 - a^2)y_1^3}{b^4}.$$

Aus diesen Koordinaten findet man sofort den Krümmungsradius und die Gleichung der Evolute.

Dieser Zugang zu dem Krümmungskreise der Ellipse oder Hyperbel scheint mir für den Anfänger natürlicher als der von Herrn Weber in Band II der Enzyklopädie der Elementar-Mathematik S. 507—513 gewählte.

Digitized by Google

Geht man von der bekannten Parameterdarstellung der Koordinaten einer Ellipse aus: $x = a \sin t, y = b \cos t$, so gestaltet sich die Rechnung folgendermaßen. Die Gleichung der Normale im Punkte P_1 ist

$$ax \cos t_1 - by \sin t_1 = (a^2 - b^2) \sin t_1 \cos t_1.$$

Der Schnittpunkt der Normalen in den Punkten P_1 und P_2 wird:

$$x = \frac{a^2 - b^2}{a} \cdot \sin t_1 \sin t_2 \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}(t_1 + t_2)}{\cos \frac{1}{2}(t_1 - t_2)},$$

$$y = \frac{b^2 - a^2}{b} \cdot \cos t_1 \cos t_2 \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}(t_1 + t_2)}{\cos \frac{1}{2}(t_1 - t_2)}.$$

Für $t_1 = t_2 = t$ erhält man hieraus die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes in der Gestalt:

$$x = \frac{a^2 - b^2}{a} \cdot \sin^3 t, \; y = -\frac{a^2 - b^2}{b} \cos^3 t,$$

daraus die Gleichung der Evolute:

$$a^{2/3} x^{2/3} + b^{2/3} y^{2/3} = c^{4/3}.$$

12. Eine Ellipse sei durch die Gleichungen $x = a \sin t$, $y = b \cos t$ definiert; den Umkreisradius des Dreiecks $P_1 P_2 P_3$ zu berechnen, wenn P_1, P_2, P_3 auf der Ellipse liegen.

Die Seiten des Dreiecks $P_1 P_2 P_3$ sind:

$$P_1 P_2 = 2 \sin \frac{t_1 - t_2}{2} \left[a^2 \cos^2 \frac{t_1 + t_2}{2} + b^2 \sin^2 \frac{t_1 + t_2}{2}\right]^{\frac{1}{2}} \text{ usw.},$$

sein Inhalt:

$$\Delta = 2ab \sin \frac{t_2 - t_3}{2} \sin \frac{t_3 - t_1}{2} \sin \frac{t_1 - t_2}{2}.$$

Daher der gesuchte Umkreisradius:

$$R = \frac{P_1 P_2 \cdot P_2 P_3 \cdot P_3 P_1}{4\Delta} = \frac{1}{ab} \Pi \left[a^2 \cos^2 \frac{t_2 + t_3}{2} + b^2 \sin^2 \frac{t_2 + t_3}{2}\right]^{\frac{1}{2}},$$

wo sich das Produkt Π auf die Zeigerpaare (2, 3), (3, 1), (1, 2) erstreckt. Die Mittelpunktskoordinaten ξ, η des Kreises sind ($c^2 = a^2 - b^2$):

$$\xi = \frac{c^2}{a} \sin \frac{t_2 + t_3}{2} \sin \frac{t_3 + t_1}{2} \sin \frac{t_1 + t_2}{2},$$

$$\eta = -\frac{c^2}{b} \cos \frac{t_2 + t_3}{2} \cos \frac{t_3 + t_1}{2} \cos \frac{t_1 + t_2}{2}.$$

Für $t_1 = t_2 = t_3 = t$ erhält man die für den Krümmungskreis geltenden Formeln:

$$\xi = \frac{c^2}{a} \sin^3 t, \quad \eta = -\frac{c^2}{b} \cos^3 t,$$

$$R = \frac{[a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t]^{\frac{3}{2}}}{ab} = \frac{[a^4 y^2 + b^4 x^2]^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4}.$$

13. Den Inhalt Δ_1 des Dreiecks zu finden, den die drei Parabelnormalen in P_1, P_2, P_3 miteinander bilden.

Digitized by Google

Die Koordinaten der drei Schnittpunkte seien (x', y'), (x'', y''), (x''', y'''), so ist

$$x' = p + \frac{1}{2p}(y_2^2 + y_2 y_3 + y_3^2),\ y' = -\frac{y_2 y_3}{2p^2}(y_2 + y_3) \text{ usw.}$$

Daher

$$2\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & x' & y' \\ 1 & x'' & y'' \\ 1 & x''' & y''' \end{vmatrix},$$

$$\Delta_n = -\frac{1}{8p^3}\begin{vmatrix} 1 & 2p^2 + y_2^2 + y_2 y_3 + y_3^2 & y_2^2 y_3 + y_3^2 y_2 \\ 1 & 2p^2 + y_3^2 + y_3 y_1 + y_1^2 & y_3^2 y_1 + y_1^2 y_3 \\ 1 & 2p^2 + y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2 & y_1^2 y_2 + y_2^2 y_1 \end{vmatrix}.$$

Nach Subtraktion der zweiten Zeile von der dritten, der ersten von der zweiten geht dies über in

$$\Delta_n = -\frac{1}{8p^3}(y_1 - y_2)(y_2 - y_3)(y_1 + y_2 + y_3)^2 \begin{vmatrix} 1 & y_3 \\ 1 & y_1 \end{vmatrix} = \frac{D}{8p^3}(y_1 + y_2 + y_3)^2.$$

Setzt man wieder $P_1 P_2 P_3 = \Delta = D/4p$, so folgt endlich

$$\Delta_n = \frac{(y_1 + y_2 + y_3)^2}{2p}\Delta.$$

14. Den Umkreisradius des Tangentendreiecks einer Parabel zu finden, wenn die Berührungspunkte der Tangenten P_1, P_2, P_3 gegeben sind.

Die Tangenten mögen sich in Q_1, Q_2, Q_3 schneiden; die Koordinaten von Q_1 seien $x' = \frac{y_2 y_3}{2p}$, $y' = \frac{1}{2}(y_2 + y_3)$ usw. Daraus folgen die Mittelpunktskoordinaten ξ, η und $Q_1 Q_2$:

$$\xi = \frac{1}{4p}(p^2 + y_2 y_3 + y_3 y_1 + y_1 y_2), \quad \eta = \tfrac{1}{4}(y_1 + y_2 + y_3) - \frac{y_1 y_2 y_3}{4p^2},$$

$$\overline{Q_1 Q_2}^2 = \frac{1}{4p^2}(y_2 y_3 - y_1 y_3)^2 + \tfrac{1}{4}(y_2 - y_1)^2 = \frac{1}{4p^2}(y_2 - y_1)^2(y_3^2 + p^2).$$

Da nun der Umkreisradius

$$R_t = \frac{Q_1 Q_2 \cdot Q_2 Q_3 \cdot Q_3 Q_1}{4\Delta_t},\ \Delta_t = \frac{D}{8p},$$

ist, so erhält man

$$R_t = \frac{D n_1 n_2 n_3 \cdot 8p}{32p^3 \cdot D} = \frac{n_1 n_2 n_3}{4p^2},$$

wo $n_i = \sqrt{p^2 + y_i^2}$ die Normale des Punktes P_i ist. Fallen P_1, P_2, P_3 in einen Punkt zusammen, so erhält man aus dem Krümmungsradius R in der bekannten Form $R = n^3/p^2$ die Beziehung $R_t = \frac{1}{4}R$ als Bestätigung der Rechnung; läßt man nämlich bei einem Tangentendreieck eines Kreises vom Radius R die drei Berührungspunkte der Tangenten zusammenfallen, so wird an der Grenze der Umkreisradius des Tangentendreiecks $\frac{1}{4}R$.

15. Den Umkreisradius des von drei Normalen einer Parabel gebildeten Dreiecks zu berechnen.

Die Normalen der Punkte P_1, P_2, P_3 mögen sich in N_1, N_2, N_3 schneiden; die Koordinaten x', y' von N_1 sind

$$x' = p + \frac{1}{2p}(y_2^2 + y_2 y_3 + y_3^2),\ y' = -\frac{y_2 y_3}{2p^2}(y_2 + y_3) \text{ usw.}$$

Digitized by Google

Man berechne

$$N_1N_2^2 = \frac{1}{4p^2}[y_2^2 - y_1^2 + y_3(y_2 - y_1)]^2 + \frac{y_3^2}{4p^4}[y_2(y_2 + y_3) - y_1(y_1 + y_3)]^2$$

$$= \frac{(y_2 - y_1)^2}{4p^2}[y_1 + y_2 + y_3]^2 + \frac{y_3^2}{4p^4}(y_2 - y_1)^2[y_1 + y_2 + y_3]^2$$

$$N_1N_2 = \frac{y_2 - y_1}{2p^2}(y_1 + y_2 + y_3)\sqrt{p^2 + y_3^2}$$

Mithin ist

$$R_n = \frac{D(y_1 + y_2 + y_3)^3 n_1 n_2 n_3}{4 \cdot 8p^6 \Delta_n} = \frac{D(y_1 + y_2 + y_3)^3 \cdot n_1 n_2 n_3 \cdot p^3}{4p^6 \cdot D(y_1 + y_2 + y_3)^3}$$

$$R_n = \frac{(y_1 + y_2 + y_3) n_1 n_2 n_3}{4p^3}.$$

Die Mittelpunktskoordinaten ξ, η des Kreises sind:

$$\xi = p + \frac{1}{4p}\sum y_1^2 - \frac{y_1 y_2 y_3}{4p^3}\sum y_1, \quad \eta = -\frac{1}{4}\sum y_1 - \frac{1}{4p^2}(y_1 y_2 y_3 + \sum y_1^2 y_2).$$

II. *Über die Schnittpunkte der Kegelschnitte mit ihren Evoluten.*

Versucht man, die Koordinaten der Schnittpunkte eines Kegelschnitts mit seiner Evolute aus den Gleichungen beider Kurven direkt zu berechnen, so hat man eine kubische Gleichung zu lösen. Eine vorsichtig angelegte Rechnung läßt aber erkennen, daß die Frage auf reine quadratische Gleichungen zurückgeführt werden kann.

Wir führen die Rechnung zunächst für die Ellipse durch. Die Koordinaten ξ, η des Krümmungsmittelpunktes M einer Kurve werden durch die Formeln gegeben

$$(1) \qquad \xi = x - \frac{1 + y'^2}{y''} \cdot y', \quad \eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''},$$

wo x, y die Koordinaten eines Kurvenpunktes P bezeichnen, y' und y'' die erste und die zweite Ableitung von y nach x. Für die Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ erhält man $y' = -b^2x/a^2y$, $y'' = -b^4/a^2y^3$, also

$$(2) \qquad \xi = x - \frac{a^4y^2 + b^4x^2}{a^4b^2} \cdot x, \quad \eta = y - \frac{a^4y^2 + b^4x^2}{a^2b^4} y.$$

Liegt M auf der Ellipse, so genügen ξ und η der Gleichung der Ellipse. Nach Einsetzung der Werte (2) in die Ellipsengleichung stellt sich heraus, daß die resultierende Gleichung den Faktor $(a^4y^2 + b^4x^2)^2$ erhält. Der andere Faktor wird vom zweiten Grade in x und y, nämlich:

$$(3) \qquad b^6x^2 + a^6y^2 - 2a^4b^4 = 0.$$

Die Schnittpunkte dieser Ellipse mit der gegebenen sind diejenigen Punkte P, deren Krümmungsmittelpunkte auf der Ellipse liegen; ihre Koordinaten sind:

$$(4) \qquad x^2 = \frac{a^4(a^2 - 2b^2)}{a^4 - b^4}, \quad y^2 = \frac{b^4(2a^2 - b^2)}{a^4 - b^4}.$$

Berechnet man $x^2 + y^2 = \frac{a^4 - a^2b^2 + b^4}{a^2 + b^2} = r^2$, so ist r der leicht konstruierbare Radius eines Kreises, der die Punkte P aus der Ellipse schneidet.

Die Koordinaten ξ, η der Schnittpunkte M sind demnach

$$(5) \qquad \xi = \pm\frac{a^2}{c}\left[\frac{a^2 - 2b^2}{a^2 + b^2}\right]^{1/2}, \quad \eta = \pm\frac{b^2}{c}\left[\frac{2a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right]^{1/2},$$

Digitized by Google

wo $\sqrt{a^2 - b^2} = c$ die lineare Exzentrizität der Ellipse ist. Die Länge des Krümmungsradius in $P(x, y)$ ist:

$$R = \frac{3a^2b^2\sqrt{3}}{(a^2 + b^2)^{3/2}}.$$

Damit x und ξ reell seien, ist es nötig, daß $a^2 \geqq 2b^2$ ist, oder daß die numerische Exzentrizität $\varepsilon \geqq \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ist, wie ja aus der Betrachtung der bekannten Evolute der Ellipse sofort klar ist.

Die vorstehende Rechnung gilt für die Hyperbel $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, wenn man überall $-b^2$ für b^2 setzt. Die Koordinaten der Schnittpunkte M einer Hyperbel mit ihrer Evolute folgen also aus:

$$(4a) \qquad x^2 = \frac{a^4(a^2 + 2b^2)}{a^4 - b^4}, \quad y^2 = \frac{b^4(2a^2 + b^2)}{a^4 - b^4}$$

und haben die Werte:

$$(5a) \qquad \xi = \pm \frac{a^2}{c}\left[a^2 + 2b^2\right]^{1/2}, \quad \eta = \pm \frac{b^2}{c}\left[2a^2 + b^2\right]^{1/2},$$

wo $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Diese Werte sind nur reell, wenn $a \geqq b$ ist, d. h. wenn der Asymptotenwinkel spitz ist. Der Krümmungsradius in M ist $R = \frac{3a^2b^2\sqrt{3}}{(a^2 - b^2)^{3/2}}$.

Der die Lösung der Gleichung für x und y erleichternde Umstand ist die sich von selbst darbietende Absonderung des Quadrates eines Faktors. Dies ist nicht ein bloß für die Kurven zweiter Ordnung eintretender günstiger Zufall; sondern ein solcher Faktor tritt bei der entsprechenden Gleichung für beliebige Kurven immer auf.

Man setze zur Abkürzung $N = (1 + y'^2)/y''$; dann gehen die Gleichungen (1) über in:

$$(1a) \qquad \xi = x - Ny', \quad \eta = y + N.$$

Die Gleichung einer Kurve sei $f(x, y) = 0$; liegt der Punkt $M(\xi, \eta)$ auf der Kurve, so besteht die Gleichung $f(\xi, \eta) = 0$ oder $f(x - Ny', y + N) = 0$. Nun ist in leicht verständlicher Schreibweise:

$$f(x + h, y + k) = f(x, y) + hf'_x + kf'_y + \tfrac{1}{2}[h^2f''_{xx} + 2hkf''_{xy} + k^2f''_{yy}] + \cdots$$

Das erste Glied rechterhand $f(x, y)$ ist 0. Die folgenden beiden Glieder geben für $h = -Ny'$, $k = N$:

$$hf'_x + kf'_y = N(-y'f'_x + f'_y).$$

Durch Differentiation von $f(x, y) = 0$ erhält man aber $f'_x + f'_y y' = 0$, mithin $f'_x = -f'_y y'$; also wird

$$N(-y'f'_x + f'_y) = Nf'_y(y'^2 + 1) = N^2f'_y y'',$$

da $y'^2 + 1 = Ny''$ ist. Alle folgenden Glieder der Entwicklung haben N^2 oder noch höhere Potenzen von N zu Faktoren. Durch Abtrennung von N^2 geht daher $f(\xi, \eta) = 0$ über in:

$$y''f'_y + \tfrac{1}{2}[y'^2f''_{xx} - 2y'f''_{xy} + f''_{yy}] + \frac{N}{3!}[-y'^3f'''_{xxx} + \cdots] + \cdots = 0.$$

Zur Bestätigung dieser Betrachtung diene die Behandlung der Scheitelgleichung aller drei Kegelschnitte:

$$(6) \qquad y^2 = 2px + x^2(\varepsilon^2 - 1).$$

Digitized by Google

Es wird $yy' = p + x(\varepsilon^2 - 1), y'' = -p^2/y^3$. Beachtet man, daß $[p + x(\varepsilon^2 - 1)]^2 = p^2 + (\varepsilon^2 - 1)y^2$ ist, so ergibt sich leicht:

$$\frac{1 + y'^2}{y''} = -\frac{p^2 + \varepsilon^2 y^2}{p^2} \cdot y = N,$$

also

$$(2\,c) \qquad \eta = y - \frac{p^2 + \varepsilon^2 y^2}{p^2} \cdot y, \quad \xi = x + \frac{p^2 + \varepsilon^2 y^2}{p^2} \cdot [p + x(\varepsilon^2 - 1)].$$

Setzt man η und ξ in die Gleichung (6) ein, so folgen nach einigen leichten Reduktionen, insbesondere nach Forthebung von $(p^2 + \varepsilon^2 y^2)^2/p^4$ die Werte für y^2 und x:

$$(4\,c) \qquad y^2 = \frac{p^2(1 + \varepsilon^2)}{\varepsilon^2(2 - \varepsilon^2)}, \quad x = \frac{p}{\varepsilon^2 - 1}\left(-1 \pm \sqrt{\frac{2\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon^2(2 - \varepsilon^2)}}\right).$$

Hieraus folgt, daß y nur reell ist, wenn $2 \geqq \varepsilon^2$. Bei der Hyperbel muß also die numerische Exzentrizität unter derjenigen der gleichseitigen Hyperbel liegen. Ist $\varepsilon < 1$, die Kurve also Ellipse, so wird x nur reell, wenn $2\varepsilon^2 > 1$, d. h. $a^2 > 2b^2$, wie schon oben bemerkt ist.

III. *Die Wendepunkte der Kurve* $r = a + b \cos n\varphi$ *aufzusuchen* $(n \geqq 1)$. Die Polarkoordinaten r, φ der Wendepunkte genügen der Gleichung $N = 0$, wo $N = r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\varphi^2}$. Setzt man die Werte von r, $dr/d\varphi$, $d^2r/d\varphi^2$ aus der gegebenen Gleichung ein, so erhält man für φ die Gleichung:

$$a^2 + 2b^2n^2 + (n^2 + 2)ab \cos n\varphi - (n^2 - 1)b^2 \cos^2 n\varphi = 0.$$

Hieraus folgt

$$\cos n\varphi = \frac{(n^2 + 2)a \pm R}{2(n^2 - 1)b},$$

wo

$$R = [(n^2 + 2)a^2 + 4(n^2 - 1)(a^2 + 2n^2b^2)]^{1/2}.$$

Die beiden Wurzeln für $\cos n\varphi$ seien w_1 und w_2, nämlich

$$w_1 = \frac{(n^2 + 2)a + R}{2(n^2 - 1)b}, \quad w_2 = \frac{(n^2 + 2) - R}{2(n^2 - 1)b},$$

dann ist also $w_1 > 0$, $w_2 < 0$ und der absolute Betrag von w_1 größer als der von w_2. Da nun

$$w_1 w_2 = -\frac{a^2 + 2n^2b^2}{(n^2 - 1)b^2} = -\left[\frac{a^2}{(n^2 - 1)b^2} + 2 + \frac{2}{n^2 - 1}\right],$$

also der absolute Betrag von $w_1 w_2 > 2$ ist, muß mindestens der absolute Betrag von $w_1 > 1$ sein. Daher kommt für unsere Aufgabe nur w_2 in Betracht, falls $-w_2 < 1$ ist, d. h.

$$-(n^2 + 2)a + R < 2(n^2 - 1)b,$$

$$R^2 < [(n^2 + 2)a + 2(n^2 - 1)b]^2$$

oder nach Einsetzung des Wertes von R^2:

$$a^2 - (n^2 + 2)ab + (n^2 + 1)b^2 < 0.$$

Nun ist

$$a^2 - (n^2 + 2)ab + (n^2 + 1)b^2 = (a - b)(a - (n^2 + 1)b) = P.$$

Digitized by Google

Folgende drei Fälle sind zu unterscheiden:

1. $a > (n^2+1)b$, also auch $a > b$, $P > 0$.
2. $a < (n^2+1)b$ und $a > b$, $P < 0$.
3. $a < b$, also auch $a < (n^2+1)b$, $P > 0$.

In den Fällen 1. und 3. bleibt P positiv, N wird nicht gleich Null, behält stets dasselbe Vorzeichen $+$, die Kurve kehrt mithin dem Pole stets die konkave Seite zu. Nur im Falle 2. existieren Wendepunkte. Der Fall 1. gibt Kurven von derselben Art wie die Kurven der relativen Bewegung des Mondes zur Sonne.

In anderer Weise erledigt sich die Frage, wenn man sich darauf beschränkt, das Vorzeichen von N für die Fälle von $\cos n\varphi = +1$ und $\cos n\varphi = -1$ zu untersuchen (Maxima und Minima von r).

(A) $\cos n\varphi = +1, \quad N = a^2 + (n^2+2)ab + (n^2+1)b^2 > 0.$

Die Kurve wendet bei einem Maximum von r dem Pole die konkave Seite zu.

(B) $$\begin{aligned} \cos n\varphi = -1, \quad N &= a^2 + (n^2+2)ab - (n^2+1)b^2 \\ &= (a-b)(a-(n^2+1)b) = P: \end{aligned}$$

die drei vorher untersuchten Fälle in bezug auf das Vorzeichen von P; nur im Falle

$$b < a < (n^2+1)b$$

wendet die Kurve bei einem Minimum vom r dem Pole die konvexe Seite zu.

IV. *Die oszillierende Reihe* $\frac{1}{2} - \frac{2}{5} + \frac{3}{8} - \frac{4}{11} + \cdots$

Diese Reihe ist von F. Roach in der Educational Times zur Summation vorgelegt. Professor Hudson gibt in den Mathematical questions and solutions from „The Educational Times", New Series, Vol. VII, S. 22—23 kurz als Grenze der Summe S_1 einer geraden Anzahl von Gliedern:

$$S_1 = \tfrac{1}{27}(\pi\sqrt{3} - \ln 8),$$

als Grenze der Summe einer ungeraden Anzahl von Gliedern $S_2 = S_1 + \frac{1}{3}$.

Als ein hübsches Beispiel einer oszillierenden Reihe kann die obige Reihe zur Erläuterung des Begriffs „Summe einer oszillierenden Reihe" dienen. Zunächst ist klar, daß die Reihe nicht konvergiert, weil der absolute Betrag der Glieder nicht Null zur Grenze hat; denn $\lim \frac{n}{3n-1}$ nähert sich mit unendlich werdendem n der Grenze $\frac{1}{3}$.

Nun ist

$$\frac{x}{(1+x^3)^2} = x - 2x^4 + 3x^7 - 4x^{10} + \cdots;$$

mithin

$$(1) \qquad \int_0^x \frac{x\,dx}{(1+x^3)^2} = \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{2}{5}x^5 + \tfrac{3}{8}x^8 - \tfrac{4}{11}x^{11} + \cdots$$

Aus der Partialbruch-Zerlegung

$$\frac{x}{(1+x^3)^2} = \tfrac{1}{9}\left\{\frac{-1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{x-1}{x^2-x+1} + \frac{3}{(x^2-x+1)^2}\right\}$$

Digitized by Google

folgt aber

$$\int \frac{x\,dx}{(1+x^3)^2} = \frac{1}{9}\left\{\ln\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x+1} + \frac{3x^2}{1+x^3} + \sqrt{3}\cdot \operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right\}.$$

Sieht man nun die vorgelegte Reihe als Grenze des bestimmten Integrales (1) für $x = 1$ an, eine Grenze, der sie beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man x der Einheit nähert, so erhält man:

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{(1+x^3)^2} = \frac{1}{9}\left\{\frac{3}{2} - \ln 2 + \frac{\pi}{3}\sqrt{3}\right\} = 0{,}29118$$

als Summe der vorgelegten Reihe.

Berechnet man dagegen das Integral:

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{1+x^3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{8} - \frac{1}{11} + \cdots,$$

so findet man:

$$\frac{x}{x^3+1} = \frac{1}{3}\left\{\frac{x+1}{x^2-x+1} - \frac{1}{x+1}\right\},$$

$$\int \frac{x\,dx}{x^3+1} = \frac{1}{3}\left\{\ln\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x+1} + \sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right\},$$

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^3+1} = \frac{1}{9}(\pi\sqrt{3} - \ln 8) = 0{,}37355 = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{8} - \frac{1}{11} + \cdots$$

$$= 3\left\{\frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{8\cdot 11} + \frac{1}{14\cdot 17} + \cdots\right\}.$$

Zieht man in der gegebenen Reihe immer ein positives Glied mit dem nachfolgenden negativen Gliede zusammen, so erhält man:

$$S_1 = \frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{8\cdot 11} + \frac{1}{14\cdot 17} + \cdots$$

$$= \frac{1}{3}\cdot 0{,}37355 = 0{,}12452.$$

Da $S_2 = S_1 + \frac{1}{3}$, ist $S_2 = 0{,}45785$. Bildet man jetzt $\frac{1}{2}(S_1 + S_2) = \frac{1}{2}\cdot 0{,}58237 = 0{,}29118$, so ergibt sich, daß der Wert von $\int_0^1 \frac{x\,dx}{(1+x^3)^2}$ das arithmetische Mittel von S_1 und S_2 ist. Das Resultat ist analog dem schon von Leibniz betrachteten Falle $x = 1$ der Reihe

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots,$$

die zwischen 0 und 1 oszilliert; als Grenze von $\frac{1}{1+x}$ aufgefaßt, gibt sie die Summe $\frac{1}{2}$, das arithmetische Mittel zwischen 0 und 1.

Digitized by Google

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

Herausgegeben vom Vorstande der Gesellschaft.

61. Sitzung am 29. April 1908.

Vorsitzender: Herr Jahnke.

Anwesend: 20 Herren.

Der Vorsitzende widmet dem Andenken des am 2. April plötzlich verstorbenen Mitgliedes Dr. Otto Pund Worte des Nachrufs.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Jonas: Über W-Strahlensysteme, Flächendeformation und äquidistante Kurvenscharen.

62. Sitzung am 27. Mai 1908.

Vorsitzender: Herr Schafheitlin

Anwesend: 20 Herren.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Salkowski: Schraubenlinien und Loxodromen (s. u.).

Herr Loewenheim: Bericht über die Auflösung von Gleichungen und die Elimination in der Algebra der Logik.

Über Differentiation mit komplexem Index und ihre Beziehungen zur hypergeometrischen Funktion.

Von P. Lindner.

Die Frage nach der Differentiation mit beliebigem Index ist fast so alt, wie die Differentialrechnung selbst. Die ersten Forscher auf diesem Gebiete, Leibniz, Bernoulli, Euler u. a. legten ihren Untersuchungen noch keine bestimmte Definition zugrunde, sie suchten vielmehr durch Analogien oder Interpolationen zu ihren Resultaten zu kommen. Die Späteren gingen zwar von einer festen Definition aus, aber sie suchten, wie Liouville[1]), unbestimmte

1) Journal de l'école polytechnique, cah. XXI: Mémoire sur le calcul de différentielles à indices quelconques.

Digitized by Google

Ableitungen, bis Riemann[1]) in einer Jugendarbeit zu einer Definition der begrenzten Ableitungen gelangt, zu der, unabhängig von ihm, auch die Herren Grünwald und Letnikoff gekommen sind. Diese Definition:

$$\left[\mathfrak{d}_x^{\varrho} f(x)\right]_a^x = \frac{1}{\Pi(-\varrho-1)} \int_a^x (x-t)^{-\varrho-1} f(t)\,dt$$ der „begrenzten Derivationen",

deren sich auch Most u. a. bedienen, verliert jedoch ihren Sinn für ganze Gebiete der im Integral auftretenden Parameter, namentlich aber für positiv ganzzahlige Werte des Index. Diesem und anderen Übelständen abzuhelfen, erscheint als ein geeignetes Mittel, die Ableitung mit komplexem Zeiger durch eine Differentialgleichung zu definieren. Dieser Weg ist sicher gangbar, falls die abzuleitende Funktion einer linearen homogenen Differentialgleichung der Fuchsschen Klasse genügt. Er ist meines Wissens noch kaum betreten, da Herr Schlesinger[2]) in seiner Theorie der Eulerschen Transformierten auf die ihr nahestehenden Ableitungen mit komplexem Zeiger nicht eingeht. *Daß* dieser Weg in einfacher Weise zum Ziele führt — und auch, *wie* er allgemein verfolgt werden kann, soll an einem typischen Fall gezeigt werden.

I.

Es sei $y = (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}$, wo x die unabhängige Variable, a, b, α, β beliebige komplexe Zahlen sind, α und β zunächst auch sein müssen. Durch logarithmische Differentiation ergibt sich: $\frac{y'}{y} = \frac{\alpha}{x-a} + \frac{\beta}{x-b}$ — eine einfachste lineare homogene Differentialgleichung der Fuchsschen Klasse!

Differenzieren wir diese Gleichung $(\varrho+1)$mal, $-\varrho$ vorläufig als positive ganze Zahl vorausgesetzt — so ergibt sich:

$$(x-a)(x-b)\,\mathfrak{d}_x^{\varrho+2} y + [(\varrho+1-\alpha)(x-b) + (\varrho+1-\beta)(x-\alpha)]\,\mathfrak{d}_x^{\varrho+1} y + (\varrho+1)(\varrho-\alpha-\beta)\,\mathfrak{d}_x^{\varrho} y = 0.$$

Setzen wir nun $\mathfrak{d}_x^{\varrho} y = Y$, so entsteht die Differentialgleichung für Y:

$$(\mathfrak{Y}) \qquad Y'' + \left(\frac{\varrho+1-\alpha}{x-a} + \frac{\varrho+1-\beta}{x-b}\right) Y' + \frac{(\varrho+1)(\varrho-\alpha-\beta)}{(x-a)(x-b)}\, Y = 0,$$

eine rekurrente Entwicklung für den $\varrho = n^{\text{ten}}$ Differentialquotienten, die ihn vollkommen definiert, wenn noch eine geeignete Konstantenbestimmung getroffen wird.

Sehen wir nun ab von der Beschränkung, daß ϱ eine positive ganze Zahl sein soll, gestatten ihm vielmehr, ebenfalls eine beliebige komplexe Zahl zu sein, so behält die Gleichung $(\mathfrak{Y})$ ihren vollkommenen Sinn, und definiert die

---

1) Riemanns Werke. Nachlaß. Abschnitt XIV: Versuche einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation.

2) Crelles Journal, Bd. 116 u. 117.

Digitized by Google

Ableitung $\mathfrak{d}_x^\varrho y$ mit komplexem Zeiger — freilich nicht einen einzelnen Zweig dieser Funktion, sondern die Gesamtheit ihrer Fortsetzungen. Natürlich können nicht *alle* Integrale von $(\mathfrak{Y})$ für $\varrho = n$ in den n^{ten} Differentialquotienten von y übergehen; daß aber mindestens eins der Integrale für $\varrho = n$ übergeht in $y^{(n)}$, erhellt aus dem Umstande, daß ja die rekurrente Entwicklung für $\varrho = n$ entstehen muß.

Zur Sichtung der einzelnen Zweige bietet sich die Fundamentalgleichung dar: sie liefert ja als Wurzeln die Exponenten von den Anfangspotenzen der Entwicklungen von Y, einerseits nach steigenden Potenzen von $x - a$, $x - b$, andrerseits nach fallenden Potenzen von $x - a$ oder $x - b$. Diese Exponenten sind, wie sich leicht ergiebt:

für den Punkt a: $\alpha - \varrho$ und 0,
für den Punkt b: $\beta - \varrho$ und 0,
für den Punkt ∞: $\alpha + \beta - \varrho$ und $-\varrho - 1$.

Zu jedem dieser Exponenten gehört *ein* bis auf einen konstanten Vorfaktor vollkommen bestimmtes Integral: wir bezeichnen

das zu a und $\alpha - \varrho$ gehörige Integral mit $y_a^{(\varrho)}$,

das zu b und $\beta - \varrho$ gehörige Integral mit $y_b^{(\varrho)}$,

das zu ∞ und $\alpha + \beta - \varrho$ gehörige Integral mit $y_\infty^{(\varrho)}$,

wo die Analogie mit der Bezeichnung: $y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$ ihre innere Berechtigung in Folgerung 1) von II findet.

Die zu a und 0, zu b und 0, zu ∞ und $-\varrho - 1$ gehörigen Integrale bezeichnen wir der Reihe nach mit η_a, η_b, η_∞. Ihre Bedeutung als Bruchableitungen wird später erhellen.

II.

Als Vervollständigung der Definition zur Bestimmung der konstanten Vorfaktoren mögen dienen die Gleichungen:

$$(1) \qquad \mathfrak{d}_x^\sigma (x-l)^\lambda \Big|_l^x = \frac{\Pi(\lambda)}{\Pi(\lambda-\sigma)} (x-l)^{\lambda-\sigma},$$

$$\mathfrak{d}_x^\sigma (x-l)^\lambda \Big|_\infty^x = e^{\pi i \sigma} \cdot \frac{\Pi(\sigma-\lambda-1)}{\Pi(-\lambda-1)} (x-l)^{\lambda-\sigma},$$

wo e und i die übliche, Π die Gaußsche Bedeutung haben.

Diktiert sind diese Konstantenbestimmungen (1) von der Rücksicht auf die sogleich zu entwickelnden Folgerungen 1.—4.

Nunmehr ist es leicht, unsere Ableitungen nach F-Reihen zu entwickeln: es ergeben sich leicht nach dem binomischen Lehrsatz mit Hilfe von (1):

Digitized by Google

(2) $$y_a^{(\varrho)} = \mathfrak{d}_x^{\varrho}(x-a)^{\alpha}(a-b+x-a)^{\beta}\Big|_a^x$$
$$= \frac{\Pi(\alpha)}{\Pi(\alpha-\varrho)}(x-a)^{\alpha-\varrho}(a-b)^{\beta}F\Big(\alpha+1,-\beta,\alpha+1-\varrho,\frac{x-a}{b-a}\Big)$$
$$\text{für } \Big|\frac{x-a}{b-a}\Big| < 1,$$

(3) $$y_x^{(\varrho)} = \mathfrak{d}_x^{\varrho}(x-a)^{\alpha+\beta}\Big(1+\frac{a-b}{x-a}\Big)^{\beta}\Big|_{\infty}^x$$
$$= e^{\pi i\varrho}\cdot\frac{\Pi(\varrho-\alpha-\beta-1)}{\Pi(-\alpha-\beta-1)}\cdot(x-a)^{\alpha+\beta-\varrho}F\Big(\varrho-\alpha-\beta,-\beta,-\alpha-\beta,\frac{b-a}{x-a}\Big)$$
$$\text{für } \Big|\frac{b-a}{x-a}\Big| < 1.$$

Aus diesen Entwicklungen gehen nun leicht vier Folgerungen hervor, welche die charakteristischen Eigenschaften der Ableitungen mit komplexem Zeiger darstellen:

Folgerung 1. Für $\varrho = n$ geht $y_a^{(\varrho)} = \mathfrak{d}_x^{\varrho} y\Big|_a^x$ über in $\frac{d^n y}{dx^n}$.

Folgerung 2. Für $\varrho = -n$ geht $y_a^{(\varrho)} = \mathfrak{d}_x^{\varrho} y\Big|_a^x$ über in das $n$fach iterierte Integral von y zwischen a und x, nämlich $\int_a^x\int_a^x\int_a^x\cdots y\,dx^n$, wenn dasselbe einen Sinn hat; $y_a^{(\varrho)}$ behält aber darüber hinaus noch Sinn.

Folgerung 3. Es gilt auch für komplexe Zeiger das Gesetz:
$y_a^{(\varrho)(\sigma)} = y_a^{(\varrho)(\sigma)} = y_a^{(\varrho+\sigma)}$, nach welchem die Reihenfolge der Ableitungsprozesse willkürlich ist.

Folgerung 4. Es gilt auch für komplexe Zeiger der Leibnizsche Satz von der Ableitung eines Produkts:
$$(uv)_a^{(\varrho)} = u_a^{(\varrho)}v + \varrho_1 u_a^{(\varrho-1)}v' + \varrho_2 u_a^{(\varrho-2)}v'' + \cdots.$$

Dieser Satz sagt ja in unserem Falle, wo $u = (x-a)^{\alpha}$, $v = (x-b)^{\beta}$ ist, nach (1) aus:
$$y_a^{(\varrho)} = \frac{\Pi(\alpha)}{\Pi(\alpha-\varrho)}(x-a)^{\alpha-\varrho}(x-b)^{\beta}\Big\{1+\frac{\varrho\cdot\beta}{1\cdot(\alpha+1-\varrho)}\cdot\frac{x-a}{x-b}$$
$$+\frac{\varrho(\varrho-1)\beta(\beta-1)}{1\cdot 2(\alpha+1-\varrho)(\alpha+2-\varrho)}\Big(\frac{x-a}{x-b}\Big)^2+\cdots\Big\}$$
$$= \frac{\Pi(\alpha)}{\Pi(\alpha-\varrho)}(x-a)^{\alpha-\varrho}(x-b)^{\beta}F\Big(-\varrho,-\beta,\alpha+1-\varrho,\frac{x-a}{x-b}\Big)$$
$$\text{für } \Big|\frac{x-a}{x-b}\Big| < 1.$$

Durch Vergleichung mit (2) zeigt sich, daß der Leibnizsche Satz in unserem Falle seinen einfachen Ausdruck findet in der 2. Eulerschen Relation, die in der üblichen Form lautet:
$$F(\alpha,\beta,\gamma,x) = (1-x)^{-\alpha}F\Big(\gamma-\alpha,\beta,\gamma,\frac{x}{x-1}\Big).$$

Digitized by Google

Dieselben vier charakteristischen Folgerungen gelten für $y_b^{(\varrho)} = \mathfrak{d}_x^{\varrho} y\Big|_b^x$ und auch für $y_\infty^{(\varrho)} = \mathfrak{d}_x^{\varrho}(x-a)^{\alpha+\beta}\left(1+\frac{a-b}{x-a}\right)^{\beta}\Big|_\infty^x$, nur daß hier die 2. Eulersche Relation ihren Ausdruck findet in dem Leibnizschen Satz, angewandt auf $\mathfrak{d}_\xi^{\varrho}\xi^{\varrho-\alpha-\beta-1}[1+(a-b)\xi]^{\beta}\Big|_0^\xi$ für $\xi = \frac{1}{x-a}$ — in Übereinstimmung mit einer Verallgemeinerung des Spitzer-Schlömilchschen Satzes:

$$\frac{d^n y}{\left(d\frac{1}{x}\right)^n} = (-1)^n x^{n+1}\frac{d^n(x^{n-1}y)}{dx^n}.$$

III.

Eine genauere Betrachtung der Differentialgleichung $(\mathfrak{y})$ zeigt nun:

1. sie bleibt unverändert, wenn man a mit b und α mit β vertauscht;

2. sie bleibt unverändert, wenn man ϱ, α, β ersetzt der Reihe nach durch $\varrho-\alpha-\beta-1$, $-\beta-1$, $-\alpha-1$;

3. wenn man ein beliebiges Integral Y_1 mit $(x-a)^{\alpha-\varrho}$ multipliziert, außerdem ϱ mit α vertauscht und β ersetzt durch $\alpha+\beta-\varrho$, so entsteht wieder ein Integral von $(\mathfrak{y})$;

4. wenn man ein beliebiges Integral Y_1 mit $(x-b)^{\beta-\varrho}$ multipliziert, außerdem ϱ mit β vertauscht und α ersetzt durch $\alpha+\beta-\varrho$, so entsteht ebenfalls eine Integral von $(\mathfrak{y})$.

Da nun der Gleichung $(\mathfrak{y})$ genügt wird durch

$$y_{a,b,\infty}^{(\varrho)} = \mathfrak{d}_x^{\varrho}(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\Big|_{a,b,\infty}^x = Y,$$

so ergeben sich folgende 4 Gruppen von je drei Integralen für $(\mathfrak{y})$:

1. $\mathfrak{d}_x^{\varrho}(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\Big|_{a,b,\infty}^x$,

2. $\mathfrak{d}_x^{\varrho-\alpha-\beta-1}(x-a)^{-\beta-1}(x-b)^{-\alpha-1}\Big|_{a,b,\infty}^x$,

3. $(x-a)^{\alpha-\varrho}\mathfrak{d}_x^{\alpha}(x-a)^{\varrho}(x-b)^{\alpha+\beta-\varrho}\Big|_{a,b,\infty}^x$,

4. $(x-b)^{\beta-\varrho}\mathfrak{d}_x^{\beta}(x-b)^{\varrho}(x-a)^{\alpha+\beta-\varrho}\Big|_{a,b,\infty}^x$.

Berücksichtigt man noch, daß jedes dieser 12 Integrale auch nach dem Leibnizschen Satz bez. der 2. Eulerschen Relation entwickelt werden kann, so erkennt man, daß die Gleichung $(\mathfrak{y})$ 24 Integrale besitzt, die sich in einfachster Weise durch Bruchableitungen ausdrücken lassen — entsprechend den 24 Kummerschen Integralen. Natürlich müssen auch die am Ende von I erwähnten Integrale η_a, η_b, η_∞, die zu den Exponenten 0, 0, $-\varrho-1$ gehören, unter diesen Gruppen enthalten sein:

3_a. $(x-a)^{\alpha-\varrho}\mathfrak{d}_x^{\alpha}(x-a)^{\alpha+\beta-\varrho}\Big|_a^x$ gehört offenbar zum Exponenten $\varrho-\alpha+\alpha-\varrho=0$, muß also nach dem Kummerschen Prinzip identisch sein mit η_a.

4_b. $(x-b)^{\beta-\varrho}\mathfrak{d}_x^{\beta}(x-b)^{\varrho}(x-a)^{\alpha+\beta-\varrho}\Big|_b^x$ gehört zum Exponenten $\varrho-\beta+\beta-\varrho=0$, muß also identisch sein mit η_b.

Digitized by Google

2_∞. $\mathfrak{d}_x^{\varrho-\alpha-\beta-1}(x-a)^{-\beta-1}(x-b)^{-\alpha-1}\Big|_\infty^x$ gehört als absteigender Ast zum Exponenten: $-\beta-1-\alpha-1-(\varrho-\alpha-\beta-1)=-\varrho-1$, muß also identisch sein mit η_∞.

Es ergeben sich somit durch Zusammenfassung für die Differentialgleichung $(\mathfrak{Y})$ folgende Integrale in Form von Bruchableitungen:

$$y_a^{(\varrho)} = \mathfrak{d}_x^{\varrho}(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\Big|_a^x \tag{1}$$

$$y_b^{(\varrho)} = \mathfrak{d}_x^{\varrho}(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\Big|_b^x \tag{2}$$

$$y_\infty^{(\varrho)} = \mathfrak{d}_x^{\varrho}(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\Big|_\infty^x. \tag{3}$$

$$\eta_a = (x-a)^{\alpha-\varrho}\mathfrak{d}_x^{\alpha}(x-a)^{\varrho}(x-b)^{\alpha+\beta-\varrho}\Big|_a^x \tag{4}$$

$$\eta_b = (x-b)^{\beta-\varrho}\mathfrak{d}_x^{\beta}(x-b)^{\varrho}(x-a)^{\alpha+\beta-\varrho}\Big|_b^x \tag{5}$$

$$\eta_\infty = \mathfrak{d}_x^{\varrho-\alpha-\beta-1}(x-a)^{-\beta-1}(x-b)^{-\alpha-1}\Big|_\infty^x. \tag{6}$$

Je zwei dieser Integrale bilden ein Fundamentalsystem, durch das sich ein beliebiges Integral von $(\mathfrak{Y})$ linear mit konstanten Koeffizienten ausdrücken läßt.

IV.

Somit erscheint als erwiesen: unsere Ableitung, aufgefaßt als Gesamtfunktion, die in die eben aufgezählten 6 Fundamentalzweige zerfällt — deß zum Zeichen sollen die unteren Grenzen weggelassen werden:

$$y^{(\varrho)} = \mathfrak{d}_x^{\varrho}(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\Big|^x$$

ist der Sache nach identisch mit der hypergeometrischen Funktion.

Nunmehr folgt durch Fuchssche Sätze:

Die Funktion:

$$(x-a)^{\gamma}(x-b)^{\delta}y^{(\varrho)} = (x-a)^{\gamma}(x-b)^{\delta}\mathfrak{d}_x^{\varrho}(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\varrho}\Big|^x$$

ist der Sache nach identisch mit der Riemannschen Funktion $P(a, b, \infty)$ und erfreut sich desselben Grades von Allgemeinheit. Und spezieller folgt weiter:

Die Funktion $(x-a)^{\frac{\varrho+1-\alpha}{2}}(x-b)^{\frac{\varrho+1-\beta}{2}}y^{(\varrho)}$ genügt der kanonischen Form der Gleichung $(\mathfrak{Y})$, bei welcher der Koeffizient von Y' verschwindet;

Die Funktion $(x-a)^{\varrho+1-\alpha}(x-b)^{\varrho+1-\beta}y^{(\varrho)}$ genügt der Adjungierten zu $(\mathfrak{Y})$.

Die innere Übereinstimmung zwischen der hypergeometrischen Funktion und unserer Bruchableitung reicht noch viel weiter: so entspricht namentlich dem großen Heer der Substitutionen, angewendet auf die Gaußsche Differentialgleichung $(\mathfrak{Y})$ — bei unserer Bruchableitung das Problem von der Veränderung der unabhängig Veränderlichen oder von der Ableitung einer Funktion

Digitized by Google

von einer Funktion — ein Problem, das schon Liouville[1]) in Angriff genommen hat, jedoch bei seiner Definition mit wenig Aussicht auf Erfolg.

Es ist begründete Aussicht vorhanden, daß die Lösung dieses Problems wird gefördert werden können durch den wunderbaren Aufschwung, den die Theorie der Differentialgleichungen namentlich seit den epochemachenden Fuchsschen Arbeiten genommen hat.

Schraubenlinien und Loxodromen.

Von E. Salkowski.

1. Die Loxodromen werden definiert als diejenigen Raumkurven, die die Ebenen eines Büschels unter gleichem Winkel ε schneiden. Wählt man die z-Achse als Achse des Ebenenbüschels, so werden alle Loxodromen, die zu dem Büschel gehören, durch die Mongesche Gleichung

$$(1) \qquad (x\,dy - y\,dx)^2 - \sin^2\varepsilon(x^2 + y^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2) = 0$$

bestimmt.[2]) Herr Scheffers hat nun gezeigt, daß die endlichen Gleichungen aller Loxodromen durch ausführbare Operationen gefunden werden können, daß also die allgemeine Integralkurve der Gleichung (1) sich ohne Quadraturen ergibt.[3]) Der Weg, auf dem Herr Scheffers dies Resultat gewann, scheint indessen beträchtliche rechnerische Schwierigkeiten zu bieten und jedenfalls bisher noch nicht zu brauchbaren Schlußformeln geführt zu haben. Eine andere Methode ergab sich für mich durch die Bemerkung, daß die Quadratur, die eine Schraubenlinie auf einer Rotationsfläche bestimmt, durch eine einfache Transformation in das Integral für die Loxodrome übergeführt werden kann. Da man nun die endlichen Gleichungen der Schraubenlinien kennt, gelingt es durch eine leichte Rechnung, die Gleichungen der allgemeinen Loxodrome in endlicher Form darzustellen. Der innere Grund für diesen Zusammenhang ist die Tatsache, daß sowohl Schraubenlinien als auch Loxodromen durch eine einfache Punkttransformation des Raumes aus den Minimalkurven hervorgehen. Diese Bemerkung gab mir den Anlaß, weitere Punkttransformationen der Minimalkurven zu untersuchen. Dabei ergab sich insbesondere die Lösung der Mongeschen Gleichung der sphärischen und pseudosphärischen Kurven in expliziter Form, Resultate, die dann auf bemerkenswerte Formeln in der Theorie der Kurven konstanter Krümmung und der Kurven konstanter Torsion führten.

---

1) Sur le changement de la variable indépendante dans le calcul des différentielles à indices quelconques. Journal de l'Éc. polytechnique cah. 24.

2) G. Scheffers. Encykl. der math. Wiss. III D 4. S. 248.

3) G. Scheffers. Über Loxodromen. Leipz. Ber. 1902. S. 363—370.

Digitized by Google

2. Die *Mongesche Gleichung der Minimalkurven*

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = 0 \tag{2}$$

wird durch die Gleichungen

$$\begin{cases} \xi = V' \cos v - V'' \sin v \\ \eta = V' \sin v + V'' \cos v \\ \zeta = i(V + V'') \end{cases} \tag{3}$$

gelöst. Hierin bedeutet V eine willkürliche Funktion des Parameters v. Diese Gleichungen seien im folgenden durchweg angewandt, da sie vor den sonst üblichen[1]) für unsere Zwecke gewisse Vorzüge besitzen.

Die *Schraubenlinien* sind durch die Gleichung

$$dx_1^2 + dy_1^2 - k^2 dz_1^2 = 0 \tag{4}$$

charakterisiert, sie gehen daher aus den Minimalkurven durch die Punkttransformation

$$x_1 = \xi, \quad y_1 = \eta, \quad z_1 = \frac{i}{k}\zeta \tag{5}$$

hervor.

Setzt man

$$\begin{cases} x = r \cos \vartheta \\ y = r \sin \vartheta \\ z = z, \end{cases} \tag{6}$$

Gleichungen, die man als Einführung von Zylinderkoordinaten an Stelle des rechtwinkligen Achsensystems interpretieren kann, oder auch als eine Punkttransformation des Raumes (x, y, z) in den Raum (r, ϑ, z), so wird die Gleichung (2) der Minimallinien in eine Mongesche Gleichung zwischen (ϱ, Θ, ζ) übergeführt:

$$d\varrho^2 + \varrho^2 d\Theta^2 + d\zeta^2 = 0, \tag{2a}$$

die sich mit Hilfe von (3) und (6) folgendermaßen löst:

$$\begin{cases} \varrho = \sqrt{V'^2 + V''^2} \\ \theta = \operatorname{arctg} \dfrac{V' \sin v + V'' \cos v}{V' \cos v - V'' \sin v} \\ \zeta = i(V + V''). \end{cases} \tag{3a}$$

Die Gleichung der Loxodromen (1) dagegen nimmt nach Division durch den nicht verschwindenden Faktor r^2 die Form an

$$dr^2 - \operatorname{ctg}^2 \varepsilon r^2 d\vartheta^2 + dz^2 = 0, \tag{1a}$$

1) Vgl. etwa G. Scheffers. Besondere transzendente Kurven. Encykl. der math. Wiss. III. D. 4. S. 254.

Digitized by Google

welche durch die Transformation

$$\begin{cases} r = \varrho \\ \vartheta = i \operatorname{ctg} \varepsilon \Theta \\ z = \zeta \end{cases} \tag{7}$$

in (2a) übergeht. Man übersieht, wie man mit Hilfe der Gleichungen (6), (3a) und (7) die rechtwinkligen Koordinaten der allgemeinen Loxodrome als Funktion des Parameters v darstellen kann. Führt man die einfache Rechnung durch und bringt alles durch passende Wahl des Parameters auf reelle Form, so erhält man als *Gleichungen der Loxodromen*

$$\begin{cases} x = r \cos \vartheta \\ y = r \sin \vartheta \\ z = U - U'', \end{cases} \tag{8}$$

wobei

$$\begin{cases} r = \sqrt{U'^2 - U''^2} \\ \vartheta = \operatorname{tg} \varepsilon \left(\frac{1}{2} \log \frac{U' + U''}{U' - U''} - u \right) \end{cases} \tag{8a}$$

zu setzen ist und U eine beliebige Funktion des Parameters u bedeutet.

Interpretiert man, um die gefundene Beziehung anschaulich aufzufassen, die Gleichungen (6) als die Einführung von Zylinderkoordinaten, so zeigen die Gleichungen (7), daß Loxodrome und zugehörige Minimallinie auf derselben Rotationsfläche

$$z^2 = f(r^2) \tag{9}$$

liegen, und zwar entsprechende Punkte auf demselben Parallelkreis, und daß die zugehörigen Winkel ϑ in einem konstanten rein imaginären Verhältnis zu einander stehen. Daraus ergibt sich eine einfache Konstruktion der Loxodromen einer Fläche aus ihren Minimalkurven. Faßt man dagegen die Gleichungen (5) mit (7) zusammen, so erhält man eine Beziehung der Schraubenlinien einer Rotationsfläche

$$f(r^2) + k^2 z^2 = 0$$

zu den Loxodromen der Fläche (9).

3. Eine zweite Punkttransformation des Raumes sei durch folgende Gleichungen definiert:

$$\begin{cases} x = r \sin \vartheta \cos \varphi \\ y = r \sin \vartheta \sin \varphi \\ z = r \cos \vartheta. \end{cases} \tag{10}$$

Die Gleichung der Minimalkurven des Raumes geht in die Form

$$d\varrho^2 + \varrho^2 d\Theta^2 + \varrho^2 \sin^2 \Theta d\Phi^2 = 0 \tag{2b}$$

Digitized by Google

über, die nach (3) und (10) durch die Formeln

$$\text{(3b)} \qquad \begin{cases} \varrho^2 = V'^2 + V''^2 - (V' + V'')^2 \\ \Theta = \operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{V'^2 + V''^2}}{i(V + V'')} \\ \Phi = \operatorname{arctg} \dfrac{V' \sin v + V'' \cos v}{V' \cos v - V'' \sin v} \end{cases}$$

gelöst wird. Nun ist das Linienelement einer Kugel vom Radius a

$$\text{(11)} \qquad ds^2 = a^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2).$$

Diese Gleichung geht aus (2b) durch die Transformation

$$ds = ai\frac{d\varrho}{\varrho}$$
$$\vartheta = \Theta$$
$$\Phi = \varphi$$

hervor. Aus den Formeln (3b) ergibt sich dann der Satz:

Die Beziehung zwischen Bogenlänge und Koordinaten einer sphärischen Kurve läßt sich in expliziter Form folgendermaßen darstellen:

$$\text{(12)} \quad x = k\frac{V' \cos v - V'' \sin v}{W}, \quad y = k\frac{V' \sin v + V'' \cos v}{W}, \quad z = ik\frac{V + V''}{W},$$
$$s = ki \log W,$$

wobei

$$W = \sqrt{V'^2 + V''^2 - (V + V'')^2}$$

gesetzt ist und V eine beliebige Funktion des Parameters bedeutet.

Die Form der Gleichung läßt es zweifelhaft, ob es algebraisch rektifizierbare Kurven auf der Kugel gibt; die Existenz solcher Kurven steht aber von vorn herein fest, da die algebraischen sphärischen Schraubenlinien zu ihnen gehören.

4. Die eben gefundenen Ergebnisse kann man nun auf die Kurven konstanter Krümmung anwenden. Die Richtungskosinus der Tangente seien a, b, c, die konstante Krümmung $\frac{1}{k}$, dann ist

$$\frac{1}{k^2}ds^2 = da^2 + db^2 + dc^2.$$

Diese Gleichung stimmt mit unseren Gleichungen (12) überein, wenn man

$$x = ka, \quad y = kb, \quad z = kc$$

setzt. Da die Richtungskosinus der Binormale und Hauptnormale sich durch Differentiationsprozesse aus denen der Tangente ergeben, so hat man den Satz:

Die Beziehungen zwischen der Bogenlänge und den Richtungskosinus des Fundamentaldreikants lassen sich für die Raum-

Digitized by Google

kurven konstanter Krümmung $\frac{1}{k}$ folgendermaßen explizit ausdrücken:

$$s = ki \log W$$

$$a = \frac{V' \cos v - V'' \sin v}{W}, \quad b = \frac{V' \sin v + V'' \cos v}{W}, \quad c = -i\frac{V + V''}{W}$$

$$a' = \cos v - \frac{V'}{V} \sin v, \quad b' = \sin v + \frac{V'}{V} \cos v. \quad c' = -i\frac{V'}{V}.$$

$$a'' = +\frac{i}{VW}\{(V^2 + VV'' - V'^2) \sin v + VV' \cos v\}$$

$$b'' = \frac{-i}{VW}\{(V^2 + VV'' - V'^2) \cos v - VV' \sin v\}$$

$$c'' = \frac{V'^2 - VV''}{VW}.$$

Ganz entsprechende Überlegungen gelten für die Kurven konstanter Torsion; für diese ist, wenn $\tau = \frac{1}{k}$ gesetzt ist, die Bestimmungsgleichung

$$ds^2 = k(da'^2 + db'^2 + dc'^2),$$

eine Gleichung, die erfüllt wird, wenn in den Gleichungen (12)

$$x = ka', \quad y = kb', \quad z = kc'$$

gesetzt wird. Daraus ergibt sich der dem vorigen analoge Satz:

Die Beziehungen zwischen der Bogenlänge und den Richtungskosinus des Fundamentaldreikants lassen sich für Raumkurven konstanter Torsion $\frac{1}{k}$ folgendermaßen explizit ausdrücken:

$$s = ki \log W$$

$$a = \cos v - \frac{V'}{V} \sin v, \quad b = \sin v + \frac{V'}{V} \cos v, \quad c = -i\frac{V'}{V}$$

$$a' = \frac{V' \cos v - V'' \sin v}{W}, \quad b' = \frac{V' \sin v + V'' \cos v}{W}, \quad c' = i\frac{V + V''}{W}$$

$$a'' = \frac{-i}{VW}\{(V^2 + VV'' - V'^2) \sin v + VV' \cos v\}$$

$$b'' = \frac{i}{VW}\{(V^2 + V'V'' - V'^2) \cos v - VV' \sin v\}$$

$$c'' = -\frac{V'^2 - VV''}{VW}.$$

Ein gleichartiges Formelsystem besteht für die Kurven, deren ganze Krümmung $\sqrt{x^2 + \tau^2} = \frac{1}{k}$ konstant ist.

Digitized by Google

Bemerkung zu dem Vortrage: Die Nullstellen der hypergeometrischen Funktion.

Von P. Schafheitlin.

Von Herrn M. Bôcher bin ich darauf aufmerksam gemacht worden, daß fast dieselbe Methode, die ich in Abschnitt 2 meines Vortrages gebraucht habe, schon von Herrn Porter in seiner Abhandlung: On the number of roots of the hypergeometric series between zero and one (American Math. Soc Bull. 3, 274—278, 1897) bereits benutzt worden ist; die in den anderen Abschnitten enthaltenen Resultate werden davon nicht berührt.

Digitized by Google

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

Herausgegeben vom Vorstande der Gesellschaft.

63. Sitzung am 24. Juni 1908.

Vorsitzender: Herr Schafheitlin.

Anwesend: 22 Herren.

Herr Rothe ist infolge seiner Berufung nach Clausthal aus der Revisionskommission ausgeschieden. An seine Stelle wird Herr Emde gewählt, so daß sich nunmehr die Revisionskommission aus den Herren Güntsche und Emde zusammensetzt.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Witt: Über Näherungsdarstellung von Funktionen.

Herr Lewent: Über einige Ungleichungen (s. u.).

Herr Wallenberg: Bemerkung zu meinem Vortrage in der Sitzung am 26. Februar 1908 (s. u.).

Über das Auflösungsproblem im logischen Klassenkalkul.

Von Leopold Löwenheim.

Einleitung. — Mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnen wir irgendwelche Klassen (Mengen) von Dingen oder Elementen, die einem bestimmten „Denkbereich" angehören, innerhalb dessen sich alle unsere Betrachtungen bewegen. Die Klasse $\bar{a}$, das „Negat" von a, ist die Klasse der Dinge, die nicht in a vorkommen. 0 bezeichnet die „leere Klasse", die gar kein Ding enthält, 1 den ganzen Denkbereich. Das „identische Produkt" $a \cdot b$ oder ab ist die Klasse der Dinge, die a und b gemeinsam sind, die „identische Summe" $a + b$ entsteht durch Vereinigung von a und b zu einer einzigen Klasse. Die „Subsumption" $a \nleftarrow b$ bedeutet: Die Klasse a ist in der Klasse b enthalten.

Man kann sich leicht an Beispielen folgende Tatsachen plausibel machen[1]): Für die identischen Operationen gilt das kommutative, assoziative und distri-

1) Eine axiomatische Begründung aller dieser Tatsachen findet man in den „Vorlesungen über die Algebra der Logik" von Dr. Ernst Schröder, Band I, sowie in der Programmabh. des Gymnasiums in Tauberbischofsheim 1899/1900: „Über die Algebra der Logik. Die Grundlagen des Gebietekalkuls" von Dr. Eugen Müller.

Digitized by Google

butive Gesetz und somit sämtliche Formeln der gewöhnlichen Algebra. Ferner ist:

$$(1) \qquad aa = a + a = a, \qquad a\bar{a} = 0, \qquad a + \bar{a} = 1.$$

$$(2) \qquad \overline{ab} = \bar{a} + \bar{b}, \qquad \overline{a + b} = \bar{a}\bar{b}.$$

Durch Ausmultiplizieren von $(x + \bar{x})(y + \bar{y})$ folgt wegen 1)

$$(3) \qquad xy + x\bar{y} + \bar{x}y + \bar{x}\bar{y} = 1,$$

und eine entsprechende Formel gilt für drei und mehr Buchstaben.

Jedes System simultaner Gleichungen und Subsumptionen ist äquivalent einer einzigen Gleichung mit der rechten Seite 0, denn 1) ist jede Gleichung $a = b$ äquivalent 2 simultanen Subsumptionen $a \leqq b$ und $b \leqq a$, 2) ist jede Subsumption $a \leqq b$ äquivalent einer auf 0 gebrachten Gleichung $a\bar{b} = 0$, und 3) ist jedes System auf 0 gebrachter Gleichungen $a = 0$, $b = 0$, $c = 0 \ldots$ äquivalent einer einzigen solchen Gleichung $a + b + c \cdots = 0$.

1. Wir betrachten eine nur aus identischer Addition, identischer Multiplikation und Negation gebildete Funktion der Argumente $x_1, x_2, \ldots x_\mu, \ldots$ und bezeichnen sie kurz mit $F(x_\mu)$. Dann ist

$$(4) \qquad F(a_\mu x + a'_\mu \bar{x}) = F(a_\mu)x + F(a'_\mu)\bar{x}.$$

Allgemeiner: Bezeichnen wir eine Funktion von 2 Reihen von Argumenten

$$x_1, x_2, \ldots x_\mu, \ldots,$$
$$y_1, y_2, \ldots, y_\nu, \ldots,$$

deren Anzahl nicht gleich zu sein braucht, kurz mit $F(x_\mu \mid y_\nu)$, so ist

$$(4\,a) \qquad \begin{aligned} F(a_\mu x + a'_\mu \bar{x} \mid b_\nu y + b'_\nu \bar{y}) &= F(a_\mu \mid b_\nu)xy + F(a_\mu \mid b'_\nu)x\bar{y} \\ &+ F(a'_\mu \mid b_\nu)\bar{x}y + F(a'_\mu \mid b'_\nu)\bar{x}\bar{y}), \end{aligned}$$

entsprechend für drei und mehr Reihen von Argumenten.

Wesentlich ist, daß die a_μ, a'_μ, b_ν, b'_ν auch Ausdrücke sein dürfen, welche x und y enthalten.

Beweis: Eine logische Formel wie (4 a) bedeutet eine allgemeine Aussage über die Elemente des Denkbereichs und ist dann und nur dann richtig, wenn sie für jedes einzelne Element des Denkbereichs richtig ist, d. h. wenn sie richtig ist, falls ich den Denkbereich auf ein beliebiges Element beschränke. In diesem beschränkten Denkbereich hat nun jede Klasse den Wert 0 oder 1, je nachdem sie das Element, das den ganzen Denkbereich 1 ausmachen soll, enthält oder nicht. Zufolge (3) können nun die vier Klassen xy, $x\bar{y}$, $\bar{x}y$, $\bar{x}\bar{y}$ nicht alle $= 0$ sein. Sei also z. B. $x\bar{y} = 1$ in dem beschränkten Denkbereich; der Beweis für die übrigen drei Fälle kann als ganz analog wegbleiben. Es folgt $x = 1$, $\bar{y} = 1$, also $\bar{x} = 0$, $y = 0$, und damit reduziert sich (4 a) auf $F(a_\mu \mid b'_\nu) = F(a_\mu \mid b'_\nu)$. Somit ist (4 a) bewiesen.

Man kann die Formel bei einiger Vertrautheit mit dem Klassenkalkul auch unschwer ohne Zurückgehen auf die Elemente rein rechnerisch verifizieren. Sie ist in dieser Allgemeinheit meines Wissens noch nicht veröffentlicht worden;

Digitized by Google

Herrn Zermelo ist sie, wie ich kürzlich von ihm erfuhr, längst bekannt. Mehrere Spezialfälle sind häufig benutzt worden, z. B. (für $a_\mu = b_\nu = 1$, $a'_\mu = b'_\nu = 0$) die Entwickelungsformel

$$F(x,y) = F(1,1)\,xy + F(1,0)\,x\bar{y} + F(0,1)\,\bar{x}y + F(0,0)\,\bar{x}\bar{y},$$

nach der sich jede beliebige Funktion von x und y in der homogenen Form $axy + bx\bar{y} + c\bar{x}y + d\bar{x}\bar{y}$ darstellen läßt, so daß (zufolge der Schlußbemerkung in der Einleitung) unter (3) das allgemeine Auflösungsproblem enthalten ist.

2. $a_1, a_2, \ldots a_\mu, \ldots$ sei eine partikuläre Lösung der Gleichung $F(x_\mu) = 0$. Dann ist

$$x_\mu = a_\mu F(u_\mu) + u_\mu \overline{F(u_\mu)} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots) \tag{5}$$

die allgemeine Lösung, d. h.

a) (5) ist eine Lösung für beliebige Werte der „arbiträren Parameter" $u_1, u_2, \ldots u_\mu, \ldots$

Beweis: Setzt man (5) in $F(x_\mu)$ ein, so wird wegen (4)

$$F(x_\mu) = F(a_\mu) F(u_\mu) + F(u_\mu) \overline{F(u_\mu)}.$$

Das erste Glied verschwindet, weil nach Vor. $F(a_\mu) = 0$ ist, und das zweite Glied wegen (1). Somit ist $F(x_\mu) = 0$. q. e. d.

b) (5) ist fähig, jede beliebige Lösung von $F(x_\mu) = 0$ darzustellen, d. h. ist eine bestimmte Lösung $x_1, x_2, \ldots x_\mu \ldots$ gegeben, so kann man bestimmte Werte von $u_1, u_2, \ldots, u_\mu \ldots$ angeben, für die die rechten Seiten von (5) gleich den gegebenen x_μ werden. Wir behaupten:

$$u_\mu = x_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots)$$

ist ein solches Wertsystem, d. h. $x_\mu = a_\mu F(x_\mu) + x_\mu \overline{F(x_\mu)}$ für jede Lösung.

Beweis: Nach Vor. ist $F(x_\mu) = 0$, folglich $\overline{F(x_\mu)} = 1$, und damit wird die zu beweisende Gleichung $x_\mu = a_\mu \cdot 0 + x_\mu \cdot 1$, was offenbar richtig ist.

Übrigens läßt sich Schröders „rigorose Lösung" des allgemeinen Auflösungsproblems in der Algebra der Relative[1]) leicht als Spezialfall aus (5) herleiten und, was von Interesse sein dürfte, dahin verallgemeinern, daß, falls $F(a_\mu) = 0$ ist,

$$x_\mu = a_\mu \cdot 1;\ F(u_\mu);\ 1 + u_\mu \cdot 0 \neq \overline{F(u_\mu)} \neq 0$$

die allgemeine Lösung der Gleichung $F(x_\mu) = 0$ ist. Man kann dies auch genau so beweisen, wie es Schröder für eine Unbekannte tut.

3. Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Auflösbarkeit einer Gleichung

$$F(x,y) = axy + bx\bar{y} + c\bar{x}y + d\bar{x}\bar{y} = 0$$

ist das Erfülltsein der „Eliminationsresultante"

$$abcd = 0 \tag{6}$$

1) Vgl. Schröder, a. a. O., Band III, S. 165.

Digitized by Google

oder (vgl. Schlußbemerkung von 1)

$$F(1,1)\,F(1,0)\,F(0,1)\,F(0,0) = 0, \tag{6a}$$

entsprechend für mehr Variable.

Die Notwendigkeit der Bedingung beweist Schröder durch Multiplikation der gegebenen Gleichung mit $abcd$, wobei (wegen $a \cdot abcd = abcd$ usw.) jeder Koeffizient gleich $abcd$ und die Gleichung

$$abcd(xy + x\bar{y} + \bar{x}y + \bar{x}\bar{y}) = 0$$

wird, also wegen (3) $abcd = 0$, q. e. d.

Daß (6) hinreichend ist, hat man bis jetzt nur durch den Schluß von n Unbekannten auf $n+1$ Unbekannte bewiesen, ohne daß für mehr als zwei Unbekannte Lösungen wirklich aufgestellt wären. Beiden Übelständen hilft folgender Beweis ab:

Sei z. B. (für drei Unbekannte) die vorgelegte Gleichung

$$axyz + bxy\bar{z} + cx\bar{y}z + dx\bar{y}\bar{z} + e\bar{x}yz + f\bar{x}y\bar{z} + g\bar{x}\bar{y}z + h\bar{x}\bar{y}\bar{z} = 0.$$

Wir greifen irgend ein Glied heraus, z, B. $bxy\bar{z}$, und setzen für die Negate der drei unbekannten Faktoren:

$$\bar{x} = b\bar{x}', \qquad \bar{y} = b\bar{y}', \qquad z = bz',$$

also wegen (2)

$$x = \bar{b} + x', \qquad y = \bar{b} + y', \qquad \bar{z} = \bar{b} + \bar{z}'.$$

Nach dem Einsetzen besitzt jedes Glied den Faktor b. (Denn das herausgegriffene Glied besaß ihn schon vorher, und die übrigen Glieder können nicht genau dieselben unbekannten Faktoren x, y, $\bar{z}$ enthalten, sondern müssen eins von deren Negaten $\bar{x}$, $\bar{y}$ und z als Faktor enthalten, und dieser Faktor bringt bei der Substitution den Faktor b hinzu.)

Man kann also b vor die Klammer ziehen. In der Klammer steht dann, wie man leicht nachrechnet:

$$ax'y'z' + x'y'\bar{z}' + cx'\bar{y}'z' + dx'\bar{y}'\bar{z}' + e\bar{x}'y'z' + f\bar{x}'y'\bar{z}' + g\bar{x}'\bar{y}'z' + h\bar{x}'\bar{y}'\bar{z}'.$$

Wir konstruieren jetzt nach derselben Methode eine Substitution, nach deren Ausführung sich ein zweiter Koeffizient vor die Klammer ziehen läßt, und fahren so fort, bis das Produkt sämtlicher Koeffizienten vor der Klammer steht. Dies Produkt ist aber nach Vor. gleich 0, folglich ist die Gleichung jetzt für beliebige Werte der zuletzt eingeführten Unbekannten erfüllt, und um die zugehörigen Werte von x, y und z zu erhalten, braucht man nur die acht Substitutionen zu einer einzigen zusammenzusetzen. Damit ist der Beweis geführt.

Das Ergebnis hängt ab von der Reihenfolge, in der die einzelnen Koeffizienten vor die Klammer gebracht werden. Zur Erläuterung des Bildungsgesetzes will ich es für vier Unbekannte x, y, z, u hinschreiben. Ordne ich wieder die Glieder mit x vor die mit $\bar{x}$, in jeder der beiden Gruppen die Glieder mit y vor die mit $\bar{y}$ usw., so seien die Koeffizienten in der allgemeinen Gleichung

$$a,\ b,\ c,\ \ldots\ldots\ q.$$

Digitized by Google

Bringt man erst a vor die Klammer, dann b usw., so erhält man folgende Lösungen:

$$x = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d} + \bar{e} + \bar{f} + \bar{g} + \bar{h} + iklmnopq \cdot \xi,$$
$$y = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d} + efgh\,(\bar{i} + \bar{k} + \bar{l} + \bar{m} + nopq \cdot \eta),$$
$$z = \bar{a} + \bar{b} + cd\,(\bar{e} + \bar{f} + gh\,(\bar{i} + \bar{k} + lm\,(\bar{n} + \bar{o} + pq \cdot \zeta))),$$
$$u = \bar{a} + b\,(\bar{c} + d\,(\bar{e} + f\,(\bar{g} + h\,(\bar{i} + k\,(\bar{l} + m\,(\bar{n} + o\,(\bar{p} + q \cdot \vartheta)))))),$$

wo man für ξ, η, ϑ, ζ beliebige Werte, z. B. 0 oder 1, setzen darf.

4. Für die Anwendungen des Kalkuls ist es vielfach von Wichtigkeit, für symmetrische Gleichungen (z. B. $x_1x_2x_3 = 0$) auch symmetrische allgemeine Lösungen (für unsern Fall

$$x_1 = u_1\,(\bar{u}_2 + \bar{u}_3), \qquad x_2 = u_2\,(\bar{u}_3 + \bar{u}_1), \qquad x_3 = \bar{u}_3\,(u_1 + \bar{u}_2),$$

wie aus der Partikularlösung (0, 0, 0) vermöge (5) hervorgeht) zu gewinnen, d. h. Lösungen, welche durch Vertauschung der arbiträren Parameter u_μ ineinander übergehen. Schröder hat nun für viele spezielle symmetrische Gleichungen die allgemeinen symmetrischen Lösungen durch Kunstgriffe gewonnen und mit großem Aufwand von Rechnung den höchst leicht beweisbaren Satz hergeleitet, daß die Gleichung $xyz + \bar{x}\bar{y}\bar{z} = 0$ sich nicht mit drei Parametern symmetrisch allgemein lösen läßt. Er hätte sich die Mühe sparen können, wenn er gewußt hätte, daß man sich nur um partikuläre symmetrische Lösungen zu kümmern braucht; (5) gibt dann sofort die allgemeine Lösung, und zwar wieder in symmetrischer Form, und umgekehrt kann man aus jeder symmetrischen Lösung mit arbiträren Parametern sofort eine symmetrische Partikularlösung erhalten, indem man einfach die sämtlichen Parameter = 0 setzt.

Es handelt sich also um die Frage: Wie sieht eine partikuläre symmetrische Lösung aus? Ist z. B. für zwei Unbekannte $x_1 = A$, $x_2 = B$ eine solche, so dürfen A und B keine arbiträren Parameter enthalten, sondern müssen sich aus den Parametern der Gleichung in symmetrischer Weise zusammensetzen (also z. B. $A = a_1\,(a_2 + r) + b_1$, $B = a_2\,(a_1 + r) + b_2$), so daß die Werte der Unbekannten durch eine Vertauschung der Parameter der Gleichung ineinander übergehen.

Wir beschränken nun unsere Betrachtung auf den speziellen Fall, daß solche symmetrisch auftretenden Parameter in der Gleichung nicht vorkommen, oder daß es wenigstens nicht erlaubt sein soll, sie in der Lösung als gleichberechtigt und vertauschbar zu betrachten.[1]) Da dann keine Vertauschungen mehr möglich sind, so verlangt der Begriff der Symmetrie, daß auch ohne das alle Werte der Unbekannten einander gleich sind.

Es bleibt also nur noch die Frage: Wann läßt sich (z. B. für zwei Gruppen von Unbekannten, die unter sich symmetrisch in der Gleichung auftreten) eine Gleichung $F(x_\mu|y_\nu) = 0$ so lösen, daß alle x gleich einem bestimmten Werte ξ und alle y gleich einem bestimmten Werte η werden? Oder: Wann

1) Auch in dem allgemeinen Falle vermag ich von jeder vorgelegten symmetrischen Gleichung entweder symmetrische Lösungen aufzustellen, oder zu beweisen, daß dies unmöglich ist. Ich gedenke bei anderer Gelegenheit darauf zurückzukommen.

Digitized by Google

läßt sich die Gleichung $F(\xi|\eta) = 0$ lösen, die dadurch entsteht, daß man in $F(x_\mu|y_\nu)$ einsetzt $x_\mu = \xi$, $y_\nu = \eta$ $(\mu = 1,2, \ldots, \nu = 1,2, \ldots)$? Nach (6a) ist notwendige und hinreichende Bedingung hierfür

$$F(1|1)\,F(1|0)\,F(0|1)\,F(0|0) = 0.$$

Entwickelt man nun $F(x_\mu|y_\nu)$ nach allen x_μ und y_ν (vgl. Schlußbemerkung von **1**), so ist

$F(1|1)$ der Koeffizient des Gliedes, das alle x_μ und y_ν enthält,
$F(1|0)$ „ „ „ „ „ „ x_μ „ $\bar{y}_\nu$ „
$F(0|1)$ „ „ „ „ „ „ $\bar{x}_\mu$ „ y_ν „
$F(0|0)$ „ „ „ „ „ „ $\bar{x}_\mu$ „ $\bar{y}_\nu$ „

Wir haben also für unseren engeren Begriff der Symmetrie den Satz:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß sich eine symmetrische Gleichung

$$F(x_\mu|y_\nu) = A\prod_{\mu,\nu} x_\mu y_\nu + B\prod_{\mu,\nu} x_\mu \bar{y}_\nu + C\prod_{\mu,\nu} \bar{x}_\mu y_\nu + D\prod_{\mu,\nu} \bar{x}_\mu \bar{y}_\nu + \text{andere Glieder} = 0$$

symmetrisch (und damit auch nach (5) symmetrisch allgemein) lösen läßt, ist

$$ABCD = 0.$$

Für eine einzige Gruppe von Unbekannten besteht also die Bedingung darin, daß das Produkt der Koeffizienten von $\prod_\mu x_\mu$ und $\prod_\mu \bar{x}_\mu$ verschwindet.

Demnach läßt sich z. B. die Gleichung

$$x_1 x_2 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 = 0$$

nicht symmetrisch lösen, und Schröders Lösung[1])

$$x_1 = a, \qquad x_2 = \bar{a}$$

ist nicht, wie er meint, symmetrisch, da $\bar{a}$ ein (wenn auch wenig) komplizierterer Ausdruck ist als a. Zwar geht $\bar{a}$ aus a ebenso hervor wie a aus $\bar{a}$, doch ist dies kein Zeichen von Symmetrie, sondern einfach selbstverständlich für jede (auch unsymmetrische) allgemeine Lösung einer symmetrischen Gleichung. Wenn ich z. B. die symmetrische Gleichung $xy = 0$ unsymmetrisch allgemein löse durch $x = a$, $y = \bar{a}b$, so erhalte ich $\bar{a}b$ aus a, indem ich dessen Negat $\bar{a}$ mit einem beliebigen Faktor b multipliziere; ebenso aber erhalte ich a aus $\bar{a}b$, indem ich dessen Negat $a + \bar{b}$ mit einem Faktor $a + b$ multipliziere, der eine beliebige Klasse darstellen kann, so lange mir nur $\bar{a}b$ und nicht a und b gegeben ist. Was hier verlangt wird, ist formale Symmetrie, und diese fehlt bei der Lösung $x_1 = a$, $x_2 = \bar{a}$.

1) Vgl. Schröder, a. a. O., Band I, S. 506.

Digitized by Google

Über einige Ungleichungen.

Von L. Lewent.

Die physikalischen Betrachtungen des ersten Abschnittes führen zu einer Ungleichung, die in allgemeinerer Form kürzlich wieder bekannt geworden ist. An letztere knüpfen sich im zweiten Teil die mathematischen Folgerungen.

1. Es seien n Hohlräume mit absolut spiegelnden Wänden ausgestattet und gleichmäßig mit schwarzer Strahlung erfüllt. V_ν sei das Volumen des ν^{ten} Raumes, T_ν die Temperatur, U_ν und S_ν die Energie und Entropie der in dem Raum enthaltenen Strahlung. Nach bekannten Gesetzen ist

$$U_\nu = aV_\nu T_\nu^4; \quad S_\nu = \tfrac{4}{3} aV_\nu T_\nu^3.$$
$$(\nu = 1, 2, \cdots n).$$

Die Konstante a ist experimentell bestimmbar.

Werden (unter den nötigen Vorsichtsmaßregeln) zwischen den n Hohlräumen Verbindungen von hinreichend kleinen Dimensionen hergestellt, so wird ein Ausgleichsprozeß eingeleitet, der sein Ende findet, wenn das Gesamtvolumen

$$V = \sum_\nu V_\nu$$

wieder von gleichmäßig verteilter Strahlung erfüllt ist. Der erste Hauptsatz der Thermodynamik besagt, daß die Energie des neuen Systems U gleich der Summe der Energien der n Räume ist, und die Gleichung

$$U = \sum_\nu U_\nu$$

ergibt für die Temperatur T der stationären Strahlung die Bestimmungsgleichung:

$$T^4 = \frac{\sum_\nu V_\nu T_\nu^4}{\sum_\nu V_\nu}. \tag{1}$$

Nach dem zweiten Hauptsatz ist die Entropie S im Endzustand nicht kleiner als im Anfangszustand:

$$\sum_\nu S_\nu \gtreqless S$$

oder

$$\sum_\nu V_\nu T_\nu^3 \gtreqless \sum V_\nu \cdot T^3$$

oder mit Rücksicht auf (1):

$$(\sum_\nu V_\nu T_\nu^3)^4 \gtreqless \sum_\nu V_\nu \cdot (\sum_\nu V_\nu T_\nu^4)^3. \tag{2}$$

Digitized by Google

Die Ungleichung hat zur alleinigen Voraussetzung, daß die vorkommenden Größen V_ν und T_ν — wie es ihrer physikalischen Bedeutung entspricht — positiv sind. Mathematisch steht der Annahme, daß die Zahl n unendlich groß wird, nichts im Wege; nur muß dann die Konvergenz der Reihen sichergestellt sein.

Die Irreversibilität des Prozesses hat Herr Planck für den Fall zweier Hohlräume in seinem Buch[1]): Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung, S. 66—67 bestätigt, allerdings unter der speziellen Annahme, daß der zweite Hohlraum „völlig evakuiert" ist, d. h. die absolute Temperatur 0^0 besitzt.

Ersetzt man V_ν durch a_ν und T_ν^3 durch x_ν, so geht (2) über in

$$(3) \qquad (\Sigma a_\nu x_\nu)^{\frac{4}{3}} \gtrless (\Sigma a_\nu)^{\frac{1}{3}} \Sigma a_\nu x_\nu^{\frac{4}{3}}.$$

Diese Relation ist ein Spezialfall der wichtigen Ungleichung, zu der Herr Jensen[2]) in seiner Arbeit über konvexe Funktionen gelangt ist:

$$(4) \qquad (\Sigma a_\nu x_\nu)^p \gtrless (\Sigma a_\nu)^{p-1} \cdot \Sigma a_\nu x_\nu^p.$$

Es liegt nahe, zu untersuchen, ob die allgemeinere Ungleichung durch zulässige Verallgemeinerung des Entropiebegriffs gewonnen werden kann. In der Tat brauchte man den Maxwellschen Strahlungsdruck nur gleich $u\,(p-1)$ und die Energiedichte $u = \frac{U}{V}$, demnach gleich $a \cdot T^{\frac{p}{p-1}}$ anzunehmen, um den zweiten Hauptsatz in der Gestalt (4) zu erhalten. Die Maxwellsche Theorie liefert aber für den Strahlungsdruck den Wert $\frac{u}{3}$, und nach dem Stefan-Boltzmannschen Gesetz ist die Energiedichte der vierten Potenz der absoluten Temperatur proportional. Die beiden Ergebnisse der Theorie sind überdies durch das Experiment bestätigt. Daher führt der physikalische Vorgang nicht über die Ungleichung (3) hinaus.

2. Die Wichtigkeit der Ungleichung (4) ist durch Herrn Jensen zur Genüge dargetan worden. Trotzdem seien einige kleine Beiträge gestattet.

Ersetzt man in (4) a_ν und x_ν durch $a_\nu x_\nu^p$ und $\frac{1}{x_\nu}$, so erhält man:

$$(\Sigma a_\nu x_\nu^{p-1})^p \leqq (\Sigma a_\nu x_\nu^p)^{p-1} \cdot \Sigma a_\nu.$$

Nach Multiplikation mit (4) läßt sich die p^{te} Wurzel ziehen:

$$(5) \qquad \Sigma a_\nu x_\nu \cdot \Sigma a_\nu x_\nu^{p-1} \leqq \Sigma a_\nu \cdot \Sigma a_\nu x_\nu^p.$$

Diese Ungleichung gilt bei positiven a_ν und x_ν für $p \geqq 1$. Da (4) auch für

1) M. Planck, Leipzig 1906.

2) J. L. W. V. Jensen, Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes. Acta Math. Bd. 30. S. 181 (6).

Digitized by Google

$p < 0$ gilt, dagegen in (4) das Zeichen $<$ in $>$ zu verwandeln ist, wenn p ein positiver echter Bruch ist, so wird

$$(5') \qquad \sum_\nu a_\nu x_\nu \cdot \sum_\nu a_\nu x_\nu^{p-1} \geqq \sum_\nu a_\nu \cdot \sum_\nu a_\nu x_\nu^p$$

$$\text{für } -\infty < p < 1 .$$

Die Bedeutung der Relationen (5) und (5') liegt darin, daß keine der vorkommenden Summen mehr potenziert wird. Sie lassen auch erkennen, daß die Funktion

$$f(p) = \frac{\sum a_\nu x_\nu^p}{\sum a_\nu x_\nu^{p-1}}$$

kleiner oder größer als $\frac{\sum a_\nu x_\nu}{\sum a_\nu}$ ist, je nachdem $p < 1$ oder $p > 1$ ist. Es besteht sogar der Satz:

Die Funktion $f(p)$ nimmt ab, wenn p abnimmt.

Beweis: a) $p > 1$.

Für positive Zahlen α ist:

$$f(p+\alpha) = \frac{\sum a_\nu x_\nu^{p+\alpha}}{\sum a_\nu x_\nu^{p+\alpha-1}} = \frac{\sum\left[\left(a_\nu x_\nu^{p-1}\right) \cdot x_\nu^{\alpha+1}\right]}{\sum\left[\left(a_\nu x_\nu^{p-1}\right) \cdot x_\nu^{\alpha}\right]}$$

$$> \frac{\sum a_\nu x_\nu^p}{\sum a_\nu x_\nu^{p-1}} \text{ nach (5), also:}$$

$$f(p+\alpha) > f(p).$$

b) $p < 1$.

$$f(p-\alpha) = \frac{\sum a_\nu x_\nu^{p-\alpha}}{\sum a_\nu x_\nu^{p-\alpha-1}} = \frac{\sum\left[\left(a_\nu x_\nu^{p-1}\right) \cdot x_\nu^{1-\alpha}\right]}{\sum\left[\left(a_\nu x_\nu^{p-1}\right) \cdot x_\nu^{-\alpha}\right]}$$

$$< \frac{\sum a_\nu x_\nu^p}{\sum a_\nu x_\nu^{p-1}} \text{ nach (5'), also:}$$

$$f(p-\alpha) < f(p).$$

Ebenso ist die Funktion[1])

$$J(p) = \frac{\int_0^1 a(x)\left(f(x)\right)^p dx}{\int_0^1 a(x)\left(f(x)\right)^{p-1} dx}$$

eine mit p wachsende Funktion. Im Integrationsintervall sind $a(x)$ und $f(x)$ als positiv, die Integrale als existierend anzunehmen.

---

1) Vgl. dazu Jensen l. c., S. 186.

Digitized by Google

Versteht man unter s und t positive Zahlen, so ergibt sich aus (5) für

$$a_\nu = \frac{1}{\nu^{1+s}}, \quad x_\nu = \frac{1}{\nu^t} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots \infty):$$

$$\zeta(1+s+t)\cdot\zeta(1+s+(p-1)t) < \zeta(1+s)\cdot\zeta(1+s+pt).$$

Für hinreichend kleine t folgt aus der Taylorschen Reihenentwicklung beider Seiten:

$$\zeta(1+s)\zeta''(1+s) > \zeta'^2(1+s).$$

Weiter werde

$$x_\nu = x + y_\nu$$

eingeführt, nachdem man zur Erhöhung der Symmetrie

p durch $\frac{r+s}{s}$, x_ν durch x_ν^r, also (5) durch

$$\Sigma a_\nu x_\nu^r \cdot \Sigma a_\nu x_\nu^s \leqq \Sigma a_\nu \cdot \Sigma a_\nu x_\nu^{r+s} \tag{6}$$

ersetzt hat. Es ist

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu x_\nu^r = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu (x+y_\nu)^r = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \sum_{\lambda=0}^{r} \binom{r}{\lambda} x^{r-\lambda}\cdot y^\lambda$$

$$= x^r \cdot \sum_{\lambda=0}^{r} \binom{r}{\lambda} x^{-\lambda} f_\lambda(n), \quad \text{wenn}$$

$$f_\lambda(n) = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu y_\nu^\lambda$$

gesetzt wird. Die Ungleichung (6) nimmt die Gestalt an:

$$\sum_{\lambda=0}^{r} \binom{r}{\lambda} \frac{f_\lambda(n)}{x^\lambda} \cdot \sum_{\mu=0}^{s} \binom{s}{\mu} \frac{f_\mu(n)}{x^\mu} \leqq f_0(n) \cdot \sum_{\nu=0}^{r+s} \binom{r+s}{\nu} \frac{f_\nu(n)}{x^\nu}. \tag{7}$$

Speziell sei

$$a_\nu = 1, \quad y_\nu = \frac{\nu}{n} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$

Dann wird

$$f_\lambda(n) = \frac{1}{n^\lambda} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^\lambda = \frac{n}{\lambda+1} + \Theta_\lambda(n),$$

wobei die $\Theta_\lambda(n)$ Größen sind, die endlich bleiben für $\lim n = \infty$. Für hinreichend große n lehrt die letzte Ungleichung:

$$\sum_{\lambda=0}^{r} \binom{r}{\lambda} \frac{x^{-\lambda}}{\lambda+1} \cdot \sum_{\mu=0}^{s} \binom{s}{\mu} \frac{x^{-\mu}}{\mu+1} < \sum_{\nu=0}^{r+s} \binom{r+s}{\nu} \frac{x^{-\nu}}{\nu+1}$$

Digitized by Google

oder

$$(8)\qquad \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{r+1}-1}{r+1}\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{s+1}-1}{s+1}<\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{r+s+1}-1}{r+s+1}\cdot\frac{1}{x}.$$

Läßt man x, r und s über jedes Maß hinaus wachsen, aber so, daß

$$\lim\frac{r}{x}=\lambda,\quad \lim\frac{s}{x}=\mu$$

wird, so erhält man

$$(9)\qquad \frac{e^{\lambda}-1}{\lambda}\cdot\frac{e^{\mu}-1}{\mu}<\frac{e^{\lambda+\mu}-1}{\lambda+\mu}.\qquad (\lambda>0,\ \mu>0).$$

Die Funktion $\frac{e^x-1}{x}$ genügt daher der funktionalen Ungleichung

$$f(x)f(y)<f(x+y)$$

für positive Werte der Argumente.

Setzt man in (5) der Reihe nach $p=1, 2, 3, \ldots$, multipliziert man die Ungleichungen dann mit den positiven Zahlen $A_1, A_2, A_3, \ldots$, so ergibt die Addition:

$$(10)\qquad \Sigma a_\nu x_\nu\cdot\Sigma a_\nu(\Sigma A_p x_\nu^{p-1})\leqq\Sigma a_\nu\cdot\Sigma a_\nu(\Sigma A_p x_\nu^p).$$

Z. B. für $A_p=1$ und $x_\nu<1$:

$$(11)\qquad \sum_\nu a_\nu x_\nu\cdot\sum_\nu\frac{a_\nu}{1-x_\nu}\leqq\sum_\nu a_\nu\cdot\sum_\nu\frac{a_\nu x_\nu^2}{1-x_\nu}.$$

Zum Schluß sollen noch zwei bekannte Ungleichungen abgeleitet werden, damit an einigen scheinbar ganz abgelegenen Beispielen die vielseitige Anwendbarkeit erkannt werde. Durch die Substitution

$$\frac{a_\nu}{\Sigma a_\nu}=\alpha_\nu$$

werde die Ungleichung (4) in die einfachere Gestalt

$$(\Sigma\alpha_\nu x_\nu)^p\leqq\Sigma\alpha_\nu x_\nu^p;\quad \Sigma\alpha_\nu=1$$

übergeführt. Man multipliziere beiderseits mit $\frac{1}{p}$ und summiere über p von 1 bis ∞. Ist $x_\nu<1$, so wird:

$$-\ln(1-\Sigma\alpha_\nu x_\nu)\geqq-\Sigma\alpha_\nu\ln(1-x_\nu),$$

$$(12)\qquad 1-\Sigma a_\nu x_\nu\geqq\Pi(1-x_\nu)^{a_\nu}.$$

Digitized by Google

Erstreckt man die Summation nur über alle ungeraden p, so ergibt sich:

$$\ln \frac{1+\Sigma\alpha_\nu x_\nu}{1-\Sigma\alpha_\nu x_\nu} \leqq \sum_\nu{}' \alpha_\nu \ln \frac{1+x_\nu}{1-x_\nu},$$

$$\frac{1+\Sigma\alpha_\nu x_\nu}{1-\Sigma\alpha_\nu x_\nu} \leqq \prod_\nu{}' \left(\frac{1+x_\nu}{1-x_\nu}\right)^{\alpha_\nu}. \tag{13}$$

In (12) setze man

$$\alpha_\nu = \frac{1}{n},\ x_\nu = \frac{\nu-1}{n} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n).$$

Es wird dann:

$$1 - \Sigma\alpha_\nu x_\nu = 1 - \frac{n-1}{2n} > \sqrt[n]{\prod_\nu \frac{n+1-\nu}{n}} = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}.$$

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n. \tag{14}$$

Aus (13) folgt für

$$\alpha_\nu = \frac{1}{n},\ \frac{1+x_\nu}{1-x_\nu} = \frac{2\nu+1}{2\nu-1},$$

also

$$x_\nu = \frac{1}{2\nu} \text{ und } \Sigma\alpha_\nu x_\nu = \frac{1}{2n} \cdot \sum_{\nu=1}^{n}{}' \frac{1}{\nu}:$$

$$\frac{1+\frac{1}{2n}\cdot\Sigma\frac{1}{\nu}}{1-\frac{1}{2n}\cdot\Sigma\frac{1}{\nu}} < \sqrt[n]{\frac{3}{1}\cdot\frac{5}{3}\cdots\frac{2n+1}{2n-1}} = \sqrt[n]{2n+1},$$

$$\sum_{\nu=1}^{n}{}' \frac{1}{\nu} < 2n \cdot \frac{\sqrt[n]{2n+1}-1}{\sqrt[n]{2n+1}+1}. \tag{15}$$

Der Quotient

$$\frac{\sqrt[n]{2n+1}-1}{\sqrt[n]{2n+1}+1} = x$$

läßt sich leicht abschätzen. Es ist nämlich

$$\sqrt[n]{2n+1} = \frac{1+x}{1-x}$$

$$\frac{1}{n}\ln(2n+1) = \ln\left(1+\frac{2x}{1-x}\right) > \frac{2x}{1-x},$$

wenn $x < \frac{1}{3}$ ist — und das ist für hinreichend große n sicher der Fall (sogar schon für $n = 3$).

Digitized by Google

Für solche Werte wird

$$x < \frac{\frac{1}{n}\ln(2n+1)}{2+\frac{1}{n}\ln(2n+1)} < \frac{1}{2n}\ln(2n+1),$$

folglich

$$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu} < \ln(2n+1) < \ln(2n+2),$$

$$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu} < \ln 2 + \ln(n+1). \tag{16}$$

Bemerkung zu meinem Vortrage in der Sitzung am 26. Februar 1908 (VII, 50—63).

Von Georg Wallenberg.

In dem zweiten Teile meines Vortrages habe ich eine Anwendung der Gruppentheorie auf die linearen Differenzengleichungen gegeben und insbesondere folgenden Satz bewiesen: „Wenn zwischen drei Fundamentallösungen $v_x^{(1)}, v_x^{(2)}, v_x^{(3)}$ einer homogenen linearen Differenzengleichung dritter Ordnung mit rationalen Koeffizienten die Relation $v_x^{(2)\,2} - v_x^{(1)}v_x^{(3)} = 0$ besteht, so genügen ihr die Produkte je zweier Lösungen einer homogenen linearen Differenzengleichung zweiter Ordnung, deren Koeffizienten Quadratwurzeln rationaler Funktionen sind.“ Zu dem Beweise dieses Satzes brauchte ich zwei leicht herzustellende Differenzengleichungen dritter Ordnung, nämlich diejenigen, denen die Produkte bez. die Quotienten je zweier Fundamentallösungen einer homogenen linearen Differenzengleichung zweiter Ordnung genügen. Herr W. Heymann hat mich nun darauf aufmerksam gemacht, daß diese Differenzengleichungen sich bereits in seinen „Studien über die Transformation und Integration der Differential- und Differenzengleichungen“ (Leipzig 1891; Aufg. 103, 105, 106) vorfinden.

Digitized by Google

Mitglieder-Verzeichnis.

Ackermann-Teubner, Hofr. Dr. A., Verlagsbuchhändler, Leipzig, Poststr. 3.
Adler, Prof. Dr. A., Direktor, Wien VII, Neustiftgasse 97.
Ammerlahn, Oberlehrer G., Steglitz, Filandastr. 10.
Aron, GRR. Prof. Dr. H., Berlin W. 15, Kaiserallee 219/220.
Bahrdt, Oberlehrer Dr. W., Groß-Lichterfelde, Chausseestr. 26
Börsch, Prof. Dr. A., Potsdam, Burggrafenstr. 30.
Bonke, Oberlehrer R., Berlin NO. 18, Werneuchenerstr. 2
Bornitz, Prof. F., Halensee, Georg Wilhelmstr. 2.
Budde, Prof. Dr. E., Charlottenburg, Berlinerstr. 54.
Burg, Oberlehrer Dr. R., Friedenau, Friedrich Wilhelmplatz 13.
Caratheodory, Professor Dr. C., Bonn.
Cranz, GRR. Prof. Dr. C., Charlottenburg, Hardenbergstr 32a.
Cwojdziński, cand. K., Berlin N. 24, Auguststr. 6.
Denizot, Dozent Dr. A., Lemberg (Östr.), K. K. Techn. Hochsch.
Dumas, Privatdozent Dr. G., Zürich, Asylstr. 81.
Dziobek, Prof. Dr. O., Charlottenburg, Schillerstr. 19.
Emde, Ingenieur F., Berlin NW. 87, Zinzendorfstr. 3.
Färber, Prof. Dr. C., Berlin S. 53, Wilmsstr. 13.
Fischer, Oberlehrer P. B., Gr. Lichterfelde, Kommandantenstr. 85.
Fleck, prakt. Arzt Dr. A., Berlin N. 31, Ackerstr. 117.
Freese, Oberlehrer O., Pankow, Breitestr. 16.
Fuchs, Oberlehrer u. Privatdozent Dr. R., Halensee, Ringbahnstr. 128.
Furtwaengler, Prof. Dr. Ph., Aachen, Theresienstr. 22.
Galle, Prof. Dr. A., Potsdam, Behlertstr. 36.
Güntsche, Prof. Dr. R., Berlin W. 30, Hohenstaufenstr. 7.
Gutzmer, Prof. Dr. A., Halle a. S, Wettinerstrasse 17.
Haenlein, Prof. J., Berlin NW. 52, Spenerstr. 34.
Haentzschel, Prof. Dr. E., Berlin W. 30, Gleditschstr. 43.
Hagmann, Oberlehrer A., Charlottenburg, Friedbergstr. 10.
Hahn, Prof. H., Grunewald, Dachsberg 13.
Hamburger, Schulamtskandidat Dr. A., Charlottenburg, Herderstr. 1.
Hassel, Oberlehrer, Weißensee, Langhansstr. 151.
Hauck, Realschuldirektor A., Schönlanke bei Schneidemühl.
Hensel, GRR. Prof. Dr. K., Marburg (Hessen), Breiter Weg 7.
Hertzer, GRR. Prof. Dr. H., Halensee, Kurfürstendamm 137.
Hessenberg, Prof. Dr. G., Bonn, Lessingstr. 30.
Heun, Prof. Dr. K., Karlsruhe (Bd.), Klauprechtstr. 33.
Hillmann, Schulamtskand. J., Neu-Ruppin, Ziethenstr. 10.
Holtze, Dipl. Ing. H., Gleiwitz O.-Schl., Wilhelmstraße 18.
Jacobsthal, Schulamtskandidat Dr. E., Berlin SW. 13, Alte Jakobstr. 128.
Jahnke, Prof. Dr. E., Berlin W. 15, Pariserstr. 36.
Jolles, Prof. Dr. St., Halensee, Kürfürstendamm 130.
Jonas, Oberlehrer Dr. H. J., Rixdorf, Berlinerstr. 71.
Kamienstschikoff, Dr. N., Lindenberg bei Beeskow.

Digitized by Google

Kneser, Prof. Dr. A., Breslau, Tiergartenstr. 106.
Knoblauch, Prof. Dr. J., Berlin W. 35, Karlsbad 12.
Knopp, Dr. K., Groß-Lichterfelde W., Steglitzerstr. 38.
Koebe, Privatdozent Dr. P., Göttingen, Planckstr. 17.
Koebke, Dr. E., Friedenau, Cranachstr. 5.
Koppe, Prof. M., Berlin SO. 33, Schlesischestr. 18.
Kötter, Prof. Dr. F., Charlottenburg, Oranienstr. 16.
Kreuter, G., Technischer Hilfsarbeiter bei der Kaiserl. Normaleichungskomm., Charlottenburg, Werner Siemensstr. 27/28.
Krüger, Prof. Dr. L., Potsdam, Geodät. Institut.
Kühnen, Prof. Dr. Fr., Potsdam, Wilhelmsplatz 2.
Kullrich, Realgymnasialdirektor Dr. E., Gera (Reuß), Blücherstr. 14.
Lampe, GRR. Prof. Dr. E., Berlin W. 15, Fasanenstr. 64.
Landau, Prof. Dr. E., Charlottenburg 2, Hardenbergstr. 13.
Lemke, Oberlehrer Dr. H., Wilmersdorf, Preußischestr. 8.
Lewent, Oberlehrer L., Berlin W. 30, Motzstr. 87.
Lindner, Prof. P., Charlottenburg, Grolmanstr. 14.
Linsenbarth, Prof. Dr. H., Berlin N. 54, Lothringerstr. 76.
Löwenheim, Oberlehrer L., Berlin NW. 23, Schleswiger Ufer 19.
Lorenz, Ingenieur M., Kiel, Karlstr. 24.
Mann, Ingenieur L., Charlottenburg, Galvanistr. 2.
Marggraff, Prof. Dr. B., Pankow, Amalienpark 2.
Meder, Dozent A., Riga, Dorpaterstr. 28.
Meth, Dr. P., Charlottenburg, Leibnizstr. 23.
Meyer, Oberlehrer und Privatdozent Dr. E., Charlottenburg 2, Goethestr. 6.
Meyer, Prof. Dr. F., Königsberg (Pr.), Villenkolonie Maraunenhof, Herzog Albrecht-Allee 27.
Michaelis, Prof. Dr. C., Potsdam, Schützenplatz 1a.
Michaelis, Stadt-Schulrat Dr. K., Berlin W. 35, Kurfürstenstr. 14.
Müller, Prof. Dr. F., Weißer Hirsch b. Dresden, Bautzenerstr. 84.
Müller, Prof. H., Charlottenburg, Grolmanstr. 15.
Müller, Oberrealschuldirektor Prof. Dr. R., Schöneberg, Grunewaldstr. 27.
Nahrwold, Oberrealschuldirektor Dr. R., Berlin C. 19, Niederwallstr. 12.
Opitz, Oberlehrer Dr. H., Johannisthal, Parkstr. 6.
Oppenheim, Oberlehrer, H., Charlottenburg 2, Pestalozzistr. 8.
Pahl, Prof. F., Charlottenburg, Weimarerstr. 1.
Peters, Oberlehrer J., Cöln a. Rh., Hunnenrücken 30.
Quelle, R., Verlagsbuchhändler, Leipzig, Liebigstr. 6.
Reissner, Prof. Dr. Ing. H., Aachen, Lütticherstr. 166.
Rothe, Prof. Dr. R., Clausthal.
Rotth, Oberingenieur A., Berlin W. 35, Magdeburgerstr. 22.
Salkowski, Oberlehrer und Privatdozent Dr. E., Berlin SW. 29, Zossenerstr. 17.
Saltykow, Prof. N., Karkow (Rußland), Mironoeytzkaja ploschad N 16.
Samter, Prof. Dr. H., Charlottenburg, Herderstr. 14.
Sándor, Dr. E., Budapest V, Wurmgasse 1.
Sarli, Dr. Ing. Cr., Berlin N. 54, Brunnenstr. 25.
Schafheitlin, Prof. Dr. P., Berlin W. 15, Schaperstr. 17.
Scheffers, Prof. Dr. G., Steglitz, Schloßstr. 42.
Schlesinger, Prof. Dr. O., Charlottenburg 1, Galvanistr. 17.

Digitized by Google

Schneidenbach, Oberlehrer J., Berlin NO. 55, Weißenburgerstr. 57.
Schneider, GBR. Prof. A., Berlin W. 57, Großgörschenstr. 31.
Schur, Privatdozent Dr. I., Berlin NW. 52, Thomasiusstr. 2.
Schwarz, Schulamtskandidat B., Landsberg (Warthe), Röstelstr. 1.
Seliwanow, Prof. Dr. D., St. Petersburg, Fontanka, 116, log. 16.
Singer, Dr. O., Berlin NW. 52, Helgoländer Ufer 5.
Skutsch, Prof. R., Dortmund, Münsterstr. 38.
Steinitz, Prof. Dr. E., Berlin W. 50, Nachodstr. 38.
Stumpf, Ingenieur, Wilmersdorf, Kaiserplatz 14.
Tropfke, Prof. Dr. J., Berlin NW. 6, Marienstr. 14.
Valentin, Oberbibliothekar Dr. G., Berlin W. 62, Burggrafenstr. 6.
Vogler, GRR. Prof. Dr. Ch. A., Berlin W. 10, Kaiserin Augustastr. 80.
Wallenberg, Prof. und Privatdozent Dr. G., Charlottenburg, Grolmanstr. 21.
Wassilieff, Prof. Dr. A., Kasan (Rußland).
Weingarten, GRR. Prof. Dr. J., Freiburg i. Breisgau, Schillerstr. 22.
Weiß, Prof. Dr. F., Gr.-Lichterfelde Ost, Parallelstr. 10.
Weltzien, Prof. Dr. C., Zehlendorf, Prinz Handjerystr. 3.
Witt, Dr. G., Berlin NW. 5, Birkenstr. 29.
Zacharias, Oberlehrer Dr. M., Berlin NW. 52, Melanchthonstr. 5.
Zühlke, Oberlehrer Dr. P., Halensee, Joachim Friedrichstr. 13.

Digitized by Google

NOV 2 1910
APR 27 1911
DUE APR 21 1923

Digitized by Google

3 2044 102 936 085

Digitized by Google